Les calculatrices sont interdites.

* * * * *

N.B. : Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.
Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

* * * * *

Exercice

Pour tout triplet $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, on note $M(a, b, c)$ la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par :

$$M(a,b,c) = \begin{bmatrix} a+c & b & c \\ b & a+2c & b \\ c & b & a+c \end{bmatrix}$$

On appelle F l'ensemble défini par $F = \{M(a, b, c)\,;\,(a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}$.
On note $I = M(1, 0, 0)$ la matrice unité, $J = M(0, 1, 0)$ et $K = M(0, 0, 1)$.

1) Etude de l'ensemble F

1a. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1b. Déterminer une base de F.

1c. Soit une matrice $M(a, b, c)$ de F. Justifier, sans calculer les éléments propres, que $M(a, b, c)$ est diagonalisable.

2) Déterminer le spectre de J et ses sous-espaces propres.

3) Déterminer le spectre de K et ses sous-espaces propres.

4) Réduction simultanée de J et K

4a. Montrer que $\text{Vect}\left(\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right) = \text{Vect}\left(\begin{bmatrix}1\\\sqrt{2}\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\-\sqrt{2}\\1\end{bmatrix}\right)$.

4b. En déduire une matrice P inversible appartenant à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}JP = D_1$ et $P^{-1}KP = D_2$, avec D_1 et D_2 deux matrices diagonales que l'on explicitera.

5) Déduire de **1b.** et **4b.** que toute matrice $M(a, b, c)$ de F est semblable à une matrice diagonale D que l'on déterminera.

Fin de l'exercice

Problème 1

Partie I. Étude d'un endomorphisme

Dans cette partie, $E = \mathbb{R}_p[X]$ désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à p, avec p un entier naturel non nul, **supérieur ou égal à 2**. Les éléments de E sont indifféremment désignés par l'écriture P ou $P(X)$.

Soit l'application Δ définie sur E par :

$$\forall P \in E,\ \Delta(P) = P(X+1) - P(X)$$

L'écriture $P(X+1)$ désigne le polynôme obtenu en remplaçant l'indéterminée X par $X+1$ dans l'expression de $P(X)$.

Par exemple, si $P = aX^2 + bX + c$, alors : $\begin{aligned} P(X+1) &= a(X+1)^2 + b(X+1) + c \\ &= aX^2 + (2a+b)X + a + b + c \end{aligned}$

1) Montrer que Δ est un endomorphisme de E.

2) Soit $\mathcal{B}_0 = (1, X, \cdots, X^p)$ la base canonique de E.
Pour $k \in [\![1, p]\!]$, montrer que $\Delta(X^k)$ est un polynôme de degré $k-1$ dont on calculera le coefficient dominant.

3) **3a.** Montrer que la matrice M de Δ dans $\mathcal{B}_0$ est une matrice triangulaire supérieure.

3b. Montrer, sans calculs, que M n'est pas une matrice diagonalisable.

4) Montrer que $\mathrm{Im}(\Delta) = \mathbb{R}_{p-1}[X]$.

5) Déterminer $\mathrm{Ker}(\Delta)$.

6) Montrer que :

$$\forall P, Q \in E, \quad \Delta(P) = \Delta(Q) \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R}, P(X) - Q(X) = c$$

7) En déduire qu'il existe un unique polynôme $Q \in E$ tel que :

$$\Delta(Q) = pX^{p-1} \quad \text{et} \quad \int_0^1 Q(t)\mathrm{d}t = 0$$

La notation $Q(t)$ dans $\displaystyle\int_0^1 Q(t)\mathrm{d}t$ désigne, de façon usuelle, la fonction polynomiale associée au polynôme Q.

Partie II. Étude d'une suite de fonctions polynomiales

Dans cette partie on étudie des fonctions polynomiales, ou polynômes, que l'on notera indifféremment $P(x)$ ou P.
Les résultats de la Partie I pourront être utilisés en étant directement transposés des polynômes de $\mathbb{R}_p[X]$ à leurs fonctions polynomiales associées.

On considère la suite de fonctions polynomiales à coefficients réels $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} B_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ B'_{n+1} = (n+1)B_n \\ \forall n \in \mathbb{N},\ \displaystyle\int_0^1 B_{n+1}(t)\mathrm{d}t = 0 \end{cases}$$

1) Calculer B_1, B_2 et B_3.

2) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, $B_n(0) = B_n(1)$

3) Montrer, **en utilisant une démonstration par récurrence**, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, B_n est un polynôme de degré n de coefficient dominant égal à 1.

