Programme de colle – MPI

1. Algèbre linéaire

Révisions complètes du cours de MP2I. Voir programme page suivante. À cela s'ajoute :

Extrait du programme officiel :

Contenus	Capacités & commentaires
Compléments d'algèbre linéaire	
Somme, somme directe d'une famille finie de sous-espaces vectoriels. Si $F_1,\dots,F_p$ sont des sous-espaces de dimension finie, $\dim\left(\sum_{i=1}^{p} F_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{p}\dim(F_i)$ avec égalité si et seulement si la somme est directe.	Projecteurs associés à une décomposition de E en somme directe. Base adaptée à une décomposition en somme directe.
Si $E_1,\dots,E_p$ sont des sous-espaces de E tels que $E=\bigoplus E_i$ et si $u_i\in\mathscr{L}(E_i,F)$ pour tout i, alors il existe une et une seule $u\in\mathscr{L}(E,F)$ telle que $u_{\vert E_i}=u_i$ pour tout i.	
Matrices définies par blocs.	Interprétation géométrique des blocs.
Opérations par blocs de tailles compatibles (combinaison linéaire, produit, transposition).	La démonstration concernant le produit par blocs n'est pas exigible.

2. Questions de cours

(i) Formule de Grassmann : deux démonstrations, avec des supplémentaires et avec des applications linéaires.
En détailler une et donner les grandes lignes de l'autre.

(ii) Théorème du rang.

(iii) Toute matrice de rang r est équivalente à J_r.

(iv) **CCINP 59, 60, 62, 64, 71.**

3. Exercices CCINP

- **CCINP 59** : Soit n un entier naturel tel que $n\geqslant 2$.
Soit E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{K}=\mathbb{C}$) de degré inférieur ou égal à n. On pose $\forall P\in E,\ f(P)=P-P'$.
  1. Démontrer que f est bijectif de deux manières :
     (a) sans utiliser de matrice de f,
     (b) en utilisant une matrice de f.
  2. Soit $Q\in E$. Trouver P tel que $f(P)=Q$.
     Indication : si $P\in E$, quel est le polynôme $P^{(n+1)}$?
  3. (5/2) f est-il diagonalisable ?

- **CCINP 60** : Soit la matrice $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&4\end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ défini par : $f(M)=AM$.
  1. Déterminer une base de $\operatorname{Ker} f$.
  2. f est-il surjectif ?
  3. Déterminer une base de $\operatorname{Im} f$.
  4. A-t-on $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})=\operatorname{Ker} f\oplus\operatorname{Im} f$?

- **CCINP 62** : Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $f\in\mathscr{L}(E)$ tel que $f^2-f-2\mathrm{Id}=0$.
  1. Prouver que f est bijectif et exprimer f^{-1} en fonction de f.
  2. Prouver que $E=\operatorname{Ker}(f+\mathrm{Id})\oplus\operatorname{Ker}(f-2\mathrm{Id})$:
     (a) (5/2) en utilisant le lemme des noyaux ;
     (b) sans utiliser le lemme des noyaux.
  3. Dans cette question, on suppose que E est de dimension finie.
     Prouver que $\operatorname{Im}(f+\mathrm{Id})=\operatorname{Ker}(f-2\mathrm{Id})$.

- **CCINP 64** : Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie n.
  1. Démontrer que : $E=\operatorname{Im} f\oplus\operatorname{Ker} f\Longrightarrow\operatorname{Im} f=\operatorname{Im} f^2$.
  2. (a) Démontrer que : $\operatorname{Im} f=\operatorname{Im} f^2\Longleftrightarrow\operatorname{Ker} f=\operatorname{Ker} f^2$.
     (b) Démontrer que : $\operatorname{Im} f=\operatorname{Im} f^2\Longrightarrow E=\operatorname{Im} f\oplus\operatorname{Ker} f$.

