1

Savoir-faire et thèmes classiques – Algèbre linéaire – MP2I

Savoir-faire

- ☐ Connaître les espaces vectoriels classiques
- ☐ Montrer qu'une famille finie ou non est libre ou liée, avec de multiples méthodes (définition, résolution de système, raisonnements par l'absurde, par récurrence, arguments de dimension, utilisation de sommes directes, polynômes non nuls à degrés étagés, déterminant, famille orthogonale de vecteurs non nuls, famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes, sous ou sur-famille d'une famille libre ou liée, etc.)
- ☐ Utiliser la caractérisation d'un sous-espace, reconnaître un espace vectoriel en tant que produit cartésien, un sous-espace en tant qu'intersection ou somme de sous-espaces, le sous-espace engendré par une partie (Vect), image directe ou réciproque d'un sous-espace par une application linéaire (par exemple son noyau ou son image)
- ☐ Passer de famille génératrice à système d'équations et réciproquement
- ☐ Connaître les bases canoniques de $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}[X]$, $\mathbb{K}_n[X]$, $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$
- ☐ Définir une somme, une somme directe, des sous-espaces supplémentaire
- ☐ Montrer qu'une somme est directe, que deux ou plus sous-espaces sont supplémentaires par plusieurs méthodes (analyse-synthèse, caractérisation avec l'intersection pour deux sev, avec l'unique écriture de 0_E pour plus, utiliser les dimension, obtenir une base adaptée à la décomposition, utiliser une symétrie ou une projection, reconnaître des sous-espaces propres, reconnaître des sous-espaces orthogonaux, etc.)
- ☐ Utiliser les théorèmes des bases extraites et incomplètes
- ☐ Calculer la dimension d'un produit cartésien, d'une somme (formule de Grassmann), de $\mathscr{L}(E,F)$
- ☐ Calculer le rang d'une famille de vecteur (par exemple avec un pivot de Gauß)
- ☐ Définir et manipuler les applications linéaires, leurs image et noyau
- ☐ Caractériser l'injectivité, la surjectivité, la bijectivité d'une application linéaire en utilisant éventuellement un argument de dimension, ou l'image d'une base
- ☐ Calculer le noyau et l'image d'une restriction d'application linéaire
- ☐ Calculer le rang d'une application linéaire
- ☐ Manipuler des polynômes en un endomorphisme (savoir qu'ils commutent)
- ☐ Montrer une inversibilité à l'aide d'un polynôme annulateur
- ☐ Définir un projecteur et une symétrie, retrouver leurs propriétés sur un dessin, les caractériser, calculer leurs éléments caractéristiques. Savoir en particulier que l'image d'un projecteur est l'ensemble de ses vecteurs invariants, et que sa trace est égale à son rang.
- ☐ Savoir qu'une application linéaire est uniquement déterminée par l'image des vecteurs d'une base de l'espace de départ.
- ☐ Traduire le problème d'interpolation de Lagrange par un isomorphisme
- ☐ Savoir que lorsque la dimension finie est la même ou départ et à l'arrivée, l'inversibilité à gauche équivaut à l'inversibilité à droite
- ☐ Connaître le théorème de rang dans son intégralité (y compris la première partie géométrique)
- ☐ Définir et caractériser les hyperplans (noyau d'une forme linéaire non nulle, supplémentaire d'une ou de toute droite non incluse, dimension)
- ☐ Résoudre un système linéaire avec la méthode du pivot de Gauß

- Connaître la structure de sous-espace affine de l'ensemble des solution d'un système affine, la définition de son rang, savoir ce qu'est un système de Cramer
- Énoncer la formule du cœfficient d'un produit de matrices, effectuer un produit par blocs
- Donner une formule pour les cœfficients d'une matrice élémentaire, pour un produit de deux matrices élémentaires
- Transposer une matrice, utiliser les propriétés de la transposition
- Caractériser l'inversibilité d'une matrice carrée
- Calculer l'inverse d'une matrice (résolution de système, méthode du pivot de Gauß, formule de la comatrice, en reconnaissant une matrice de passage)
- Définir des matrices triangulaires, diagonales, scalaires, symétriques, antisymétriques, connaître la structure de ces ensembles de matrices, la supplémentarité de $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$
- Connaître la définition et les propriétés de la trace d'une matrice carrée
- Calculer les puissances d'une matrice carrée par récurrence, par application du binôme, en utilisant un polynôme annulateur, en diagonalisant ou trigonalisant
- Passer d'une application linéaire à une de ses représentations matricielles et réciproquement, utiliser l'application linéaire canoniquement associée à une matrice, traduire matriciellement une composée, un évaluation d'application linéaire
- Calculer le rang, l'image, le noyau d'une matrice (pour ce dernier : avec une résolution de système ou en utilisant le rang est des combinaisons linéaires nulles de colonnes)
- Savoir que le rang est l'ordre maximal d'une matrice extraite inversible
- Écrire des matrices de passage, utiliser les formules de changement de bases pour un vecteur, une application linéaire, un endomorphisme
- Définir l'équivalence de matrices, connaître sa traduction géométrique, savoir que toute matrice de rang r est équivalente à J_r
- Définir la similitude de matrices, connaître sa traduction géométrique, connaître des invariants de similitude (trace, déterminant, polynôme caractéristique, spectre...)
- Connaître les opérations élémentaires, leurs notations, leur représentation matricielle, leur effet à gauche ou à droite sur le rang, l'image, le noyau

Thèmes Classiques

- Images et noyaux itérés
- Si pour tout x, $(x, u(x))$ est liée, alors u est une homothétie
- Inégalité triangulaire sur les rangs
- Description des formes linéaires sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$
- Centre de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, commutant d'une matrice diagonale à cœfficients diagonaux distincts deux à deux
- Théorème d'Hadamard : matrices à diagonales strictement dominantes
- Description des matrices de rang 1 et de leur trace
- Matrices de permutations