Autour de la transformation d'Abel (CNM TSI 2002, CCINP MP 2014)

I. Transformation d'Abel

1. (a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. $\boxed{b_k = B_k - B_{k-1}.}$

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On calcule avec la question précédente,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} a_k b_k = a_0 b_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k (B_k - B_{k-1}) &= a_0 b_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k B_k - \sum_{k=1}^{n} a_k B_{k-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k B_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} B_k\end{aligned}$$

   donc $\boxed{\sum_{k=0}^{n} a_k b_k = a_n B_n + \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k.}$

2. On suppose la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée, donc $|(a_n - a_{n+1})B_n| = \mathcal{O}(|a_n - a_{n+1}|)$.

   La série $\sum |a_n - a_{n+1}|$ étant convergente par hypothèse, les théorèmes de comparaison des séries à termes positifs assurent la convergence de la série $\sum |(a_n - a_{n+1})B_n|$, c'est-à-dire l'absolue convergence, et donc la convergence, de la série $\sum (a_n - a_{n+1})B_n$. Comme, de plus, $a_n B_n \to 0$ car $a_n \to 0$ et (B_n) bornée, la relation démontrée en **1.b** montre que $\boxed{\text{la série de terme général } a_n b_n \text{ converge.}}$

3. Supposons la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante de limite nulle. Alors, par télescopage,

$$\sum_{k=0}^{n} |a_k - a_{k+1}| = \sum_{k=0}^{n} (a_k - a_{k+1}) = a_0 - a_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a_0,$$

   c'est-à-dire que la série $\sum |a_n - a_{n+1}|$ converge.
   Les hypothèses de la question précédente sont donc vérifiées, donc

$$\boxed{\text{la série de terme général } a_n b_n \text{ converge.}}$$

4. Supposons la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante de limite nulle. Si l'on pose $b_n = (-1)^n$ pour tout n, alors $B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k = 0$ ou 1 selon la parité de n, donc la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. D'après la question précédente, la série $\sum a_n b_n$ converge.
   On a donc démontré le *critère spécial sur les séries alternées* :

   $\boxed{\text{Si la suite } (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante de limite nulle, la série } \sum (-1)^n a_n \text{ est convergente.}}$

   (Notez que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante de limite nulle implique $a_n \geqslant 0$ pour tout n !)

5. (a) On demande de calculer la somme des termes d'une suite géométrique de raison $e^{i\theta}$. Notons que, par hypothèse, $e^{i\theta} \neq 1$.

   Par théorème, $\sum_{k=1}^{n} e^{ik\theta} = e^{i\theta} \frac{1 - e^{in\theta}}{1 - e^{i\theta}} = e^{i\theta} \frac{e^{in\theta/2}}{e^{i\theta/2}} \frac{(-2i)\sin(n\theta/2)}{(-2i)\sin(\theta/2)}$ donc $\boxed{\sum_{k=1}^{n} e^{ik\theta} = e^{i(n+1)\theta/2} \frac{\sin(n\theta/2)}{\sin(\theta/2)}.}$

(b)
- Lorsque $\alpha > 1$, la série de terme général $\dfrac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$ est absolument convergente donc $\boxed{\text{convergente.}}$
- Lorsque $\alpha \leqslant 0$, le module du terme général ne tend pas vers 0 donc

$$\boxed{\text{la série est grossièrement divergente.}}$$

- Soit $\alpha \in]0,1]$. On va montrer que la série est convergente par application du résultat de la question **3**.

  Notons tout de même que le fait que la série commence à $n=1$ à la place de $n=0$ n'a pas d'incidence.

  La suite $(1/n)$ est décroissante et tend vers 0.

  D'après la question précédente, $\forall n \in \mathbb{N}^*, \left|\displaystyle\sum_{k=1}^{n} e^{ik\theta}\right| \leqslant \dfrac{1}{|\sin(\theta/2)|}$ donc la suite des sommes partielles de $\sum e^{in\theta}$ est bornée. Donc $\boxed{\text{la série est (semi-)convergente.}}$

- Bilan : $\boxed{\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha} \text{ converge si et seulement si } \alpha > 0.}$

II. Application à l'étude d'une série trigonométrique

1. Si x est un réel n'appartenant pas à $2\pi\mathbb{Z}$, alors, d'après la question 5.a, $C_n(x)+iS_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} e^{ikx} = e^{i\frac{n+1}{2}x}\frac{\sin\left(\frac{n}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$, d'où en séparant partie réelle et imaginaire,

$$\boxed{C_n(x) = \frac{\cos\left(\frac{n+1}{2}x\right)\sin\left(\frac{n}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{\frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{-x}{2}\right)+\sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right)\right]}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} = -\frac{1}{2} + \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}}$$

et

$$\boxed{S_n(x) = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)\sin\left(\frac{n}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.}$$

---

2. On a donc, pour $x \in \mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z}$ fixé, $|S_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}$, c'est-à-dire que la suite $\left(S_n(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

   Comme en **I.5.b** qu'on peut aussi utiliser directement en prenant la partie imaginaire avec $\alpha = 1$, en appliquant alors le résultat de la question **I.3.** avec $a_n = \dfrac{1}{n}$ pour $n \geqslant 1$ (la valeur de a_0 importe peu) et $b_n = \sin nx$, on obtient que la série trigonométrique

$$\boxed{\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin nx}{n} \text{ converge lorsque } x \notin 2\pi\mathbb{Z}\text{. Et puisqu'elle converge aussi lorsque } x \in 2\pi\mathbb{Z}}$$

   ($\sin nx = 0$ pour tout n), on peut donc définir $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n}$.