- **CCINP 71** : Soit P le plan d'équation $x+y+z=0$ et D la droite d'équation $x=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$.
  1. Vérifier que $\mathbb{R}^3=P\oplus D$.
  2. Soit p la projection vectorielle de $\mathbb{R}^3$ sur P parallèlement à D. Soit $u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.
     Déterminer $p(u)$ et donner la matrice de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
  3. Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de p est diagonale.

4. Algèbre linéaire (MP2I)

Extrait du programme officiel :

A. Espaces vectoriels

Contenus	Capacités & commentaires
a) Espaces vectoriels	
Structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Produit d'un nombre fini de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.	Espaces $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}[X]$, $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
Espace vectoriel des fonctions d'un ensemble dans un espace vectoriel.	Espace $\mathbb{K}^\Omega$, cas particulier $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.
Famille presque nulle (ou à support fini) de scalaires, combinaison linéaire d'une famille de vecteurs.	On commence par la notion de combinaison linéaire d'une famille finie de vecteurs.
b) Sous-espaces vectoriels	
Sous-espace vectoriel : définition, caractérisation.	Sous-espace nul. Droite vectorielle. Plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Sous-espace $\mathbb{K}_n[X]$ de $\mathbb{K}[X]$.
Intersection d'une famille de sous-espaces vectoriels. Sous-espace vectoriel engendré par une partie A.	Ensemble des solutions d'un système linéaire homogène. Notations $\mathrm{Vect}(A)$, $\mathrm{Vect}(x_i)_{i\in I}$. Tout sous-espace vectoriel contenant A contient $\mathrm{Vect}(A)$.
c) Familles de vecteurs	
Famille (partie) génératrice. Famille (partie) libre, liée.	Ajout d'un vecteur à une famille (partie) libre. Liberté d'une famille de polynômes à degrés distincts.
Base, coordonnées.	Bases canoniques de $\mathbb{K}^n$, $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\mathbb{K}_n[X]$, $\mathbb{K}[X]$. Bases de polynômes à degrés échelonnés dans $\mathbb{K}[X]$ et $\mathbb{K}_n[X]$.
d) Somme de deux sous-espaces	
Somme de deux sous-espaces. Somme directe de deux sous-espaces. Caractérisation par l'intersection.	La somme $F+G$ est directe si la décomposition de tout vecteur de $F+G$ comme somme d'un élément de F et d'un élément de G est unique.
Sous-espaces supplémentaires.	On incite les étudiants à se représenter des espaces supplémentaires par une figure en dimension 2 et 3.

B. Espaces de dimension finie

a) Existence de bases

Contenus	Capacités & commentaires
Un espace vectoriel est dit de dimension finie s'il possède une famille génératrice finie.	
Si $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ engendre E et si $(x_i)_{i\in I}$ est libre pour une certaine partie I de $\{1,\dots,n\}$, alors il existe une partie J de $\{1,\dots,n\}$ contenant I pour laquelle $(x_j)_{j\in J}$ est une base de E.	Existence de bases en dimension finie. Théorèmes de la base extraite (de toute famille génératrice on peut extraire une base), de la base incomplète (toute famille libre peut être complétée en une base).

b) Dimension d'un espace de dimension finie

Contenus	Capacités & commentaires
Dans un espace engendré par n vecteurs, toute famille de $n+1$ vecteurs est liée.	
Dimension d'un espace de dimension finie.	Dimension de $\mathbb{K}^n$, de $\mathbb{K}_n[X]$, de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Dimension de l'espace des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1, de l'espace des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants, de l'espace des suites vérifiant une relation de récurrence linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants.
Dans un espace de dimension n, caractérisation des bases comme familles libres ou génératrices de n vecteurs.	
Dimension d'un produit fini d'espaces vectoriels de dimension finie.	
Rang d'une famille finie de vecteurs.	Notation $\mathrm{rg}(x_1,\dots,x_n)$.

c) Sous-espaces et dimension

Contenus	Capacités & commentaires
Dimension d'un sous-espace d'un espace de dimension finie, cas d'égalité.	
Dimension d'une somme de deux sous-espaces : formule de Grassmann.	
Tout sous-espace d'un espace de dimension finie possède un supplémentaire. Caractérisation dimensionnelle des couples de sous-espaces supplémentaires.	
Base adaptée à un sous-espace, à une décomposition en somme directe de deux sous-espaces.	

