Mines 2015 : PSI, maths 1

stephane.gonnord@prepas.org

Dans tout ce corrigé, nous noterons T l'opérateur de Stein, c'est-à-dire l'application qui à une suite $f=(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ associe la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $g_n=\lambda f_{n+1}-nf_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. L'application T est clairement linéaire, et un certain nombre de questions auront avantage à être vues à l'aide de cet opérateur. Enfin, quand une suite $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, nous noterons $\|u\|_\infty$ la borne supérieure des $|u_n|$, pour n décrivant $\mathbb{N}$.

I Préliminaires

1) Pour $\lambda\in\mathbb{R}$, la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}}\frac{\lambda^n}{n!}$ est réputée convergente de somme égale à e^λ, donc :

$$\boxed{\text{la suite } \left(c\frac{\lambda^n}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ appartient à } \mathcal{P} \text{ si et seulement si } c=\mathrm{e}^{-\lambda}.}$$

2) Notons $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les deux suites en jeu. Si $A\subset\mathbb{N}$, on a

$$\varphi(A):=\sum_{n\in A}p_n-\sum_{n\in A}q_n=\mathbf{1}_A(0)(q-p)+\mathbf{1}_A(1)(p-q)\in\{0,q-p,p-q\},$$

donc $|\varphi(A)|\leq|p-q|$. Par ailleurs, en prenant $A=\{0\}$ (ou $A=\{1\}$), on a bien $\varphi(A)=|p-q|$, donc ce majorant est en fait un maximum, donc la borne supérieure. Ainsi :

$$\boxed{\mathrm{dist}\left((1-p,p,0,...),(1-q,q,0,...)\right)=|p-q|}$$

3) Puisque f est bornée, on peut écrire :

$$\forall n\in\mathbb{N},\qquad |f(n)p_n|\leq\|f\|_\infty\,p_n.$$

On $\sum p_n$ est convergente, donc par comparaison de séries à termes positifs :

$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}}f(n)p_n \text{ est absolument convergente donc convergente.}}$$

II Caractérisation

4) Ici, on a la majoration (pour $n\geq1$) :

$$\left|nf(n)p_n^{(\lambda)}\right|\leq|\lambda|\,\mathrm{e}^{-\lambda}\,\|f\|_\infty\,\frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!},$$

or $\sum\limits_{n\geq1}\frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}$ est convergente, donc comme dans la question précédente :

$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}}nf(n)p_n^{(\lambda)} \text{ est absolument convergente donc convergente.}}$$

5) Tout d'abord, les deux séries en jeu sont (absolument) convergentes d'après les questions précédentes. Ensuite, travaillons sur les sommes partielles, en fixant $N\in\mathbb{N}$: on a alors par translation d'indice :

$$\lambda\sum_{n=0}^{N}f(n+1)p_n^{(\lambda)}=\lambda\sum_{k=1}^{N+1}f(k)\underbrace{p_{k-1}^{(\lambda)}}_{\frac{k}{\lambda}p_k^{(\lambda)}}=\sum_{k=1}^{N+1}kf(k)p_k^{(\lambda)}.$$

Quand N tend vers $+\infty$, toutes les sommes convergent, et on a en passant la relation précédente à la limite :

$$\boxed{\lambda \sum_{n=0}^{+\infty} f(n+1)p_n^{(\lambda)} = \sum_{n=0}^{+\infty} nf(n)p_n^{(\lambda)}}$$

(On a réindexé la deuxième somme par n plutôt que k, puis ajouté le terme (nul) pour $n=0$.)

6) Si on fixe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ et qu'on prend $f = \mathbf{1}_{\{n_0\}}$, l'identité vérifiée par f et Q fournit : $\lambda q_{n_0-1} = n_0 q_{n_0}$, donc :

$$\forall n > 0, \qquad q_n = \frac{\lambda}{n} q_{n-1}.$$

On montre alors par récurrence immédiate :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad q_n = \frac{\lambda^n}{n!} q_0.$$

La condition de normalisation $Q \in \mathcal{P}$ et la première question nous assurent alors que $q_0 = \mathrm{e}^{-\lambda}$, et ainsi :

$$\boxed{Q = P_\lambda}$$

III Résolution de l'équation de Stein

7) **Analyse :** Supposons que $f \in \mathcal{S}_h$. On a alors $\lambda f(1) - 0f(0) = \widetilde{h}(0)$, donc

$$f(1) = \frac{\widetilde{h}(0)}{\lambda} = \frac{0!}{\lambda^1} \sum_{k=0}^{0} \widetilde{h}(k) \frac{\lambda^k}{k!}.$$

