

Savoir-faire et thèmes classiques – Polynômes et fractions rationnelles

1 Polynômes et fractions rationnelles

Savoir-faire

- Énoncer la formule des coefficients d'un produit de polynômes (voir produit de Cauchy)
- Manipuler les dérivées de polynômes, exprimer leur degré
- Utiliser la formule de Taylor pour les polynômes
- Définir l'ordre de multiplicité d'une racine, la caractériser avec la dérivation
- Traduire par la divisibilité ou la dérivation qu'une racine est d'ordre au moins m
- Définir ce qu'est un polynôme scindé, le caractériser avec la multiplicité des racines
- Énoncé le théorème fondamental de l'algèbre
- Définir les fonctions symétriques élémentaires en les racines d'un polynôme, énoncer les relations coefficients-racines
- Définir un polynôme d'interpolation de Lagrange, traduire le problème avec des outils d'algèbre linéaire, le calculer effectivement
- Poser une division euclidienne polynomiale
- Utiliser le fait que l'anneau $(\mathbb{K}[X], +, \times)$ est principal
- Définir l'irréductibilité d'un polynôme, connaître les irréductibles sur $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$
- Factoriser en produit d'irréductible dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$
- Déterminer le PGCD de deux polynômes avec l'algorithme d'Euclide ou la décomposition en irréductible
- Utiliser le lemme de Gauß pour les polynômes, par exemple pour résoudre des équations de la forme $AP + BQ = C$
- Déterminer les racines du PGCD et leur multiplicité, traduire que deux polynômes sont premier entre eux à l'aide de racines
- Définir le fait qu'une famille de polynômes soient premier entre eux dans leur ensemble
- Décomposer en éléments simples une fonction rationnelle dans $\mathbb{R}[X]$ ou dans $\mathbb{C}[X]$ (avec pôles simples ou multiples)

- Utiliser la parité ou le fait que la fraction soit réelle pour obtenir des relations entre coefficients
- Décomposer en éléments simple $\frac{P'}{P}$ lorsque P est scindé

Thèmes Classiques

- Polynômes de Tchebychev
- Polynômes de Legendre
- Racines rationnelles d'un polynôme à coefficients dans \mathbb{Z}
- Étude des dérivées de polynômes réels simplement scindés ou scindés
- Majoration de l'erreur dans l'interpolation de Lagrange
- Décomposition en irréductibles de $X^n - 1$
- Décomposition en éléments simples de $\frac{1}{X^n - 1}$
- Théorème de Gauß-Lucas
- (*) Polynômes cyclotomiques
- (*) Algébricité et transcendance.
- (*) Critère d'Eisenstein