C. Applications linéaires

a) Généralités

Contenus	Capacités & commentaires
Application linéaire.	
Opérations sur les applications linéaires : combinaison linéaire, composition. Isomorphisme, réciproque.	Espace vectoriel $\mathcal{L}(E,F)$ des applications linéaires de E dans F. Bilinéarité de la composition.
Image directe et image réciproque d'un sous-espace par une application linéaire.	
Image d'une application linéaire.	
Noyau d'une application linéaire.	Caractérisation de l'injectivité.
Si $(x_i)_{i\in I}$ est une famille génératrice de E et si $u\in\mathcal{L}(E,F)$, alors $\mathrm{Im}\,u=\mathrm{Vect}(u(x_i))_{i\in I}$.	
Application linéaire de rang fini.	Notation $\mathrm{rg}(u)$.
Le rang de $v\circ u$ est majoré par $\min(\mathrm{rg}(u),\mathrm{rg}(v))$. Invariance du rang par composition par un isomorphisme.	

b) Endomorphismes

Contenus	Capacités & commentaires
Identité, homothéties.	Notations id_E, id.
Anneau $(\mathcal{L}(E),+,\circ)$.	Non commutativité si $\dim E\geqslant 2$. Notation vu pour la composée $v\circ u$. Notation u^k pour $u\in\mathcal{L}(E)$ et $k\in\mathbb{N}$.
Projection ou projecteur, symétrie : définition géométrique, caractérisation par $p^2=p$, par $s^2=\mathrm{id}$.	On incite les étudiants à se représenter géométriquement ces notions par des figures en dimension 2 et 3.
Automorphismes. Groupe linéaire.	Notation $\mathrm{GL}(E)$. Notation u^k pour $u\in\mathrm{GL}(E)$ et $k\in\mathbb{Z}$.

c) Détermination d'une application linéaire

Contenus	Capacités & commentaires
Si $(e_i)_{i\in I}$ est une base de E et $(f_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de F, alors il existe une unique application $u\in\mathcal{L}(E,F)$ telle que, pour tout $i\in I$, $u(e_i)=f_i$.	Caractérisation de l'injectivité, de la surjectivité, de la bijectivité de u.
Espaces vectoriels isomorphes, caractérisation par la dimension.	
Pour une application linéaire entre deux espaces de même dimension finie, équivalence entre injectivité, surjectivité et bijectivité.	
Un endomorphisme d'un espace de dimension finie inversible à gauche ou à droite est inversible.	
Dimension de $\mathcal{L}(E,F)$ si E et F sont de dimension finie.	
Si E_1 et E_2 sont des sous-espaces de E tels que $E=E_1\oplus E_2$, si $u_1\in\mathcal{L}(E_1,F)$, $u_2\in\mathcal{L}(E_2,F)$, il existe une unique application $u\in\mathcal{L}(E,F)$ coïncidant avec u_1 sur E_1 et avec u_2 sur E_2.	

d) Théorème du rang

Contenus	Capacités & commentaires
Forme géométrique du théorème du rang : si $u\in\mathcal{L}(E,F)$ et si S est un supplémentaire de $\mathrm{Ker}\,u$ dans E, alors u induit un isomorphisme de S sur $\mathrm{Im}\,u$.	
Théorème du rang : si E est de dimension finie n et $u\in\mathcal{L}(E,F)$, alors $n=\dim\mathrm{Ker}\,u+\mathrm{rg}(u)$.	

