

Espaces vectoriels, applications linéaires, matrices

Dans tout le chapitre, \mathbb{K} désigne un sous-corps de \mathbb{C} .

STRUCTURE D'ESPACE VECTORIEL (MP2I)

1 Définition

Définition 1 : \mathbb{K} -espace vectoriel

Soit E un ensemble et \mathbb{K} un corps. On appelle **loi de composition externe** sur E toute application

$$\begin{array}{l} \mathbb{K} \times E \longrightarrow E \\ \vdots \\ (\lambda, x) \longmapsto \lambda \cdot x \end{array}$$

On appelle **espace vectoriel sur \mathbb{K}** ou **\mathbb{K} -espace vectoriel** tout triplet $(E, +, \cdot)$ tel que

- E est un ensemble, $+$ est une loi de composition interne sur E et \cdot est une loi de composition externe sur E .
- $(E, +)$ est un groupe abélien d'élément neutre noté 0_E ou 0_E .
- *Pseudo-distributivité à droite :*

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall x \in E, (\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x.$$

- *Pseudo-distributivité à gauche :*

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x, y \in E, \lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y.$$

- *Pseudo-associativité :*

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall x \in E, (\lambda \times \mu) \cdot x = \lambda \cdot (\mu \cdot x).$$

- *Pseudo-élément neutre :* $\forall x \in E, 1_{\mathbb{K}} \cdot x = x.$

Définition 2 : Famille presque nulle, combinaison linéaire

On appelle **famille presque nulle** de scalaire tout famille $(\lambda_i)_{i \in I}$ telle que $\lambda_i \neq 0$ pour un nombre fini de vecteurs seulement. On note $\mathbb{K}^{(I)}$ l'ensemble des familles de scalaires presque nulles.

Si x_1, \dots, x_n sont des vecteurs de E , on appelle **combinaison linéaire** de x_1, \dots, x_n , tout vecteur de la forme $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$ où $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$.

La définition s'étend aux familles infinies de

vecteurs en n'ayant qu'un nombre fini de scalaires non nuls : toute combinaison linéaire est nécessairement finie (d'où l'intérêt des familles presque nulles de scalaires).

Si $\mathcal{F} = (x_i)_{i \in I}$, les combinaisons linéaires d'éléments de \mathcal{F} sont les $\sum_{i \in I} \lambda_i x_i$ où $(\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^{(I)}$.

Propriété 1 : Produit cartésien de \mathbb{K} -espaces vectoriels

Si $(E, +, \cdot)$ et $(F, +, \cdot)$ sont des \mathbb{K} -espaces vectoriels alors $(E \times F, +, \cdot)$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel, avec les lois coordonnées à coordonnées : si $\lambda \in \mathbb{K}$ et $(x, y), (x', y') \in E \times F$,

$$(x, y) + (x', y') = \left(x + x', y + y' \right)$$

$$\lambda \cdot (x, y) = \left(\lambda \cdot x, \lambda \cdot y \right)$$

Propriété 2 : Fonctions à valeurs dans un \mathbb{K} -espace vectoriel

Si X est un ensemble non vide et $(F, +, \cdot)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel, alors $(F^X, +, \cdot)$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel avec les lois habituelles sur les fonctions.

Propriété 3 : Espaces vectoriels classiques

Sont des \mathbb{K} -espaces vectoriels :

- $(\mathbb{K}, +, \times),$
- $(\mathbb{K}^n, +, \cdot)$ pour tout $n \in \mathbb{N},$
- $(\mathbb{K}^{\mathbb{N}}, +, \cdot),$
- $(\mathbb{K}^D, +, \cdot)$ pour tout ensemble $D,$
- $(\mathbb{K}[X], +, \cdot),$
- $(\mathbb{K}(X), +, \cdot).$

$(\mathbb{C}, +, \times)$ est un \mathbb{R} -espace vectoriel, et, plus généralement, si \mathbb{K} est un sous-corps de \mathbb{L} , alors $(\mathbb{L}, +, \times)$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel.



2 Sous-espace vectoriel

Définition 3 : Sous-espace vectoriel

Soit $(E, +, \cdot)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel et F une partie de E .

