

# Polynômes et fractions rationnelles

$\mathbb{K}$  désigne un sous-corps de  $\mathbb{C}$ .

En fait tout corps convient, mais pour certaines propriétés, on a besoin qu'il soit de caractéristique nulle, c'est-à-dire tel que  $n \cdot 1_{\mathbb{K}} = 1_{\mathbb{K}} + \dots + 1_{\mathbb{K}} \neq 0_{\mathbb{K}}$  si  $n \in \mathbb{N}^*$ .

## L'ALGÈBRE DES POLYNÔMES

### 1 Polynômes formels à une indéterminée

Se donner un polynôme à coefficients dans  $\mathbb{K}$ , c'est se donner la suite  $(a_0, a_1, \dots, a_d, 0, 0, \dots) \in \mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$  de ses coefficients ayant un nombre fini de termes non nuls (nulle à partir d'un certain rang). On parle alors de suite **presque nulle**.

On note alors, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $X^k$  la suite presque nulle  $(0, \dots, 0, \underbrace{1}_{k^e}, 0, 0, \dots)$ .

Cela permet de transformer la notation  $(a_0, a_1, \dots, a_d, 0, 0, \dots)$  en

$$P = a_0 + a_1 X + \dots + a_d X^d + 0 + 0 + \dots = \underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k}_{\text{somme finie}} = \sum_{k=0}^d a_k X^k.$$

On note parfois  $P(X)$  pour  $P$ .

- $X$  est appelée **indéterminée**. L'indéterminée n'est pas un nombre ! Elle n'a pas de valeur. Elle représente la suite presque nulle  $(0, 1, 0, 0, \dots)$ .
- L'ensemble des polynômes à une indéterminée à coefficients dans  $\mathbb{K}$  est noté  $\mathbb{K}[X]$ .
- Par définition,  $P = \sum a_k X^k = Q = \sum b_k X^k \iff \forall k, a_k = b_k$  (égalité de deux suites). Les coefficients d'un polynôme formel sont uniques.
- Le **polynôme nul** est le polynôme dont tous les coefficients sont nuls, noté  $0_{\mathbb{K}[X]}$  ou plus simplement  $0$ .
- On appelle monôme tout polynôme de la forme  $aX^k$  avec  $k \in \mathbb{N}$  et  $a \neq 0$ .
- On appelle **polynôme constant** tout polynôme  $P = a$  où  $a \in \mathbb{K}$ .
- Si  $P \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$ , on appelle **degré de P**, noté  $\deg P$ , le plus grand  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $a_k \neq 0$  (qui existe bien).

$$\deg P = \max\{k \in \mathbb{N} \mid a_k \neq 0\}$$

$a_{\deg P}$  est appelé **coefficient dominant** de  $P$ , noté  $\text{cd } P$ .

Si  $\text{cd } P = 1$ ,  $P$  est dit **unitaire** ou **normalisé**.

On pose  $\deg 0 = -\infty$ .

- On note  $\mathbb{K}_n[X] = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid \deg P \leq n\}$  l'ensemble des polynômes de degré **au plus**  $n$ .

$$\mathbb{K}_n[X] = \{a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n, (a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}\} = \text{Vect}(1, X, \dots, X^n).$$

### 2 Opérations sur les polynômes

Pour  $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k, Q = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k X^k \in \mathbb{K}[X]$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ , on définit les lois  $+, \times, \cdot, \circ$  par

- $P + Q = \sum_{k=0}^{+\infty} (a_k + b_k) X^k$

- $\lambda P = \sum_{k=0}^{+\infty} (\lambda a_k) X^k$

- $P \times Q = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \times \sum_{\ell=0}^{+\infty} b_\ell X^\ell = \sum_{\substack{m=0 \\ (m=k+\ell)}}^{+\infty} c_m X^m$

en faisant une sommation par diagonales, c'est-à-dire avec

$$c_m = \sum_{m=k+\ell} a_k b_\ell = \sum_{k=0}^m a_k b_{m-k} = \sum_{\ell=0}^m a_{m-\ell} b_\ell.$$

- $P \circ Q = P(Q) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k Q^k.$

#### Propriété 1 : Opérations algébriques et degré

Si  $P, Q \in \mathbb{K}[X]$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,  $P + Q, P \times Q$  et  $\lambda P$  sont des polynômes et

- $\deg(P + Q) \leq \max(\deg P, \deg Q)$  avec égalité si et seulement si  $\deg P \neq \deg Q$  ou ( $\deg P = \deg Q$  et  $\text{cd } P + \text{cd } Q \neq 0$ )
- $\deg(\lambda P) = \deg P$  et  $\text{cd}(\lambda P) = \lambda \text{cd } P$  si  $\lambda \neq 0$ , sinon  $\lambda P = 0$ .
- $\deg(PQ) = \deg P + \deg Q$  et  $\text{cd}(PQ) = \text{cd } P \text{cd } Q$ .
- Si  $Q$  non constant, alors

$$\deg(P \circ Q) = \deg P \deg Q$$

et

$$\text{cd}(P \circ Q) = \text{cd } P \times (\text{cd } Q)^{\deg P}.$$



**Remarque**

R1 – En général, on a  $\deg(\alpha P + \beta Q) \leq \max(\deg P, \deg Q)$ .

**Propriété 2 : Structure d'algèbre commutative intègre**

$(\mathbb{K}[X], +, \times, \cdot)$  est une  $\mathbb{K}$ -algèbre commutative intègre d'élément unité le polynôme constant 1 et dont le groupe des inversible est  $\mathbb{K}_0[X] \setminus \{0\}$  (polynômes constants non nuls.)