e) Formes linéaires et hyperplans

Contenus	Capacités & commentaires
Forme linéaire.	Formes coordonnées relativement à une base.
Hyperplan, défini comme noyau d'une forme linéaire non nulle.	Équations d'un hyperplan dans une base en dimension finie.
Si H est un hyperplan de E et D une droite non contenue dans H, alors $E=H\oplus D$.	
Réciproquement, tout supplémentaire d'une droite est un hyperplan.	En dimension n, les hyperplans sont exactement les sous-espaces de dimension $n-1$.
Comparaison de deux équations d'un même hyperplan.	
Si E est un espace de dimension finie n, l'intersection de m hyperplans est de dimension au moins $n-m$. Réciproquement, tout sous-espace de E de dimension $n-m$ est l'intersection de m hyperplans.	Système d'équations d'un sous-espace vectoriel ; cas des droites vectorielles de $\mathbb{R}^2$, des droites et plans vectoriels de $\mathbb{R}^3$. L'étude de la dualité est hors programme.

D. Sous-espaces affines d'un espace vectoriel

Contenus	Capacités & commentaires
Présentation informelle de la structure affine d'un espace vectoriel : points et vecteurs. Translation.	L'écriture $B=A+\vec{u}$ est équivalente à la relation $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$.
Sous-espace affine d'un espace vectoriel, direction. Hyperplan affine.	Sous-espaces affines de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.
Intersection de sous-espaces affines.	
Notion d'équation linéaire, i.e. de la forme $u(x)=a$ où $u\in\mathcal{L}(E,F)$, $a\in F$. L'ensemble des solutions est soit l'ensemble vide, soit un sous-espace affine dirigé par $\mathrm{Ker}\,u$.	Retour sur les systèmes linéaires, les équations différentielles linéaires d'ordres 1 et 2, les suites arithmético-géométriques, la recherche de polynômes interpolateurs.

E. Calcul matriciel

a) Opérations sur les matrices

Contenus	Capacités & commentaires
Ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans le corps $\mathbb{K}$. Addition, multiplication par un scalaire, combinaisons linéaires.	
Matrices élémentaires.	Toute matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est combinaison linéaire de matrices élémentaires.

Contenus	Capacités & Commentaires
Produit matriciel ; bilinéarité, associativité.	Si X est une matrice colonne, AX est une combinaison linéaire des colonnes de A.
Produit d'une matrice élémentaire de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par une matrice élémentaire de $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.	Symbole de Kronecker $\delta_{i,j}$.
Transposée d'une matrice.	Notation $A^{\top}$.
Opérations sur les transposées : combinaison linéaire, produit.	

b) Opérations élémentaires

Contenus	Capacités & Commentaires
Interprétation des opérations élémentaires sur les lignes et sur les colonnes en termes de produit matriciel.	

c) Systèmes linéaires

Contenus	Capacités & Commentaires
Écriture matricielle $AX = B$ d'un système linéaire. Système homogène associé.	
Système compatible.	Le système $AX = B$ est compatible si B est combinaison linéaire des colonnes de A.
Les solutions du système compatible $AX = B$ sont les $X_0 + Y$, où X_0 est une solution particulière et où Y parcourt l'ensemble des solutions du système homogène associé.	On reprend brièvement l'algorithme du pivot, en termes d'opérations élémentaires sur les lignes, dans ce contexte général. Toute technicité est exclue.

e) Anneau des matrices carrées

Contenus	Capacités & Commentaires
Anneau $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.	Non commutativité si $n \geqslant 2$. Exemples de diviseurs de zéro, d'éléments nilpotents.
Matrice identité, matrice scalaire.	Notation I_n.
Matrices symétriques, antisymétriques.	Notations $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$, $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$.
Formule du binôme.	Application au calcul de puissances.
Produit de matrices diagonales, de matrices triangulaires supérieures, inférieures.	
Matrice inversible, inverse. Groupe linéaire.	Notation $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.
Inverse d'une transposée.	
Les opérations élémentaires préservent l'inversibilité.	
Calcul de l'inverse d'une matrice, par opérations élémentaires ou par résolution du système $AX = Y$.	Toute technicité est exclue.
Condition nécessaire et suffisante d'inversibilité d'une matrice triangulaire ; l'inverse d'une matrice triangulaire inversible est triangulaire.	Cas particulier des matrices diagonales.