On dit que $(F, +, \cdot)$ est un sous-espace vectoriel de E lorsque $(F, +|_F, \cdot|_{\mathbb{K} \times F})$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel.

Propriété 4 : Caractérisation de sous-espaces vectoriels

F est un sous-espace vectoriel de E

$$\Leftrightarrow \begin{cases} F \subset E \\ F \neq \emptyset \ (0_E \in F) \\ \forall x, y \in F, \ x + y \in F \\ \forall \lambda \in \mathbb{K}, \ \forall x \in F, \ \lambda x \in F \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} F \subset E \\ F \neq \emptyset \ (0_E \in F) \\ \forall \lambda \in \mathbb{K}, \ \forall x, y \in F, \ x + \lambda y \in F \\ (F \text{ stable par combin. linéaires}) \end{cases}$$

3 Intersection de sous-espaces vectoriels

Propriété 5 : Intersection de sev

Soit $(F_i)_{i \in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E . Alors $\bigcap_{i \in I} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E .

4 Sous-espaces vectoriel engendré par une partie

Définition 4 : Sous-espaces vectoriels engendré par une partie

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel, $A \subset E$.

On appelle **sous-espace vectoriel engendré** par A le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant A .

On le note $\text{Vect} A$ ou $\text{Vect}_{\mathbb{K}} A$.

Si $F = \text{Vect} A$, on dit que A **engendre** F ou que F est une **partie génératrice** de F .

Propriété 6 : Caractérisation d'un Vect

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel, $A \subset E$. $\text{Vect} A$ est l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de A :

$$\text{Vect} A = \{ \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n ; \\ n \in \mathbb{N}^*, x_1, \dots, x_n \in A, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K} \}.$$



Méthode 1 : Passer de famille génératrice à équations

On résout le système donné par le paramétrage traduisant le caractère générateur de la famille en égalant les coordonnées : il y a plus d'équations que d'inconnues.

Les premières servent à déterminer les paramètres du système, les autres formes des équations de notre sous-espace après élimination des paramètres.



Méthode 2 : Passer d'équations à famille génératrice

Pour passer d'un système d'équations décrivant un sous-espace vectoriel à une famille génératrice de celui-ci, on résout le système formé par les équations : certaines coordonnées vont alors s'exprimer en fonction d'autres qui vont devenir des paramètres et donner une famille génératrice.



Méthode 3 : Égalité de Vect

Pour montrer que $\text{Vect} A = \text{Vect} B$, on montre que

$$A \subset \text{Vect} B$$

puis que

$$B \subset \text{Vect} A.$$

5 Familles de vecteurs

Définition 5 : Familles liées, libres, génératrices, bases

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel, $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_n) \in E^n$.

- La famille \mathcal{F} est dite **liée** (ses vecteurs sont dit **linéairement dépendants**) lorsqu'il existe une combinaison linéaire non triviale de ses vecteurs égale au vecteur nul :

$$\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}, \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = 0_E$$

- La famille \mathcal{F} est dite **libre** (ses vecteurs sont dit **linéairement indépendants**) lorsqu'elle n'est pas liée, c'est-à-dire que toute combinaison linéaire de ses vecteurs égale au vecteur nul est triviale : $\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$,

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = 0_E \implies \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_i = 0.$$

- La famille \mathcal{F} est dite **génératrice** de E (ou **engendre** E) lorsque tout vecteur de E est combinaison linéaire de ces vecteurs :

$$\forall x \in E, \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$$

c'est-à-dire $E = \text{Vect } \mathcal{F}$.

- La famille \mathcal{F} est une **base** de E lorsqu'elle est libre et génératrice dans E .

Toutes ces définitions s'étendent aux familles infinies, les combinaisons linéaires restant toujours finies (les suites de coefficients $(\lambda_i)_i$ sont presque nulles).