**Remarque**

R2 – L'isomorphisme d'algèbres trivial  $\mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}_0[X]$  permet de confondre  $\mathbb{K}$  et  $\mathbb{K}_0[X]$ , c'est-à-dire les constantes  $\lambda$  et les polynômes constants  $P = \lambda$ .

**3 Dérivation formelle**

**Définition 1 : Polynôme dérivé**

Si  $P = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n \in \mathbb{K}[X]$ , on appelle **polynôme dérivé de P**, noté  $P'$ , le polynôme défini par

$$P' = \sum_{k=1}^n k a_k X^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_{k+1} X^k = a_1 + 2a_2X + \dots + na_nX^{n-1}.$$

et  $0' = 0$ .

Plus généralement, on note  $P^{(0)} = P$ ,  $P^{(1)} = P'$ ,  $P^{(2)} = P'' = (P')'$  et pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $P^{(k)} = (P^{(k-1)})'$ .

**Remarque**

R3 – Il n'est pas question ici de dérivabilité : la dérivation est une simple opération algébrique sur les polynômes.

**Propriété 3 : de la dérivation**

Soient  $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ .

(i)  $\deg P' = \deg P - 1$  si  $P$  non constant,  $-\infty$  sinon.  
Plus généralement,  $\deg P^{(n)} = \deg P - n$  si  $\deg P \geq n$ ,  $-\infty$  sinon.  
En général,  $\deg P^{(n)} \leq \deg P - n$ .

(ii) **Linéarité** :  $(\alpha P + \beta Q)' = \alpha P' + \beta Q'$ .

(iii) **Formule de Leibniz**

$$(PQ)' = P'Q + PQ' \text{ et plus généralement, } (PQ)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} P^{(k)} Q^{(n-k)}.$$

(iv)  $(P \circ Q)' = Q' \times P' \circ Q$ .

**Remarque**

R4 –  $P^{(n)} = 0$  si  $n \geq \deg P + 1$  et si  $d = \deg P$ ,  $P^{(d)} = d! \text{cd} P$ .

R5 –  $\deg P = \min \{n \in \mathbb{N} \mid P^{(n)} = 0\} - 1$  si  $P \neq 0$ .

R6 – Si  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$(X - a)^k)^{(n)} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \geq k + 1 \\ k! & \text{si } n = k \\ k(k-1) \dots (k-n+1)(X-a)^{k-n} = \frac{k!}{(k-n)!} (X-a)^{k-n} & \text{sinon.} \end{cases}$$

R7 – Si  $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k$ , alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $P^{(n)} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \geq d + 1 \\ d! a_d & \text{si } n = d \\ \sum_{k=n}^d k(k-1) \dots (k-n+1) a_k X^{k-n} & \text{sinon.} \end{cases}$



**FONCTIONS POLYNOMIALES, RACINES**

**1 Fonctions polynomiales**

**Définition 2 : Fonction polynôme associée**

Si  $P = \sum_{k \geq 0} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ , on note  $\tilde{P} : \begin{cases} \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K} \\ x \rightarrow \tilde{P}(x) = \sum_{k \geq 0} a_k x^k \end{cases}$  appelée **fonction polynomiale associée à P**.

**Remarque**

- R 8 – Mathématiquement,  $P$  et  $\tilde{P}$  sont des objets fondamentalement différents. Cependant, sous certaines conditions, on peut les identifier (cf plus loin). Ainsi, on fait souvent l'abus de notation  $P(x)$  pour  $\tilde{P}(x)$ .
- R 9 – On peut en fait définir un polynôme pour autre chose qu'un élément de  $\mathbb{K}$  : il suffit de pouvoir élever à une puissance  $k$  et faire des combinaisons linéaires (matrices, fonctions, polynômes, etc.) : la structure de  $\mathbb{K}$ -algèbre est adaptée.
- R 10 – Si  $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ ,  $P \circ Q = \tilde{P}(Q)$  (on applique la fonction polynomiale à un polynôme au lieu d'un élément de  $\mathbb{K}$ .)

**Propriété 4 : Fonction polynôme et opérations**

- Si  $P, Q \in \mathbb{K}[X]$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$
- (i)  $\widetilde{P+Q} = \tilde{P} + \tilde{Q}$ .
  - (ii)  $\widetilde{P \times Q} = \tilde{P} \times \tilde{Q}$ .
  - (iii)  $\widetilde{\lambda P} = \lambda \tilde{P}$ .
  - (iv)  $\widetilde{P \circ Q} = \tilde{P} \circ \tilde{Q}$ .
  - (v) Sur  $\mathbb{R}$ ,  $\tilde{P}$  est dérivable et  $\tilde{P}' = \widetilde{P'}$ .

**Remarque**

R 11 – L'application  $P \mapsto \tilde{P}$  est un morphisme de  $\mathbb{K}$ -algèbres de  $\mathbb{K}[X]$  vers l'algèbre des fonctions de  $\mathbb{K}$  dans  $\mathbb{K}$ .

**2 Formule de Taylor**

**Théorème 1 : Formule de Taylor**

Soient  $P \in \mathbb{K}[X]$  et  $a \in \mathbb{K}$ .

$$P(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\tilde{P}^{(n)}(a)}{n!} (X - a)^n$$

la somme étant finie, c'est-à-dire

$$P(X + a) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\tilde{P}^{(n)}(a)}{n!} X^n.$$

**Corollaire 1 : Formule de Mac Laurin**

$$P = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\tilde{P}^{(n)}(0)}{n!} X^n \text{ c'est-à-dire les coefficients de } P \text{ sont les } a_n = \frac{\tilde{P}^{(n)}(0)}{n!}.$$

**3 Racines**

**Définition 3 : Racine**

$a \in \mathbb{K}$  est un **zéro** ou une **racine** de  $P \in \mathbb{K}[X]$  lorsque  $\tilde{P}(a) = 0$ .