---

3. Posons pour $x \in \mathbb{R}$ et $N \geqslant 1$, $f_N(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{\sin nx}{n}$.

   Alors f_N est impaire donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_N(-x) = -f_N(x)$ et par unicité de la limite, $f(-x) = -f(x)$ donc $\boxed{f \text{ est impaire.}}$

   On montre de la même façon que, puisque les f_N sont 2π-périodiques, $\boxed{\text{il en est de même de } f.}$

---

4. Pour $x\in]0,\pi[$ on a, en utilisant un résultat de la question **II.1**, et puisque la fonction $t\mapsto \dfrac{\sin\left(\left(n+\frac12\right)t\right)}{2\sin\left(\frac t2\right)}$ est continue sur $]0,\pi[$

$$\int_x^\pi \frac{\sin\left(\left(n+\frac12\right)t\right)}{2\sin\left(\frac t2\right)}\,\mathrm{d}t=\int_x^\pi\frac{\mathrm{d}t}{2}+\int_x^\pi C_n(t)\,\mathrm{d}t=\frac{\pi-x}{2}+\sum_{k=1}^n\int_x^\pi \cos kt\,\mathrm{d}t$$

donc $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^n\frac{\sin(kx)}{k}=\frac{\pi-x}{2}-\frac12\int_x^\pi\frac{\sin\left(n+\frac12\right)t}{\sin\frac t2}\,\mathrm{d}t.}$

5. (a) Une intégration par parties (les fonctions considérées étant toutes de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[x,\pi]$ pour $x\in]0,\pi[$) donne

$$\int_x^\pi \underbrace{h(t)}_{u(t)}\underbrace{\sin\left(n+\tfrac12\right)t}_{v'(t)}\,\mathrm{d}t=\left[\frac{-1}{n+\frac12}\cos\left(\left(n+\tfrac12\right)t\right)h(t)\right]_x^\pi+\frac{1}{n+\frac12}\int_x^\pi h'(t)\cos\left(n+\tfrac12\right)t\,\mathrm{d}t$$
$$=\frac{1}{n+\frac12}\cos\left(\left(n+\tfrac12\right)x\right)h(x)+\frac{1}{n+\frac12}\int_x^\pi h'(t)\cos\left(n+\tfrac12\right)t\,\mathrm{d}t,$$

On en déduit, en remarquant que h' est continue sur le segment $[x,\pi]$ donc bornée par une constante M sur ce segment,

$$\left|\int_x^\pi h(t)\sin\left(n+\tfrac12\right)t\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\frac{2}{2n+1}\left(\underbrace{\left|\cos\left(\left(n+\tfrac12\right)x\right)\right|}_{\leqslant1}|h(x)|+\left|\int_x^\pi\underbrace{|h'(t)|}_{\leqslant M}\underbrace{\left|\cos\left(n+\tfrac12\right)t\right|}_{\leqslant1}\,\mathrm{d}t\right|\right)$$
$$\leqslant\frac{2}{2n+1}\left(|h(x)|+|\pi-x|M\right),$$

ce qui implique que $\boxed{\displaystyle\int_x^\pi h(t)\sin\left(n+\tfrac12\right)t\,\mathrm{d}t\xrightarrow[n\to+\infty]{}0.}$

Remarque : nous venons de redémontrer, dans un cas particulier, le fameux lemme de Borel-Lebesgue.

(b) On déduit alors de la question précédente et de la question **II.4**, pour tout $x\in]0,\pi[$,

$$\sum_{k=1}^n\frac{\sin kx}{k}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\frac{\pi-x}{2},$$

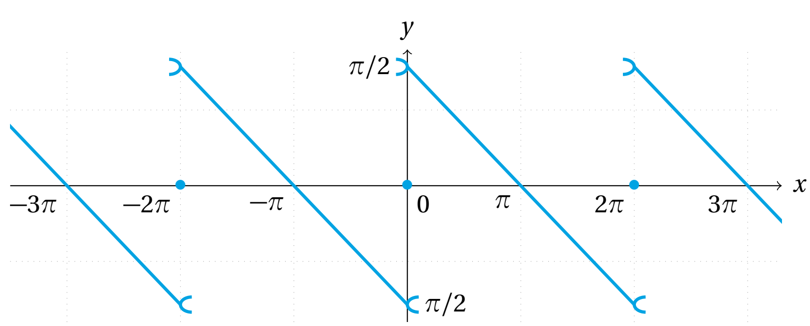
donc, par unicité de la limite, $f(x)=\dfrac{\pi-x}{2}$ et cette égalité est encore vraie pour $x=\pi$.