F. Matrices et applications linéaires

a) Matrice d'une application linéaire dans des bases

Contenus	Capacités & commentaires
Matrice d'un vecteur, d'une famille de vecteurs dans une base, d'une application linéaire dans un couple de bases, d'un endomorphisme dans une base.	Exemple : matrice, dans la base $(1, i)$ de $\mathbb{C}$ vu comme plan vectoriel réel, de la similitude de multiplicateur $a + ib$.
Isomorphisme d'espaces vectoriels de $\mathscr{L}(E,F)$ sur $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ induit par le choix d'un couple de bases.	
Isomorphisme d'espaces vectoriels et d'anneaux de $\mathscr{L}(E)$ sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ induit par le choix d'une base.	
Coordonnées de l'image d'un vecteur par une application linéaire.	
Matrice d'une composée d'applications linéaires. Lien entre matrices inversibles et isomorphismes.	Cas particulier des endomorphismes.

b) Application linéaire canoniquement associée à une matrice

Contenus	Capacités & commentaires
Application linéaire canoniquement associée à une matrice.	On identifie ici $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}^n$.
Noyau, image et rang d'une matrice.	Les colonnes engendrent l'image, les lignes donnent un système d'équations du noyau.
Une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si son noyau est réduit au sous-espace nul, ou si et seulement si ses colonnes engendrent l'espace $\mathbb{K}^n$ ou si et seulement si son rang est n.	Retour sur la condition d'inversibilité d'une matrice triangulaire. Lien entre les diverses notions de rang.
Toute matrice carrée inversible à gauche ou à droite est inversible.	

c) Systèmes linéaires

Contenus	Capacités & Commentaires
Interprétation de l'ensemble des solutions d'un système homogène comme noyau d'une matrice. Rang d'un tel système, dimension de l'espace des solutions.	
Le système $AX = B$ est compatible si et seulement si B appartient à l'image de A.	Structure affine de l'ensemble des solutions.
Si A est carrée et inversible, le système $AX = B$ possède une unique solution.	Dans ce cas, le système est dit de Cramer.

G. Changements de bases, équivalence et similitude

a) Changements de bases

Contenus	Capacités & commentaires
Matrice de passage d'une base à une autre.	
Inversibilité et inverse d'une matrice de passage.	
Effet d'un changement de base sur la matrice d'un vecteur.	
Effet d'un changement du couple de bases sur la matrice d'une application linéaire.	
Effet d'un changement de base sur la matrice d'un endomorphisme.	Exemples de recherche d'une base dans laquelle la matrice d'un endomorphisme donné est simple.

b) Matrices équivalentes et rang

Contenus	Capacités & commentaires
Si $u \in \mathscr{L}(E,F)$ est de rang r, il existe un couple de bases dans lequel u a pour matrice J_r.	La matrice J_r a tous ses coefficients nuls à l'exception des r premiers coefficients diagonaux, égaux à 1.
Matrices équivalentes.	
Une matrice est de rang r si et seulement si elle est équivalente à J_r.	Classification des matrices équivalentes par le rang.
Invariance du rang par transposition.	
Rang d'une matrice extraite. Caractérisation du rang par les matrices carrées extraites.	
Les opérations élémentaires sur les colonnes (resp. lignes) conservent l'image (resp. le noyau). Les opérations élémentaires conservent le rang.	Application : calcul du rang.

c) Matrices semblables et trace

Contenus	Capacités & commentaires
Matrices semblables.	Interprétation géométrique. Exemples de recherche d'une matrice simple semblable à une matrice donnée.
Trace d'une matrice carrée.	Notation $\mathrm{tr}(A)$.
Linéarité de la trace, relation $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$, invariance par similitude.	
Trace d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie. Linéarité, relation $\mathrm{tr}(uv) = \mathrm{tr}(vu)$.	Notation $\mathrm{tr}(u)$. Trace d'un projecteur.