Propriété 7 : Famille de polynômes à degrés étagés

Toute famille de polynômes **non nuls** et à **degrés étagés** (c'est-à-dire deux à deux distincts) est libre.



libre

Méthode 4 : Montrer qu'une famille est liée

- Pour montrer qu'une famille est liée, on cherche une combinaison linéaire nulle non triviale de ses vecteurs.
- Cela peut parfois se faire par exemple en résolvant un système linéaire.
- On raisonne fréquemment par l'absurde et/ou par récurrence.
- On peut aussi utiliser un argument de dimension (s'il y a plus de vecteurs que la dimension, la famille est liée).



libre

Méthode 5 : Montrer qu'une famille est libre

- Pour montrer qu'une famille est libre, on prend une combinaison linéaire nulle des vecteurs, et on montre qu'elle est triviale : tous les scalaires sont nuls.
- Il suffit aussi de concaténer des familles libres de vecteurs pris dans des sous-espaces en somme directe.

- Une famille de polynômes **non nuls** à degrés étagés est libre.
- On peut aussi, en dimension finie, utiliser un déterminant.
- Dans un espace préhilbertien, une famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.
- On verra dans le cours de réduction qu'une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est automatiquement libre.

Définition – Propriété 1 : Coordonnées

$\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E si et seulement si $\forall x \in E, \exists! (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n, x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$. Le triplet (x_1, \dots, x_n) est appelé **n -uplet des coordonnées** de x dans la base \mathcal{B} .

Cette définition s'étend au cas où \mathcal{B} est infinie, les famille des coordonnées étant presque nulles.

Définition – Propriété 2 : Bases canonique

On a appelle **bases canoniques** de $\mathbb{K}^n, \mathbb{K}[X], \mathbb{K}_n[X], \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ les familles

- $((0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0))_{1 \leq k \leq n}$,
 $\quad \quad \quad \uparrow$
 $\quad \quad \quad k^e$
- $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$,
- $(1, X, X^2, \dots, X^n)$,
- $(E_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$

Propriété 8 : Sur-famille et sous-famille

Toute sur-famille d'une famille liée ou génératrice l'est encore.

Toute sous-famille d'une famille libre l'est encore.

Propriété 9 : Complétion d'une famille libre

Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel, $n \in \mathbb{N}^*$, $x_1, \dots, x_n, y \in E$.

- (x_1, \dots, x_n, y) libre $\iff \begin{cases} (x_1, \dots, x_n) \text{ libre} \\ y \notin \text{Vect}(x_1, \dots, x_n) \end{cases}$
- (x_1, \dots, x_n) liée si et seulement s'il existe $i_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $x_{i_0} \in \text{Vect}((x_i)_{i \neq i_0})$.
Lorsque c'est le cas, on a alors

$$\text{Vect}(x_1, \dots, x_n) = \text{Vect}(x_i)_{i \neq i_0}.$$



6 Sommes de sous-espaces vectoriels (MPI)

Définition 6 : Sommes de sev

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel, F_1, \dots, F_n des sous-espaces vectoriels de E . On note

$$F_1 + \dots + F_n = \sum_{i=1}^n F_i = \{x_1 + \dots + x_n \mid \forall i, x_i \in F_i\}.$$

Ainsi,

$$x \in \sum_{i=1}^n F_i \iff \exists (x_1, \dots, x_n) \in F_1 \times \dots \times F_n, x = x_1 + \dots + x_n.$$

Propriété 10

- (i) Une somme de sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel.
 (ii) Si A_1, \dots, A_n sont des parties de E , alors

$$\text{Vect} \left(\bigcup_{k=1}^n A_k \right) = \sum_{k=1}^n \text{Vect } A_k.$$

7 Somme directe (MPI)

Définition 7 : Somme directe

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel, F_1, \dots, F_n des sous-espaces vectoriels de E .

On dit que F_1, \dots, F_n sont en **somme directe** lorsque pour tout $x \in F_1 + \dots + F_n$, l'écriture $x = x_1 + \dots + x_n$ où $\forall i, x_i \in F_i$ est unique.

On note alors

$$F_1 + \dots + F_n = F_1 \oplus \dots \oplus F_n = \bigoplus_{i=1}^n F_i.$$

Propriété 11 : Caractérisation

F_1, \dots, F_n sont en somme directe si et seulement si $\forall (x_1, \dots, x_n) \in F_1 \times \dots \times F_n$,

$$x_1 + \dots + x_n = 0_E \implies x_1 = \dots = x_n = 0_E.$$

Propriété 12 : Cas de deux sous-espaces

Deux sous-espaces F et G sont en somme directe si et seulement si $F \cap G = \{0_E\}$.