4) Démontrer par récurrence sur n, la propriété :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ B_n(x+1) - B_n(x) = nx^{n-1}$$

Indication : on pourra intégrer la relation de récurrence au rang n pour une variable $t \in [0, x]$.

5) En déduire : $\forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad x^p = \displaystyle\int_x^{x+1} B_p(t)\mathrm{d}t$

6) **6a.** Soient n et p deux entiers naturels, déduire de la question précédente, l'expression de la somme

$$S_p(n) = \sum_{k=0}^{n} k^p$$

en fonction de n, p et B_{p+1}.

6b. Donner les expressions de $S_1(n)$ et $S_2(n)$ en fonction de n.

7) On appelle **nombres de Bernoulli**, les nombres b_n définis par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n = B_n(0)$.
En identifiant $B_n(x)$ à son polynôme de Taylor de degré n, démontrer :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_{n-k}\, x^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_k\, x^{n-k}$$

Partie III. Fonctions génératrices des polynômes de Bernoulli

Pour $t \in \mathbb{R}$, on considère la série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{B_n(t)}{n!}x^n$, qui est donc une série entière de la variable x, dont les coefficients dépendent de n et du paramètre t.

On admet que pour tout t réel, cette série entière a un rayon de convergence $R = +\infty$ et on note alors S_t sa somme :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad S_t(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n(t)}{n!}x^n$$

On admet aussi l'expression de $S_t(x)$, valable pour x réel **non nul** :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^*, \quad S_t(x) = \frac{x\, e^{tx}}{e^x - 1}$$

1) Soit $t \in \mathbb{R}$, quelle est la valeur de la somme $S_t(0)$ de la série entière pour $x = 0$?
Vérifier que : $\forall t \in \mathbb{R}$, $\lim_{x\to 0} S_t(x) = S_t(0)$.

2) En calculant la quantité $D_t(x) = S_{t+1}(x) - S_t(x)$ de deux façons, avec la formule explicite en fonction de t et x, puis avec la série entière, redémontrer le résultat :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \; B_n(t+1) - B_n(t) = nt^{n-1}$$

Indication : ne pas utiliser le résultat de la question **II.4)** pour simplifier les calculs.

3) Vérifier que : $\forall t \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $S_{1-t}(x) = S_t(-x)$
En déduire que : $\forall t \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $B_n(1-t) = (-1)^n B_n(t)$

4) En déduire, avec le résultat de **II.2)** : $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_{2n+1} = 0$.

Fin du problème 1

Problème 2

Le but de ce problème est de déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha}$ suivant la valeur du réel α.

Partie I. Préliminaires et cas où $\alpha > 1$

1) Rappeler à quelle condition sur $\beta \in \mathbb{R}$ la série numérique $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\beta}$ est convergente.

2) Rappeler la définition de la convergence absolue d'une série $\sum u_n$ où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite à termes réels.

3) Montrer que la série $\sum(a_{n+1} - a_n)$ converge, si et seulement si la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

4) On suppose dans cette question que $\alpha > 1$. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha}$ est convergente.

Partie II. Cas où α appartient à $]\frac{1}{2}, 1]$

On suppose, dans cette partie, que α appartient à $]\frac{1}{2}, 1]$.

On définit la fonction ϕ sur $[1, +\infty[$ en posant $\phi(t) = \dfrac{\sin(\pi\sqrt{t})}{t^\alpha}$.

On pose $u_n = \phi(n) = \dfrac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha}$ et $v_n = \displaystyle\int_n^{n+1} \phi(t)dt$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

1) Nature de l'intégrale impropre (ou généralisée) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \phi(t)dt$.

1a. En effectuant le changement de variable $y = \sqrt{t}$, montrer que pour tout $x > 1$:

$$\int_1^x \phi(t)dt = 2\int_1^{\sqrt{x}} \frac{\sin(\pi y)}{y^{2\alpha-1}}dy$$

1b. En déduire que

$$\int_1^x \phi(t)dt = 2\left(-\frac{\cos(\pi\sqrt{x})}{\pi\sqrt{x}^{2\alpha-1}} - \frac{1}{\pi}\right) - \frac{2(2\alpha-1)}{\pi}\int_1^{\sqrt{x}} \frac{\cos(\pi y)}{y^{2\alpha}}dy$$

1c. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(\pi y)}{y^{2\alpha}}dy$ est convergente.

1d. En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \phi(t)dt$ est convergente.

2) Étude de la dérivée de la fonction ϕ.

2a. Montrer que la fonction ϕ est de classe C^1 sur $[1, +\infty[$ et calculer sa dérivée $\phi'(t)$ pour tout $t \in [1, +\infty[$.