**Remarque**

- R 12 – Cela dépend du corps  $\mathbb{K}$ .
- R 13 – Un polynôme réel de degré impair a toujours une racine réelle (conséquence du théorème des valeurs intermédiaires.)

**Propriété 5 : Racine et division**

- Soit  $P \in \mathbb{K}[X]$ .
- (i)  $a$  est racine de  $P$  si et seulement si  $(X - a) | P$ .
  - (ii)  $x_1, \dots, x_n$  sont racines deux à deux distinctes de  $P$  si et seulement si  $(X - x_1) \cdots (X - x_n) | P$ .

**Remarque**

R 14 – Si  $P | Q$ , toute racine de  $P$  est racine de  $Q$ . La réciproque est fautive en général.

**Corollaire 2 : Nombre de racines**

- Soit  $P \in \mathbb{K}[X]$ .
- (i) Si  $P \neq 0$ ,  $P$  admet au plus  $\deg P$  racines.
  - (ii) Si  $P$  admet strictement plus de  $\deg P$  racines,  $P = 0$ .
  - (iii) Si  $P$  admet une infinité de racines,  $P = 0$ .

**Corollaire 3 : Identification polynôme et fonction polynôme**

Si  $\mathbb{K}$  est infini et  $\tilde{P} = \tilde{Q}$ , alors  $P = Q$ . On peut alors confondre  $P$  et  $\tilde{P}$ .

**Remarque**

R 15 – Si  $\mathbb{K} = \{x_1, \dots, x_n\}$  fini (par exemple  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  avec  $p$  premier),  $P = \prod_{k=1}^n (X - x_k) \neq 0$  (il est unitaire) et pourtant  $\tilde{P} \equiv 0$  (pas plus de racines que le degré!).

**Exercice 1**

$$\text{Si } \mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}, P(X+a) = \sum_{n \geq 0} \frac{a^n}{n!} P^{(n)}(X).$$

**Définition 4 : Multiplicité**

Soient  $P \in \mathbb{K}[X]$  tel que  $P \neq 0$ ,  $a \in \mathbb{K}$ .  
On appelle **ordre de multiplicité** de  $a$  en tant que racine de  $P$  l'entier

$$m = \max \{ k \in \mathbb{N} ; (X-a)^k \mid P \}$$

Ainsi,  $a$  est racine d'ordre  $m$  si et seulement si  $(X-a)^m \mid P$  et  $(X-a)^{m+1} \nmid P$  si et seulement si on a  $Q \in \mathbb{K}[X]$  tel que  $P = (X-a)^m Q$  et  $Q(a) \neq 0$ .

- Si  $m = 0$ ,  $a$  n'est pas racine de  $P$ .
- Si  $m \geq 1$ ,  $a$  est racine de  $P$ .
- Si  $m = 1$ ,  $a$  est racine simple de  $P$ .
- Si  $m = 2$ ,  $a$  est racine double de  $P$ .
- Si  $m = 3$ ,  $a$  est racine triple de  $P$ .
- Si  $m \geq 2$ ,  $a$  est racine multiple de  $P$ .

**Remarque**

R 16 – Si  $(X-a)^n \mid P$  alors  $a$  est racine de  $P$  d'ordre **au moins**  $n$ .

R 17 – L'ordre est toujours au plus égal au degré du polynôme.

**Propriété 6**

$x_1, \dots, x_n$  deux à deux distincts sont racines d'ordre au moins  $m_1, \dots, m_n$  respectivement si et seulement si  $(X-x_1)^{m_1} \dots (X-x_n)^{m_n} \mid P$ .

**Propriété 7 : Caractérisation de l'ordre**

Soient  $P \in \mathbb{K}[X]$ ,  $a \in \mathbb{K}$ ,  $m \in \mathbb{N}$ .  
 $a$  est racine d'ordre  $m$  de  $P$  si et seulement si  $\forall k \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket$ ,  $\tilde{p}^{(k)}(a) = 0$  et  $\tilde{p}^{(m)}(a) \neq 0$ .

**Exercice 2 : CCINP 85****Corollaire 4 : Multiplicité des racines de  $P$  vs  $P'$** 

Si  $a$  est racine d'ordre  $m \geq 2$  de  $P$ ,  $a$  racine d'ordre  $m-1$  de  $P'$ . La réciproque est fautive si on ne suppose pas  $a$  racine de  $P$ .

**Exemple**

E 1 –  $P = X(X-2)$  et  $P' = 2X-2$  : 1 est racine simple de  $P'$ , mais n'est pas racine double de  $P$ .

**Exercice 3**

Montrer que  $(X-1)^3 \mid nX^{n+2} - (n+2)X^{n+1} + (n+2)X - n$ .



Voir exercice du TD : 10, 11, 15, 18

**4 Polynômes scindés****Définition 5 : Polynôme scindé**

$P \in \mathbb{K}[X]$  est dit **scindé** sur  $\mathbb{K}$  s'il peut s'écrire comme produit de polynômes de degré 1 de  $\mathbb{K}[X]$ , c'est-à-dire si on a  $\lambda \in \mathbb{K}^*$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $y_1, \dots, y_n \in \mathbb{K}$  tels que

$$P = \lambda(X-y_1) \cdots (X-y_n),$$

c'est-à-dire si on a  $\lambda \in \mathbb{K}^*$ ,  $p \in \mathbb{N}^*$  et  $x_1, \dots, x_p \in \mathbb{K}$  deux à deux distincts et  $m_1, \dots, m_p \in \mathbb{N}^*$  tels que

$$P = \lambda(X-x_1)^{m_1} \cdots (X-x_p)^{m_p}.$$

Alors  $\deg P \geq 1$ ,  $\lambda = \text{cd } P$ ,  $x_1, \dots, x_p$  sont les racines de  $P$  deux à deux distinctes de multiplicités respectives  $m_1, \dots, m_p$ .