Ensuite, pour $n \in \mathbb{N}$, la relation

$$f(n+1) = \frac{n}{\lambda} f(n) + \widetilde{h}(n)$$

permet d'établir par récurrence simple (mais probablement à rédiger par les candidats prudents) :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad f(n) = \frac{(n-1)!}{\lambda^n} \sum_{k=0}^{n-1} \widetilde{h}(k) \frac{\lambda^k}{k!}.$$

Synthèse : Supposons que f est une suite de réels vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad f(n) = \frac{(n-1)!}{\lambda^n} \sum_{k=0}^{n-1} \widetilde{h}(k) \frac{\lambda^k}{k!}.$$

On a alors pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\lambda f(n+1) - nf(n) = \frac{n!}{\lambda^{n+1-1}} \sum_{k=0}^{n} \widetilde{h}(k) \frac{\lambda^k}{k!} - n\frac{(n-1)!}{\lambda^n} \sum_{k=0}^{n-1} \widetilde{h}(k) \frac{\lambda^k}{k!} = \frac{n!}{\lambda^n} \widetilde{h}(n) \frac{\lambda^n}{n!},$$

soit finalement : $\lambda f(n+1) - nf(n) = \widetilde{h}(n)$. Ceci étant vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a bien $f \in \mathcal{S}_H$.

$$\boxed{\mathcal{S}_h \text{ possède une infinité d'éléments, qui sont les suites } f \text{ vérifiant } f(n) = \frac{(n-1)!}{\lambda^n} \sum_{k=0}^{n-1} \widetilde{h}(k) \frac{\lambda^k}{k!} \text{ pour tout } n \geq 1.}$$

L'infinité d'éléments vient du fait qu'on prend $f(0)$ quelconque ! Parions que la synthèse (pourtant très accessible) n'aura pas été faite dans beaucoup de copies, et que ça aura été une des questions discriminantes.

8) Au vu de la question précédente, il s'agit de montrer que $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \widetilde{h}(n)\frac{\lambda^n}{n!}$ est (convergente et) de somme nulle. Puisque h est bornée, $\widetilde{h}$ l'est aussi, et la convergence (absolue) est donc acquise. Considérons alors la somme partielle, pour $N \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{N} \widetilde{h}(k)\frac{\lambda^k}{k!} = \sum_{k=0}^{N} h(k)\frac{\lambda^k}{k!} - \left(\sum_{k=0}^{\infty} h(k)p_k^{(\lambda)}\right)\left(\sum_{k=0}^{N}\frac{\lambda^k}{k!}\right)$$

Lorsque N tend vers $+\infty$, les trois sommes convergent. Puisque d'une part la dernière tend vers e^λ et d'autre part $\mathrm{e}^\lambda p_k^{(\lambda)} = \frac{\lambda^k}{k!}$, on obtient bien en passant la relation précédente à la limite :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \widetilde{h}(k)\frac{\lambda^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)\frac{\lambda^k}{k!} - \left(\sum_{k=0}^{\infty} h(k)\mathrm{e}^\lambda p_k^{(\lambda)}\right) = 0$$

Finalement, grâce à la question précédente :

$$\boxed{f(n) = -\frac{(n-1)!}{\lambda^n}\sum_{k=n}^{\infty}\widetilde{h}(k)\frac{\lambda^k}{k!}}$$

9) En majorant chaque $\left|\widetilde{h}(k)\right|$ par $\left\|\widetilde{h}\right\|_\infty$ (on a déjà constaté que $\widetilde{h}$ est bornée), on obtient (après un éventuel passage par une somme partielle :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \left|\sum_{k=n}^{\infty}\widetilde{h}(k)\frac{\lambda^k}{k!}\right| \leq \left\|\widetilde{h}\right\|_\infty \sum_{k=n}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}.$$