Si x appartient à $]\pi,2\pi[$ on a $x-2\pi\in]-\pi,0[$ et $2\pi-x\in]0,\pi[$, donc, h étant 2π-périodique et impaire,

$$f(x)=f(x-2\pi)=-f(2\pi-x)=-\frac{\pi-(2\pi-x)}{2}=\frac{\pi-x}{2},$$

donc pour tout $x\in]0,2\pi[$, $\boxed{f(x)=\dfrac{\pi-x}{2}.}$

(c)



III. Une majoration uniforme des sommes partielles de la série précédente

6. (a)

$$\begin{aligned}\sum_{p=m+1}^{n}\frac{\sin px}{p}&=\sum_{p=m+1}^{n}\frac{S_p(x)-S_{p-1}(x)}{p}=\sum_{p=m+1}^{n}\frac{S_p(x)}{p}-\sum_{p=m+1}^{n}\frac{S_{p-1}(x)}{p}\\&=\sum_{p=m+1}^{n}\frac{S_p(x)}{p}-\sum_{p=m}^{n-1}\frac{S_p(x)}{p+1}=\left[\frac{S_n(x)}{n}+\sum_{p=m+1}^{n-1}\frac{S_p(x)}{p}\right]-\left[\sum_{p=m+1}^{n-1}\frac{S_p(x)}{p+1}+\frac{S_m(x)}{m+1}\right]\end{aligned}$$

donc $\boxed{\sum_{p=m+1}^{n}\frac{\sin px}{p}=\frac{S_n(x)}{n}+\sum_{p=m+1}^{n-1}S_p(x)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p+1}\right)-\frac{S_m(x)}{m+1}.}$

(b) On remarque déjà que, pour $x\in]0,2\pi[$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$|S_n(x)|=\left|\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)\sin\left(\frac{n}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right|\leqslant\frac{1}{\left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right|}=\frac{1}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

On déduit alors de la relation précédente et de l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned}\left|\sum_{p=m+1}^{n}\frac{\sin px}{p}\right|&\leqslant\left|\frac{S_n(x)}{n}\right|+\sum_{p=m+1}^{n-1}|S_p(x)|\left|\underbrace{\frac{1}{p}-\frac{1}{p+1}}_{\geqslant 0}\right|+\left|\frac{S_m(x)}{m+1}\right|\\&\leqslant\frac{1}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\left(\frac{1}{n}+\sum_{p=m+1}^{n-1}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p+1}\right)+\frac{1}{m+1}\right)\\&\leqslant\frac{1}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\left(\frac{1}{n}+\left(\frac{1}{m+1}-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{m+1}\right)=\frac{2}{(m+1)\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.\end{aligned}$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, puisque la série converge (cf. **II.2**), on obtient :

$$\boxed{\left|\sum_{p=m+1}^{+\infty}\frac{\sin px}{p}\right|\leqslant\frac{2}{(m+1)\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.}$$

7. (a) Par définition de $k=\left[\frac{\pi}{x}\right]$ on a $kx\leqslant\pi$ donc pour tout $p\in[\![1,k]\!]$, $\sin(px)\geqslant 0$.

D'autre part, on sait que pour tout $X\geqslant 0$ on a $\sin X\leqslant X$ donc pour tout $p\in[\![1,k]\!]$, $\sin(px)\leqslant px$.

Ainsi, $\boxed{0\leqslant\sum_{p=1}^{k}\frac{\sin px}{p}\leqslant\pi.}$

(b) Inégalité classique : comme $\sin$ est concave sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ ($\sin''=-\sin\leqslant 0$) et $y=\frac{2}{\pi}x$ est l'équation de la corde reliant les points d'abscisse 0 et $\frac{\pi}{2}$, $\boxed{\sin x\geqslant\frac{2}{\pi}x \text{ sur } \left[0,\frac{\pi}{2}\right].}$

(c) D'après l'inégalité obtenue en **III.6.b** et le résultat précédent (puisque $\frac{x}{2}\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$), on a :

$$\left|\sum_{p=k+1}^{n}\frac{\sin px}{p}\right|\leqslant\frac{2}{(k+1)\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\leqslant\frac{2}{(k+1)\frac{2}{\pi}\frac{x}{2}}=\frac{2\pi}{(k+1)x}<2$$

puisque par définition de la partie entière on a $k\leqslant\frac{\pi}{x}<k+1$. Donc $\boxed{\left|\sum_{p=k+1}^{n}\frac{\sin px}{p}\right|\leqslant 2.}$

8. En combinant les résultats des deux questions précédentes on a

$$\forall x \in]0,\pi],\ \left|\sum_{p=1}^{n} \frac{\sin p x}{p}\right| \leqslant \left|\sum_{p=1}^{k} \frac{\sin p x}{p}\right| + \left|\sum_{p=k}^{n} \frac{\sin p x}{p}\right| \leqslant 2+\pi,$$

puis, par π-périodicité de la fonction $x \mapsto \left|\sum_{p=1}^{n} \frac{\sin p x}{p}\right|$, $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \left|\sum_{p=1}^{n} \frac{\sin p x}{p}\right| \leqslant 2+\pi.}$

Fin