**Remarque**

R 18 –  $\triangle$  Scindé sur  $\mathbb{C} \Leftrightarrow$  scindé sur  $\mathbb{R}$ .  
 $P = X^2 - 1$  est scindé sur  $\mathbb{C}$  mais pas sur  $\mathbb{R}$ .  
 $P = X^2 - 2$  est scindé sur  $\mathbb{R}, \mathbb{C}$  mais pas sur  $\mathbb{Q}$ .

**Propriété 8 : Caractérisation avec les racines**

Soit  $P$  un polynôme non constant admettant exactement  $p$  racines d'ordres respectifs  $m_1, \dots, m_p$  dans  $\mathbb{K}$ .  $P$  est scindé si et seulement si

$$m_1 + \dots + m_p = \deg P.$$

**Théorème 2 : Théorème de d'Alembert-Gauß (Théorème fondamental de l'algèbre)**

Tout polynôme non constant de  $\mathbb{C}[X]$  admet une racine.  
 On dit que le corps  $\mathbb{C}$  est **algébriquement clos**.

**Corollaire 5 : Version alternative équivalente**

Tout polynôme à coefficients complexes non constant est scindé.

**Corollaire 6 : Divisibilité et racines**

Si  $P$  est scindé, alors  $P|Q$  si et seulement si toutes les racines de  $P$  sont racines de  $Q$  avec des multiplicités au moins égales à celles pour  $P$ .

**Remarque**

R 19 – C'est donc toujours vrai dans  $\mathbb{C}$ .



Voir exercice du TD : 12, 13, 16, 17

**5 Relations coefficients-racines**

**Définition 6 : Fonctions symétriques élémentaires**

Soient  $n \in \mathbb{N}^*, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ .  
 On appelle **fonctions symétriques élémentaires** de  $x_1, \dots, x_n$  les nombres

$$\sigma_1 = \sum_{i=1}^n x_i = x_1 + x_2 + \dots + x_n. \quad (n \text{ termes})$$

$$\sigma_2 = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} x_{i_1} x_{i_2} \quad \left(\frac{n(n-1)}{2} \text{ termes}\right)$$

$$= x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots + x_1 x_n + \dots + x_{n-1} x_n.$$

$\vdots$

$$\sigma_k = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k}. \quad \left(\binom{n}{k} \text{ termes}\right)$$

$\vdots$

$$\sigma_n = x_1 x_2 \dots x_n. \quad (1 \text{ terme})$$

**Exemple**

E 2 – Si  $n = 3$ , les fonctions symétriques élémentaires en  $x, y, z$  sont  $\sigma_1 = x + y + z, \sigma_2 = xy + yz + xz$  et  $\sigma_3 = xyz$ .

**Remarque**

R 20 – On peut montrer que toute fonction polynomiale en  $x_1, \dots, x_n$  symétrique en  $x_1, \dots, x_n$  s'exprime comme un polynôme en  $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ .

**Exemple**

E 3 –  $S_1 = x_1 + \dots + x_n = \sigma_1$  et  $S_2 = x_1^2 + \dots + x_n^2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$ .

**Propriété 9 : Relations coefficients-racines**

Soient  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{K}$  tel que  $a_n \neq 0$ ,  $P = a_0 + \dots + a_n X^n$ , **scindé** sur  $\mathbb{K}$ ,  $x_1, \dots, x_n$  ses racines **comptées avec leur multiplicité**, donc  $P = a_n(X - x_1) \cdots (X - x_n)$ . En notant  $\sigma_k$  les fonctions symétriques élémentaires en  $x_1, \dots, x_n$ ,

- $\sigma_1 = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$ . (somme)
- $\vdots$
- $\sigma_k = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n}$ .
- $\vdots$
- $\sigma_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$ . (produit)

Ainsi,

$$P = a_n \left( X^n - \underbrace{\sigma_1}_{\text{somme}} X^{n-1} + \sigma_2 X^{n-2} + \dots + (-1)^n \underbrace{\sigma_n}_{\text{produit}} \right).$$

**Remarque**

R 21 – En particulier, si  $P$  est unitaire,  $P = X^n - \sigma_1 X^{n-1} + \sigma_2 X^{n-2} + \dots + (-1)^n \sigma_n$ .

R 22 – Si  $n = 2$ , on retrouve que les racines complexes de  $aX^2 + bX + c$  ont une somme égale à  $-b/a$  et un produit égal à  $c/a$ .



Voir exercice du TD : 14, 20

**INTERPOLATION DE LAGRANGE**

- **Problématique** : Étant donné  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n+1$  scalaires  $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{K}$  deux à deux distincts, et  $y_0, \dots, y_n \in \mathbb{K}$  fixés (par exemple pour tout  $k$ ,  $y_k = f(x_k)$  où  $f$  est une fonction connue ou non).

On cherche des polynômes  $P \in \mathbb{K}[X]$  tels que

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, P(x_k) = y_k.$$

C'est un problème d'**interpolation**.

- **Principe** : C'est un problème linéaire.

L'application  $u : \begin{cases} \mathbb{K}_n[X] & \rightarrow \mathbb{K}^{n+1} \\ P & \rightarrow (P(x_k))_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket} \end{cases}$  est une application linéaire injective entre deux espaces de dimension  $n+1$ .

En effet, son noyau est réduit aux polynômes de degré au plus  $n$  admettent les  $n+1$  racines distinctes  $x_0, \dots, x_n$ , c'est-à-dire au polynôme nul.

Il s'agit donc d'un isomorphisme.