La somme du membre de droite est le reste de la série exponentielle, donc vaut $\mathrm{e}^\lambda - \sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{\lambda^k}{k!}$·. On contrôle cette différence de façon « classique » (mais sans indication, ça me semble hard !) par l'inégalité de Taylor-Lagrange pour la fonction exponentielle sur $[0, \lambda]$ (ou par la formule de Taylor avec reste intégral suivie d'une majoration de l'intégrale, l'inégalité de Taylor-Lagrange n'étantplus au programme ; on pouvait aussi majorer $\dfrac{1}{k!}$ par $\dfrac{1}{(k-n)!n!}$ dans le reste initial, ce qui conduit ultimement au même majorant) :

$$\left|\mathrm{e}^\lambda - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\lambda^k}{k!}\right| \leq \frac{\lambda^n}{n!}\mathrm{e}^\lambda.$$

Ainsi, en recollant les morceaux :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad |f(n)| \leq \frac{1}{n}\mathrm{e}^\lambda\left\|\widetilde{h}\right\|_\infty,$$

donc la suite $(f(n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 donc est bornée.

$$\boxed{\text{Tous les éléments de } \mathcal{S}_h \text{ sont bornés.}}$$

IV Propriété de Lipschitz

10) Fixons m et n tels que $1 \leq n \leq m$. On a alors $\widetilde{h}(n) = h(n) - p_m^{(\lambda)} = \begin{cases} 1 - p_m^{(\lambda)} & \text{si } m = n \\ -p_m^{(\lambda)} & \text{sinon} \end{cases}$ or dans $\sum\limits_{k=0}^{n-1}\widetilde{h}(k)\frac{\lambda^k}{k!}$, on a $k < n \leq m$, donc

$$f_m(n) = \frac{(n-1)!}{\lambda^n}\sum_{k=0}^{n-1}(-p_m^{(\lambda)})\frac{\lambda^k}{k!},$$

ce qui est le résultat attendu.

$$\boxed{\text{Si } 1 \leq n \leq m, \text{ alors } f_m(n) = -\frac{(n-1)!}{\lambda^n} p_m^{(\lambda)} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^k}{k!}\cdot}$$

11) Si $0 \leq m < n$ et $k \geq n$, on a $m \neq k$, donc $\widetilde{h}(k) = -p_m^{(\lambda)}$.

$$\boxed{\text{Si } 0 \leq m < n, \text{ alors } f_m(n) = \frac{(n-1)!}{\lambda^n} p_m^{(\lambda)} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}\cdot}$$

Pour $n > 1$, le signe de $f_m(n)$ se déduit immédiatement des deux expressions trouvées précédemment :

$$\boxed{f_m(n) \text{ est strictement négatif si } 1 \leq n \leq m \text{ et strictement positif si } 0 \leq m < n.}$$

12) **Supposons d'abord :** $1 \leq n < m$**.**
On a alors n et $n+1$ dans $[\![1, m]\!]$, donc grâce à la question 10 et après factorisation :

$$\Delta f_m(n) = -\frac{(n+1)!}{\lambda^n} p_m^{(\lambda)} \left(\frac{n}{\lambda} \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k}{k!} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^k}{k!} \right)$$

On a, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$: $\dfrac{n}{\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!} \geq k\dfrac{\lambda^{k-1}}{k!} = \dfrac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}$ donc :

$$\frac{n}{\lambda} \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k}{k!} \geq \frac{n}{\lambda} \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda^k}{k!} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^k}{k!},$$

ce qui prouve : $\Delta f_m(n) \leq 0$.
Supposons maintenant : $m < n$**.**
On a cette fois :

$$\Delta f_m(n) = -\frac{(n+1)!}{\lambda^n} p_m^{(\lambda)} \left(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} - \frac{n}{\lambda} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \right)$$

La majoration $\dfrac{n}{k!} \leq \dfrac{1}{(k-1)!}$, valable pour tout $k \geq n+1$, après multiplication par λ^{k-1}, sommation et décalage... nous fournit à nouveau : $\Delta f_m(n) \leq 0$.

$$\boxed{\Delta f_m \text{ est négative sur } \mathbb{N} \setminus \{0, m\}.}$$

13) Tout d'abord, notons que :

$$\boxed{\text{On n'a pas forcément } \Delta f_0(0) = \frac{1 - \mathrm{e}^{\lambda}}{\lambda}\cdot}$$