2b. **2b.1** Calculer, si elle existe, la limite de $u \mapsto \dfrac{\sin(\pi u)}{u}$ lorsque u tend vers $+\infty$.

Montrer que la fonction $u \mapsto \dfrac{\sin(\pi u)}{u}$ est bornée sur $[1, +\infty[$.

2b.2 En déduire qu'il existe un réel $K > 0$ tel que

$$\forall t \in [1, +\infty[,\ |\phi'(t)| \leq \frac{K}{t^{\alpha+\frac{1}{2}}}$$

2c. Montrer que pour tout $(a, b) \in [1, +\infty[^2$ vérifiant $a < b$, on a

$$|\phi(a) - \phi(b)| \leq \frac{K}{a^{\alpha+\frac{1}{2}}}|a - b|$$

3) Nature de la série $\sum v_n$.

3a. Exprimer la somme partielle $V_N = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} v_n$ pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ à l'aide d'une intégrale.

3b. Quelle est la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} v_n$?

4) Nature de la série $\sum(u_n - v_n)$.

4a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n - v_n = \displaystyle\int_n^{n+1} (\phi(n) - \phi(t))\, dt$

4b. À l'aide de **II.2c** et **II.4a**, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|u_n - v_n| \leq \dfrac{K}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}$

4c. En déduire que $\displaystyle\sum_{n\geq 1}(u_n - v_n)$ converge.

5) Conclure sur la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha}$.

Partie III. Cas $\alpha = \frac{1}{2}$

On suppose, dans cette partie, que α vaut $\dfrac{1}{2}$.

1) En vue du développement asymptotique de $\dfrac{\sin(\pi\sqrt{n})}{\sqrt{n}}$, on pose $\delta_n = e^{i\pi\sqrt{n+1}} - e^{i\pi\sqrt{n}}$.

1a. Rappeler les développements limités d'ordre 2 en 0 de $\sqrt{1+u}$ et e^u.

1b. Montrer que $\delta_n = \dfrac{i\pi e^{i\pi\sqrt{n}}}{2\sqrt{n}} - \dfrac{\pi^2 e^{i\pi\sqrt{n}}}{8n} - \dfrac{i\pi e^{i\pi\sqrt{n}}}{8n^{3/2}} + o\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right)$ $(\mathcal{R})$.

1c. En admettant qu'on puisse prendre les parties réelles dans $(\mathcal{R})$, en déduire que

$$\frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{\sqrt{n}} = -\frac{2}{\pi}\left(\cos(\pi\sqrt{n+1}) - \cos(\pi\sqrt{n})\right) - \frac{\pi}{4n}\cos(\pi\sqrt{n}) + \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{4n^{3/2}} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

2) **2a.** Quelle est la nature de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^{3/2}}$? Celle de $\sum_{n\geq 1} w_n$ avec $w_n = o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$?

On admet que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{\cos(\pi\sqrt{n})}{n}$ est convergente.

2b. On pose $\alpha_n = \cos(\pi\sqrt{n})$. Expliciter les suites de termes généraux $\beta_n = \alpha_{(2n)^2}$ et $\gamma_n = \alpha_{(2n+1)^2}$. En déduire que la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = \left(\cos(\pi\sqrt{n})\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est divergente .

2c. Que peut-on en déduire sur la nature de $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{\sqrt{n}}$?

Partie IV. Cas $\alpha < \frac{1}{2}$

On suppose, dans cette partie, que le réel α est strictement inférieur à $\frac{1}{2}$.

On va montrer, par l'absurde, que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha}$ diverge. On suppose donc que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha}$ converge.

On pose pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $S_p = \sum_{n=1}^{p} \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha}$, et $S_0 = 0$.

1) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{\sqrt{n}} = n^{\alpha-1/2}(S_n - S_{n-1})$$

En déduire que pour tout entier N supérieur ou égal à 2, on a

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{N} S_n \left(n^{\alpha-1/2} - (n+1)^{\alpha-1/2}\right) + S_N(N+1)^{\alpha-1/2}$$

2) **2a.** Montrer qu'il existe $M > 0$, tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|S_n| \leq M$.

2b. En déduire que la série $\sum_{n\geq 1} S_n \left(n^{\alpha-1/2} - (n+1)^{\alpha-1/2}\right)$ est convergente.

2c. Montrer que la suite $\left(S_N(N+1)^{\alpha-1/2}\right)_{N\in\mathbb{N}^*}$ converge et donner sa limite.

3) Que peut-on en déduire sur la nature de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{\sqrt{n}}$?

4) Conclure sur la nature de $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha}$.

Fin du problème 2

Fin de l'énoncé