On peut aussi remarquer que sa matrice dans les bases canoniques est la matrice de Vandermonde associée à  $x_0, \dots, x_n$ .

L'unique solution au problème est donc, par linéarité,

$$u^{-1}(y_0, \dots, y_n) = \sum_{i=0}^n y_i \cdot u^{-1} \left( 0, \dots, \underbrace{1}_{i^e}, \dots, 0 \right).$$

On cherche donc le polynôme  $L_i = u^{-1} \left( 0, \dots, \underbrace{1}_{i^e}, \dots, 0 \right)$  tel que  $L_i(x_i) = 1$  et  $L_i(x_j) = 0$  si  $j \neq i$ ,

c'est-à-dire  $L_i(x_j) = \delta_{i,j}$ .

Alors les  $x_j$  pour  $j \neq i$  sont racines de  $L_i$ . Donc  $L_i = \prod_{j \neq i} (X - x_j) Q$ .

Comme  $\deg L_i = 1$ , alors  $Q$  est constant :  $Q = \lambda$  et  $L_i(x_i) = 1 = \prod_{j \neq i} (x_i - x_j)$ .

**Définition 7 : Polynômes de Lagrange**

Si  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x_0, \dots, x_n$  deux à deux distincts, on appelle  $i^e$  polynôme de Lagrange associé à  $(x_0, \dots, x_n)$  le polynôme

$$L_i = \frac{\prod_{j \neq i} (X - x_j)}{\prod_{j \neq i} (x_i - x_j)}.$$

**Propriété 10 : Polynôme d'interpolation de Lagrange**

Étant donné  $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{K}$  deux à deux distincts et  $y_0, \dots, y_n \in \mathbb{K}$ , il existe un unique polynôme  $P$  de degré au plus  $n$  tel que  $\forall i, P(x_i) = y_i$ .

Il s'agit de  $P = \sum_{i=0}^n y_i \cdot L_i$ .

Comme le problème est linéaire (en fait affine), on peut le résoudre sur  $\mathbb{K}[X]$  en passant par solution particulière et solution du problème homogène associé.

## 2 PGCD de deux polynômes

### Définition 8 : PGCD

Soient  $A, B \in \mathbb{K}[X]$  non tous les deux nuls.

### Remarque

**R 24** – La définition s'étend au cas où  $A = B = 0$  en posant  $A \wedge B = 0$  car  $(0) + (0) = (0)$  même si alors, on ne peut plus dire que  $A \wedge B$  est unitaire.

### Propriété 13 : Relation de Bézout

Si  $A, B \in \mathbb{K}[X]$ , on peut trouver  $U, V \in \mathbb{K}[X]$  tels que  $AU + BV = A \wedge B$ .

### Propriété 14 : Caractérisation du PGCD

Soit  $(A, B) \neq (0, 0)$ .

$$D = A \wedge B \iff \begin{cases} D \text{ est unitaire} \\ D|A \text{ et } D|B \\ \forall C \in \mathbb{K}[X], (C|A \text{ et } C|B) \implies C|D \end{cases}$$

Il s'agit donc du plus grand diviseur unitaire au sens de la division.

### Propriété 11

Les polynômes d'interpolation associés aux points  $((x_0, y_0), \dots, (x_n, y_n))$  sont les polynômes  $P + \left( \prod_{i=0}^n (X - x_i) \right) Q$  où  $Q \in \mathbb{K}[X]$  et  $P = \sum_{i=0}^n y_i L_i$ .

### Exercice 4 : CCINP 87, 90

## IV ARITHMÉTIQUE SUR $\mathbb{K}[X]$ (MPI)

Dans cette partie,  $\mathbb{K}$  désigne un sous-corps de  $\mathbb{C}$ , comme,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

### 1 L'anneau $\mathbb{K}[X]$

### Propriété 12 : Description des polynômes associés

Si  $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ ,  $P$  et  $Q$  sont associés si et seulement s'il existe  $\lambda \in \mathbb{K}^*$  tel que  $P = \lambda Q$ .

### Théorème 3 : Division euclidienne polynomiale

Soient  $A, B \in \mathbb{K}[X]$  avec  $B \neq 0$ . Alors il existe un unique couple  $(Q, R) \in \mathbb{K}[X]$  tel que  $A = BQ + R$  et  $\deg R < \deg B$ .

### Remarque : Algorithme

**R 23** – C'est celui que l'on utilise en posant la division. On s'intéresse au terme de plus haut degré dans  $A$  que l'on compense en multipliant  $B$  par un monôme, et on recommence en soustrayant.

### Théorème 4 : $\mathbb{K}[X]$ est principal

L'anneau  $\mathbb{K}[X]$  est principal.  
En particulier, tout idéal de  $\mathbb{K}[X]$  s'écrit sous la forme  $P\mathbb{K}[X]$  avec  $P \in \mathbb{K}[X]$ . Si l'idéal est non nul, on peut choisir  $P$  de manière unique en le supposant unitaire.

**Remarque**

R 25 – Les diviseurs de  $D$  sont alors exactement les diviseurs communs à  $A$  et à  $B$ .

R 26 – Les racines des pgcd sont exactement les racines communes de  $A$  et  $B$ , de multiplicité le minimum des multiplicités.

**Définition 9 : Polynômes premiers entre eux**

$A, B \in \mathbb{K}[X]$  sont dits **premiers entre eux** lorsque  $A \wedge B = 1$ , c'est-à-dire lorsque les seuls diviseurs communs sont les polynômes constants non nuls.

**Remarque**

R 27 – Lorsque c'est le cas, ils n'ont pas de racine commune dans  $\mathbb{K}$ . La réciproque est fausse.