En effet, si $f_0(1)$ *vaut effectivement* $\dfrac{1-\mathrm{e}^{\lambda}}{\lambda}$, $f_0(0)$ *est quelconque. C'est sans conséquence mathématique dans la suite ; espérons seulement que les candidats n'auront pas passé trop de temps et d'énergie pour essayer de prouver cette relation. Mais attendez, j'ai une vision : le rapport du jury va dire que « cette erreur mineure n'a absolument pas handicapé les candidats. » Nous voila rassurés !*
Fixons $m > 0$. On a :

$$\Delta f_m(m) = f_m(m+1) - f_m(m) = \underbrace{\frac{m!}{\lambda^{m+1}} p_m^{(\lambda)}}_{\mathrm{e}^{-\lambda}/\lambda} \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} + \underbrace{\frac{(m-1)!}{\lambda^m} p_m^{(\lambda)}}_{\mathrm{e}^{-\lambda}/m} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

Dans la dernière somme, une translation d'indice donne :

$$\sum_{k=0}^{m-1} \frac{\lambda^k}{k!} = \sum_{r=1}^{m} \frac{\lambda^{r-1}}{(r-1)!} = \sum_{r=1}^{m} \frac{r}{\lambda} \frac{\lambda^r}{r!}.$$

Il n'y a plus qu'à recoller les morceaux (en déplaçant les quotients m et λ) :

$$\boxed{\Delta f_m(m) = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}}{\lambda} \left(\sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} + \sum_{k=1}^{m} \frac{k}{m} \frac{\lambda^k}{k!} \right) \cdot}$$

14) D'après les deux dernières question, $\sup\limits_{n \geq 1} \Delta f_m(n) = \Delta f_m(m)$. Mais dans la dernière somme de l'expression trouvée à la question précédente, on peut majorer $\dfrac{k}{m}$ par 1, ce qui fournit :

$$\Delta f_m(m) \leq \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}}{\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}}{\lambda} (\mathrm{e}^{\lambda} - 1),$$

soit finalement :

$$\boxed{\sup_{n \geq 1} \Delta f_m(n) \leq \frac{1 - \mathrm{e}^{-\lambda}}{\lambda} \cdot}$$

15) L'ensemble $\mathcal{S}_h$ est donné (question 7) par la connaissance des $\widetilde{h}(n)$ pour $n \in \mathbb{N}$. Or, si $n \in \mathbb{N}$ on a (en notant $I = \inf\limits_{k \in \mathbb{N}} h(k)$) :

$$\widetilde{h_+}(n) = \underbrace{h_+(n)}_{h(n)-I} - \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{h_+(k)}_{h(k)-I} p_n^{(\lambda)} = h(n) - I + I \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} p_k^{(\lambda)}}_{1} = \widetilde{h}(n),$$

donc :

$$\boxed{\mathcal{S}_h = \mathcal{S}_{h_+}}$$

16) *Notons que pour que les professeurs puissent continuer d'expliquer à leurs élèves qu'une série et son éventuelle somme sont deux choses différentes, il aurait été intéressant que l'énoncé ne confonde pas les deux !*

On sait que d'une part h est bornée (donc h_+ aussi) et que d'autre part $f_m(n)$ est de la forme (pour $m \geq n$) : $f_m(n) = K_n \dfrac{\lambda^m}{m!}$, donc on a une majoration de la forme :

$$h_+(m) f_m(n) = O\left(\frac{\lambda^m}{m!}\right)$$

donc par comparaison de séries à termes positifs,

$$\boxed{\sum_{n \in \mathbb{N}} h_+(m) f_m(n) \text{ est absolument convergente donc convergente.}}$$

17) Soit f définie comme dans l'énoncé. Il s'agit de montrer : $T(f) = \widetilde{h}$, ou encore (question 15) : $T(f) = \widetilde{h_+}$. Commençons par un calcul formel, qui guidera le calcul ultérieur. On écrit $f = \sum\limits_{m=0}^{+\infty} h_+(m) f_m$, puis (en signalant les deux égalités « discutables ») :

$$T(f) \overset{*}{=} \sum_{m=0}^{+\infty} h_+(m) T(f_m) = \sum_{m=0}^{+\infty} h_+(m) \widetilde{\mathbf{1}_{\{m\}}} \overset{*}{=} \widetilde{\sum_{m=0}^{+\infty} h_+(m) \mathbf{1}_{\{m\}}} = \widetilde{h_+}.$$

Formalisons tout cela. On fixe $n \in \mathbb{N}$ et on va montrer : $T(f)(n) = \widetilde{h_+}(n)$. C'est parti !

$$\begin{aligned} T(f)(n) &= \lambda \sum_{m=0}^{\infty} h_+(m) f_m(n+1) - \sum_{m=0}^{\infty} h_+(m) n f_m(n) = \sum_{m=0}^{\infty} h_+(m) T f_m(n) = \sum_{m=0}^{\infty} h_+(m) \widetilde{\mathbf{1}_{\{m\}}}(n) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} h_+(m) \left(\mathbf{1}_{\{m\}}(n) - \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{1}_{\{m\}}(k) p_k^{(\lambda)}}_{p_m^{(\lambda)}} \right) = h_+(n) - \sum_{m=0}^{\infty} h_+(m) p_m^{(\lambda)} = \widetilde{h_+}(n) \end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a bien $T(f) = \widetilde{h_+}$, donc :

$$\boxed{f \in \mathcal{S}_{h_+} = \mathcal{S}_h}$$

L'énoncé est ici extrèmement maladroit : il y a une confusion entre cette fonction f très particulière appartenant à $\mathcal{S}_h$ et une fonction f générique de $\mathcal{S}_h$ (qui, certes, diffèrent de peu, mais...).

18) Prenons $f \in \mathcal{S}_h$. Cette application coincide sur $\mathbb{N}^*$ avec l'application des deux questions précédentes, donc si on fixe $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$f(n+1) - f(n) = \sum_{m=0}^{\infty} h_+(m) \left(f_m(n+1) - f_m(n) \right).$$

Dans cette somme, tous les termes sont négatifs (question 12) sauf celui d'indice $m = n$; ainsi :

$$f(n+1) - f(n) \leq h_+(n) \left(f_n(n+1) - f_n(n) \right) = h_+(n) \Delta f_n(n).$$

Or d'une part $f_n(n) \leq \dfrac{1 - \mathrm{e}^{-\lambda}}{\lambda}$ (question 14) et d'autre part

$$h_+(n) = h(n) - \inf_{k \in \mathbb{N}} h(k) \leq \sup_{k \in \mathbb{N}} h(k) - \inf_{k \in \mathbb{N}} h(k),$$

et donc (on multiplie des inégalités entre des quantités positives) :

$$\boxed{f(n+1) - f(n) \leq \frac{1 - \mathrm{e}^{-\lambda}}{\lambda} \left(\sup_{k \in \mathbb{N}} h(k) - \inf_{k \in \mathbb{N}} h(k) \right).}$$

V Application probabiliste

19) Si X_k vaut 1, on a $S = W_k + 1$ donc $X_k f(S) = X_k f(W_k + 1)$; et si $X_k = 0$, $X_k f(S) = 0 = X_k f(W_k + 1)$, ce qui prouve bien :

$$\boxed{X_k f(S) = X_k f(W_{k+1})}$$

On a utilisé l'abus de langage usuel en probabilités consistant à confondre X et $X(\omega)$: en fait X_k ne vaut ni 0 ni 1. Pour être plus soigneux, on peut préférer rédiger : « Si $X_k(\omega) = 1$... Ainsi, $(X_k f(s))(\omega) = (X_k f(W_k + 1))(\omega)$ pour tout $\omega \in \Omega$, donc $X_k f(S) = X_k f(W_{k+1})$. »

Puisque $X_1, ..., X_n$ sont indépendantes et que W_k ne dépend que des X_i pour $i \neq k$, le lemme des coalitions nous assure que $f(W_k)$ et X_k sont indépendantes, donc l'espérance de leur produit est le produit de leurs espérances :

$$\boxed{\mathbf{E}(f(W_k) X_k) = \mathbf{E}(X_k) \mathbf{E}(f(W_k)) = r_k \mathbf{E}(f(W_k))}$$

Je ne sais pas trop si/comment ça rentre dans le programme PC/PSI, où il n'y a pas explicitement les coalitions...