**Théorème 5 : de Bézout**

Soit  $A, B \in \mathbb{K}[X]$ .

$$A \wedge B = 1 \iff \exists U, V \in \mathbb{K}[X], AU + BV = 1$$

**Corollaire 7**

Soient  $A, B, C \in \mathbb{K}[X]$ .

(i)  $A \wedge BC = 1 \iff A \wedge B = A \wedge C = 1$

(ii) Si  $D = A \wedge B$ , on a  $A_1, B_1 \in \mathbb{K}[X]$  tels que  $A = DA_1, B = DB_1$  et  $A_1 \wedge B_1 = 1$ .

**Remarque**

R 28 – (i) s'étend à un produit quelconque (fini) de polynômes.

**Théorème 6 : Lemme de Gauß**

Soient  $A, B, C \in \mathbb{K}[X]$ .

Si  $A|BC$  et  $A \wedge B = 1$ , alors  $A|C$ .

**Propriété 15 : Cas des polynômes scindés**

Si  $A$  ou  $B$  est **scindé**,  $A \wedge B = 1 \iff A$  et  $B$  n'ont pas de racine commune.

**Remarque**

R 29 – C'est toujours vrai si  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ .



Voir exercice du TD : 21, 22

**3****PGCD d'une famille finie de polynômes**

Soit  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ .

**Définition 10 : pgcd de  $n$  polynômes**

Soient  $(A_1, \dots, A_n) \in (\mathbb{K}[X])^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ .

**Remarque**

R 30 – Comme pour deux polynômes, il s'agit du plus grand diviseur commun unitaire au sens de la division (et aussi du degré).

R 31 – La définition s'étend à  $0 \wedge \dots \wedge 0 = 0$ .



**Propriété 16**

(i) **Associativité** :  $A \wedge B \wedge C = (A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$ .

(ii) Les diviseurs communs à  $A_1, \dots, A_n$  sont exactement les diviseurs de  $\bigwedge_{k=1}^n A_k$ .

(iii) **Relation de Bézout** : On a  $U_1, \dots, U_n \in \mathbb{K}[X]$  tels que  $A_1 U_1 + \dots + A_n U_n = \bigwedge_{k=1}^n A_k$ .

**Définition 11 : Polynômes premiers entre eux dans leur ensemble**

$A_1, \dots, A_n$  sont dits **premiers entre eux dans leur ensemble** lorsque  $\bigwedge_{k=1}^n A_k = 1$ , c'est-à-dire que le seul diviseur unitaire commun à tous les  $A_k$  est 1.  
 $A_1, \dots, A_n$  sont dits **premiers entre eux deux à deux** lorsque  $\forall i \neq j, A_i \wedge A_j = 1$ .

**Propriété 17**

*Premiers entre eux deux à deux  $\implies$  premiers entre eux dans leur ensemble, mais la réciproque est fautive pour plus de deux polynômes.*

**Théorème 7 : de Bézout**

$A_1, \dots, A_n$  sont premiers entre eux dans leur ensemble si et seulement si on a  $U_1, \dots, U_n$  tels que  $A_1 U_1 + \dots + A_n U_n = 1$ .

**Propriété 18 : Diviseurs deux à deux premiers entre eux**

Si  $A_1, \dots, A_n$  sont premiers entre eux deux à deux et divisent  $B$ , alors  $A_1 \cdots A_n | B$ .

**Remarque : Application**

R 32 – Si  $x_1, \dots, x_n$  sont racines de  $P$  d'ordre au moins  $m_1, \dots, m_n$  alors  $(X - x_1)^{m_1} \cdots (X - x_n)^{m_n} | P$  car les  $(X - x_i)^{m_i}$  sont premiers entre eux deux à deux (scindés sans racine commune).

**4 Polynômes irréductibles**

**Définition 12 : Polynôme irréductible**

On appelle **polynôme irréductible** tout polynôme  $P \in \mathbb{K}[X]$  **non constant** dont les seuls diviseurs sont les  $\lambda$  et  $\lambda P$  pour  $\lambda \in \mathbb{K}^*$ , c'est-à-dire tels que  $P = UV \implies U$  ou  $V$  inversible.

Les autres polynômes sont dits **réductibles**.

**Remarque**

R 33 – Si  $P$  est irréductible dans  $\mathbb{K}$  et  $\deg P \geq 2$ ,  $P$  n'a pas de racine dans  $\mathbb{K}$ . La réciproque est fautive.

R 34 –  $P$  est réductible dans  $\mathbb{K}[X]$  ss'il admet un diviseur  $Q$  tel que  $0 < \deg Q < \deg P$ .

**Propriété 19 : des polynômes irréductibles**

Soit  $P$  un polynôme irréductible, et  $A, A_1, \dots, A_n \in \mathbb{K}[X]$ .

(i) Soit  $P | A$ , soit  $P \wedge A = 1$ .

(ii)  $P | A_1 \cdots A_n \iff \exists i$  tel que  $P | A_i$ .

**Théorème 8 : Décomposition en produit d'irréductibles**

Tout  $A \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$  s'écrit de manière unique à l'ordre des facteurs près sous la forme

$$A = \lambda P_1^{\alpha_1} \cdots P_k^{\alpha_k}$$

où  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\lambda \in \mathbb{K}^*$ ,  $P_1, \dots, P_k$  irréductibles deux à deux distincts unitaires,  $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{N}^*$ . Alors  $\lambda = \text{cd } A$ ,  $P_1, \dots, P_k$  sont les diviseurs irréductibles unitaires de  $A$ .

**Remarque**

R 35 – On dit que l'anneau  $\mathbb{K}[X]$  est factoriel.

**Propriété 20 : Irréductibles de  $\mathbb{C}[X]$** 

Les irréductibles de  $\mathbb{C}[X]$  sont les polynômes de degré 1.