20) Puisque $\lambda = \sum\limits_{k=1}^{n} r_k$ et $S = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$, on a

$$\lambda f(S+1) - Sf(S) = \sum_{k=1}^{n} (r_k f(S+1) - X_k f(S))$$

donc par linéarité de l'espérance :

$$\mathbf{E}(\lambda f(S+1) - Sf(S)) = \mathbf{E}\left(\sum_{k=1}^{n} (r_k f(S+1) - X_k f(S))\right) = \sum_{k=1}^{n} (r_k \mathbf{E}\left(f(S+1)\right) - \mathbf{E}\left(X_k f(S)\right)).$$

Mais (question précédente, ou presque : X_k et $f(W_k+1)$ sont encore indépendantes) :

$$\mathbf{E}\left(X_k f(S)\right) = \mathbf{E}(X_k f(W_k+1)) = \mathbf{E}(X_k)\mathbf{E}(f(W_k+1)) = r_k \mathbf{E}(f(W_k+1))$$

donc

$$\mathbf{E}(\lambda f(S+1) - Sf(S)) = \sum_{k=1}^{n} r_k \mathbf{E}\left(f(S+1) - f(W_k+1)\right),$$

et il reste à observer que les variables aléatoires $f(S+1) - f(W_k+1)$ et $X_k\left(f(W_k+2) - f(W_k+1)\right)$ sont égales (même argument qu'à la question 19) pour conclure :

$$\boxed{\mathbf{E}\left(\lambda f(S+1) - Sf(S)\right) = \sum_{k=1}^{n} r_k \mathbf{E}\left(X_k\left(f(W_k+2) - f(W_k+1)\right)\right)}$$

J'ai séché un certain temps, avant de voir que $\lambda = \sum\limits_{k=1}^{n} r_k$...

21) Fixons $A \subset \mathbb{N}$, et prenons $h = \mathbf{1}_A$, de sorte que pour $n \in \mathbb{N}$, $\widetilde{h}(n) = \mathbf{1}_A(n) - \sum\limits_{i \in A} p_i^{(\lambda)}$. Dans le calcul suivant, on garde en tête que $\mathbf{P}(S = k) = 0$ dès que $k > n$ (donc presque toutes les sommes sont finies), ainsi que : $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}(S = k) = 1$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k \in A} \mathbf{P}(S = k) - \sum_{k \in A} p_k^{(\lambda)} &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}(S = k)\mathbf{1}_A(k) - \sum_{i \in A} p_i^{(\lambda)} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}(S = k) \underbrace{\left(\mathbf{1}_A(k) - \sum_{i \in A} p_i^{(\lambda)}\right)}_{\widetilde{h}(k) = T(f_A)(k)} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}(S = k) \left(\lambda f_A(k+1) - k f_A(k)\right) \\
&= \mathbf{E}\left(\lambda f_A(S+1) - S f_A(S)\right).
\end{aligned}$$

En prenant la valeur absolue de cette égalité puis la borne supérieure sur les $A \subset \mathbb{N}$, on trouve la relation demandée :

$$\boxed{\operatorname{dist}\left(\operatorname{loi}(S), P_\lambda\right) = \sup_{A \subset \mathbb{N}} \left|\mathbf{E}\left(\lambda f_A(S+1) - S f_A(S)\right)\right|}$$

22) D'après la question 20, et puisque X_k est indépendante de $f(W_k+2) - f(W_k+1)$, on a, pour toute partie A de $\mathbb{N}$:

$$\mathbf{E}\left(\lambda f_A(S+1) - S f_A(S)\right) = \sum_{k=1}^{n} r_k \underbrace{\mathbf{E}(X_k)}_{r_k} \mathbf{E}\left(f_A(W_k+2) - f_A(W_k+1)\right).$$

Mais $f_A(W_k+2) - f_A(W_k+1)$ est une variable aléatoire majorée en valeur absolue par $\|\Delta f_A\|_\infty$ donc par

$$\frac{1-\mathrm{e}^{-\lambda}}{\lambda}\left(\sup_{k\in\mathbb{N}} h(k) - \inf_{k\in\mathbb{N}} h(k)\right),$$

avec ici $h = \mathbf{1}_A$, puisque $f_A \in \mathcal{S}_{\mathbf{1}_A}$. Ainsi :

$$|\mathbf{E}\left(\lambda f_A(S+1) - S f_A(S)\right)| \leq \frac{1-\mathrm{e}^{-\lambda}}{\lambda}\sum_{k=1}^{n} r_k^2.$$

Ceci est vrai pour toute partie A de $\mathbb{N}$, et la question précédente permet de conclure :

$$\boxed{\mathrm{dist}\left(\mathrm{loi}(S), P_\lambda\right) \leq \frac{1-\mathrm{e}^{-\lambda}}{\lambda}\sum_{k=1}^{n} r_k^2}$$