**5 Irréductibles sur  $\mathbb{R}[X]$** **Propriété 21 : Racine complexe de polynôme réel**

Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$ . alors si  $\alpha \in \mathbb{C}$  est racine de  $P$ ,  $\bar{\alpha}$  l'est aussi, de même ordre.

**Propriété 22 : Irréductibles de  $\mathbb{R}[X]$** 

Les polynômes irréductibles de  $\mathbb{R}[X]$  sont les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 sans racine réelle (à discriminant strictement négatif).

**Remarque**

**R 36** – La décomposition en irréductibles dans  $\mathbb{C}$  redonne le fait que tout polynôme à coefficient complexe est constant ou scindé. Elle est de la forme

$$P = \lambda(X - x_1)^{m_1} \cdots (X - x_n)^{m_n}.$$

**R 37** – Les décompositions en irréductibles dans  $\mathbb{R}[X]$  sont donc de la forme

$$P = \lambda(X - x_1)^{m_1} \cdots (X - x_n)^{m_n} (X^2 + a_1X + b_1)^{\ell_1} \cdots (X^2 + a_kX + b_k)^{\ell_k}$$

avec pour tout  $i$ ,  $\Delta_k = a_k^2 - 4b_k < 0$ .

**R 38** – Pour décomposer en irréductibles dans  $\mathbb{R}[X]$ , on peut décomposer dans  $\mathbb{C}[X]$  puis rassembler les  $X - \alpha$  et  $X - \bar{\alpha}$  si  $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ .

**Exemple**

**E 4** – Décomposition en irréductibles de  $X^n - 1$ .

**E 5** – Décomposition en irréductibles de  $X^4 + 1$ .

**Propriété 23 : Expression du PGCD en produit d'irréductibles**

Si  $A = \lambda P_1^{\alpha_1} \cdots P_k^{\alpha_k}$  et  $B = \mu P_1^{\beta_1} \cdots P_k^{\beta_k}$  décompositions en irréductibles (avec exposants éventuellement nuls), alors

$$A \wedge B = P_1^{\min(\alpha_1, \beta_1)} \cdots P_k^{\min(\alpha_k, \beta_k)}.$$



Voir exercice du TD : 19

**6 PPCM (Complément)****Définition 13 : PPCM****Propriété 24 : du PPCM**

- (i) Il s'agit du plus petit multiple unitaire commun à  $A$  et à  $B$  au sens de la division.
- (ii) Si  $A = \lambda P_1^{\alpha_1} \cdots P_k^{\alpha_k}$  et  $B = \mu P_1^{\beta_1} \cdots P_k^{\beta_k}$  décompositions en irréductibles (avec exposant éventuellement nuls), alors  $A \vee B = P_1^{\max(\alpha_1, \beta_1)} \cdots P_k^{\max(\alpha_k, \beta_k)}$ .
- (iii) On a toujours que  $AB$  et  $(A \wedge B)(A \vee B)$  sont associés (donc égaux à normalisation près).

**DÉCOMPOSITION EN ÉLÉMENTS SIMPLES****1 Partie entière****Définition – Propriété 1 : Partie entière**

Soit  $F \in \mathbb{K}(X)$ .

On note  $\mathbb{K}^-(X) = \{F \in \mathbb{K}(X) \mid \deg F < 0\}$ .

Il existe un unique couple  $(Q, G) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}^-(X)$  tel que  $F = Q + G$ .  $Q$  est appelé **partie entière** de  $F$ .

**Remarque**

- R 39 – La partie entière est le quotient de la division euclidienne du numérateur par la dénominateur.
- R 40 – C’est l’analogue de la partie entière sur  $\mathbb{Q}$ .
- R 41 – Si  $\deg F < 0$ , alors sa partie entière est nulle.
- R 42 – Si  $F \in \mathbb{K}[X]$ , sa partie entière est  $F$  elle-même.
- R 43 –  $\mathbb{K}[X]$  et  $\mathbb{K}^-(X)$  sont supplémentaires dans  $\mathbb{K}(X)$ .

**2 Décomposition en éléments simples dans  $\mathbb{C}(X)$**

**Théorème 9 : Décomposition en éléments simples dans  $\mathbb{C}(X)$**

Soit  $F \in \mathbb{C}(X)$ ,  $F = \frac{A}{B}$  sous forme irréductible,  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  pôles de  $F$  d'ordre  $m_1, \dots, m_n$  :

$$F = \frac{A}{\prod_{k=1}^n (X - \alpha_k)^{m_k}}$$

et  $Q \in \mathbb{C}[X]$  la partie entière de  $F$ .

Alors il existe une unique famille  $(\lambda_{k,j})_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq j \leq m_k}}$  de complexes telle que

$$F = \underbrace{Q}_{\text{partie entière}} + \underbrace{\frac{\lambda_{1,1}}{X - \alpha_1} + \dots + \frac{\lambda_{1,m_1}}{(X - \alpha_1)^{m_1}}}_{\text{partie polaire associée à } \alpha_1} + \dots + \underbrace{\frac{\lambda_{n,1}}{X - \alpha_n} + \dots + \frac{\lambda_{n,m_n}}{(X - \alpha_n)^{m_n}}}_{\text{partie polaire associée à } \alpha_n}$$

**Remarque**

R 44 – Les  $(\frac{1}{(X - a)^n})_{(a,n) \in \mathbb{C} \times \mathbb{N}^*}$  est une base de  $\mathbb{C}^-(X)$ .

**Propriété 25 : Partie polaire relative à un pôle simple**

Si  $\alpha$  pôle simple de  $F = \frac{A}{B}$  sous forme irréductible,  $\frac{\lambda}{X - \alpha}$  avec  $\lambda \in \mathbb{C}$  la partie polaire associée à  $\alpha$ . Alors  $F = \frac{A}{(X - \alpha)B_1}$  avec  $B_1(\alpha) \neq 0$  et

$$\lambda = [\widetilde{(X - \alpha)F}](\alpha) = \frac{A(\alpha)}{B_1(\alpha)} =$$

**Exemple : Le « cache »**

E 6 –  $F = \frac{1}{(X - 1)(X + 2)}$

**Exemple : Très classique**

E 7 –  $F = \frac{1}{X^n - 1}$

**Propriété 26 : Partie polaire relative à un pôle d'ordre  $\geq 2$**

Si  $\alpha$  pôle d'ordre  $m \geq 2$  de  $F = \frac{A}{B}$  sous forme irréductible,

$$F = \frac{A}{B} = \frac{A}{(X - \alpha)^m B_1} = \frac{\lambda_1}{X - \alpha} + \dots + \frac{\lambda_m}{(X - \alpha)^m} + G$$

où  $B_1(\alpha) \neq 0$  et  $\alpha$  n'est pas pôle de  $G$ .

Alors  $\lambda_m = [(\widetilde{(X - \alpha)^m F})](\alpha) = \frac{A(\alpha)}{B_1(\alpha)}$  et  $F - \frac{\lambda_m}{(X - \alpha)^m}$  admet  $\alpha$  comme pôle d'ordre au plus  $m - 1$  ce qui permet de réitérer le processus.



**Méthode 1**

Les deux propriétés précédentes permettent de trouver les coefficients de la décomposition.

Lorsqu'il reste peu de coefficients à calculer, on peut aussi essayer d'évaluer la fraction rationnelle en des points bien choisis ou utiliser des méthodes d'analyse réelle (limite en  $\infty$  de  $x^m F(x) \dots$ )

Penser à exploiter la parité avec l'unicité des coefficients !

**Exemple**

E 8 –  $F = \frac{2X + 1}{X^3 - 2X^2 + X}$

**Exemple**

E 9 –  $F = \frac{X}{(X^2 - 1)^2}$



Voir exercice du TD : 23, 24, 25, 26, 27



### 3 Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$

#### Théorème 10 : Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$

Soit  $F \in \mathbb{R}(X)$ ,  $F = \frac{A}{B}$  sous forme irréductible, avec la décomposition de  $B$  en facteurs irréductibles dans  $\mathbb{R}$  :  $F = \frac{A}{\prod_{k=1}^p (X - x_k)^{m_k} \prod_{i=1}^r (X^2 + p_i X + q_i)^{n_i}}$  et  $Q \in \mathbb{R}[X]$  la partie entière de  $F$ .

Alors il existe d'unique familles  $(\lambda_{k,j})_{\substack{1 \leq k \leq p \\ 1 \leq j \leq m_k}}$ ,  $(\mu_{i,\ell})_{\substack{1 \leq i \leq r \\ 1 \leq \ell \leq n_i}}$  et  $(v_{i,\ell})_{\substack{1 \leq i \leq r \\ 1 \leq \ell \leq n_i}}$  de réels tels que

$$F = \underbrace{Q}_{\text{partie entière}} + \underbrace{\sum_{k=1}^p \sum_{j=1}^{m_k} \frac{\lambda_{k,j}}{(X - x_k)^j}}_{\text{partie polaire associée à } x_k} + \underbrace{\sum_{i=1}^r \sum_{\ell=1}^{n_i} \frac{\mu_{i,\ell} X + v_{i,\ell}}{(X^2 + p_i X + q_i)^\ell}}_{\text{partie polaire associée à } X^2 + p_i X + q_i}.$$



#### Méthode 2

Les méthodes vues dans  $\mathbb{C}$  s'appliquent pour les pôles réels. Pour les  $\mu$  et  $v$ , on peut appliquer la méthode « du cache » en  $a$  racine complexe de  $X^2 + pX + q$ .

On peut aussi décomposer dans  $\mathbb{C}$  et rassembler les pôles complexes non réels et leur conjugué. L'écriture  $F = \bar{F}$  et l'unicité des coefficients donne des relations entre ceux-ci (comme avec la parité).

#### Remarque

R 45 – Les  $\frac{1}{(X-a)^n}$  pour  $a \in \mathbb{R}$  et  $n \in \mathbb{N}^*$  et les  $\frac{1}{(X^2+pX+q)^n}$  et  $\frac{X}{(X^2+pX+q)^n}$  pour  $p, q \in \mathbb{R}$  tels que  $p^2 < 4q$  et  $n \in \mathbb{N}^*$  forment une base de  $\mathbb{R}^-(X)$ .

#### Exemple

$$\text{E 10} - F = \frac{X^3 - 1}{X^3 + X}$$

$$\text{E 11} - F = \frac{X^3}{(X-1)^3(X+2)}$$

$$\text{E 12} - F = \frac{2X^2}{(X^2+1)^3}$$

### 4 Décomposition en éléments simples de $P'/P$

#### Propriété 27 : Décomposition en éléments simples de $P'/P$

Soit  $P \in \mathbb{K}[X]$  **scindé**,  $P = \lambda \prod_{k=1}^p (X - x_k)^{m_k}$ . Alors la décomposition en éléments simples de  $\frac{P'}{P}$  est donnée par

Variante : si  $P = \lambda \prod_{k=1}^n (X - y_k)$  où les  $y_k$  sont les racines **comptées avec multiplicité**, alors

#### Remarque

R 46 – En considérant les ordres, on voit facilement que  $\frac{P'}{P}$  n'a que des pôles simples.

#### Exemple

$$\text{E 13} - \sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \frac{1}{2 - \omega} = ?$$



Voir exercice du TD : 28