 Le résultat est faux pour plus de deux sous-espaces.

8 Sous-espaces supplémentaires (MPI)

Définition 8 : Sous-espaces supplémentaires

Soient F et G des sous-espaces vectoriels d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E .

F et G sont dits **supplémentaires** dans E si et seulement si $E = F \oplus G$ c'est-à-dire

$$\forall x \in E, \exists ! (x_F, x_G) \in F \times G, x = x_F + x_G.$$

Propriété 13

- (i) F et G sont supplémentaires dans E si et seulement si $F + G = E$ et $F \cap G = \{0_E\}$.
 (ii) Il n'y a pas unicité du supplémentaire en général.



Méthode 6 : Montrer que deux sous-espaces sont supplémentaires

- Raisonner par analyse-synthèse : si on a une décomposition $x = a + b$, alors... $a = \dots$ et $b = \dots$ (unicité sous réserve d'existence), et réciproquement de tels a et b conviennent (d'où l'existence).
- Montrer que $F \cap G = \{0_E\}$ (en général plus facile) et $F + G = E$ (en général moins facile).
- En dimension finie, utiliser des bases (une concaténation de bases de chaque sev donne une base de l'espace entier, dite adaptée à la décomposition $E = F \oplus G$) ou un argument de dimension $\dim F + \dim G = \dim E$ et, au choix, soit $F \cap G = \{0_E\}$, soit $F + G = E$: voir plus loin.
- Reconnaître les sous-espaces caractéristiques d'une symétrie ou d'une projection.
- Plus généralement, reconnaître les sous-espaces propres d'un endomorphisme diagonalisable (voir cours de réduction).
- Reconnaître, si F est de dimension finie dans un espace préhilbertien, une décomposition $F \oplus F^\perp = E$.

Définition 9 : Sous-espaces supplémentaires

Soient F_1, \dots, F_n des sous-espaces vectoriels de E .

On dit que F_1, \dots, F_n sont **supplémentaires dans** E lorsque $F_1 \oplus \dots \oplus F_n = E$ c'est-à-dire

$$\forall x \in E, \exists ! (x_1, \dots, x_n) \in F_1 \times \dots \times F_n, x = x_1 + \dots + x_n.$$

II DIMENSION FINIE (MP2I)

1 Espace de dimension finie

Définition 10 : Espace de dimension finie

Un \mathbb{K} -espace vectoriel est dit de **dimension finie** s'il possède une famille génératrice finie.
 Dans le cas contraire, il est dit de **dimension infinie**.

2 Dimension, bases extraites et incomplètes

Propriété 14 : Existence de bases et leur taille

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie, $E \neq \{0_E\}$.

- E possède des bases.
- Toutes les bases de E ont même nombre d'éléments.

Définition 11 : Dimension

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie.
 Si $E = \{0_E\}$, on pose $\dim E = 0$.
 Sinon, on note $\dim E$ (ou $\dim_{\mathbb{K}} E$) le nombre de vecteurs de toute base de E .

Propriété 15 : Taille des familles libres ou génératrices

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie n . Toute famille génératrice de E possède au moins n vecteurs, toute famille libre de E possède au plus n vecteurs.

Corollaire 1

Toute famille d'au moins $n + 1$ vecteurs en dimension n est liée.

Théorème 1 : Caractérisation des bases

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie $n \neq 0$, \mathcal{B} une famille finie de vecteurs de E .
 \mathcal{B} est une base de E si et seulement si elle contient $n = \dim E$ vecteur et elle est libre **ou** génératrice.

Théorème 2 : de la base extraite

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie, $E \neq \{0_E\}$. De toute famille génératrice de E , on peut extraire une base de E .

Théorème 3 : de la base incomplète

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie $n \neq 0$. On peut compléter toute famille libre de vecteurs de E en une base de E .
 De plus, les vecteurs pour compléter peuvent être choisis dans n'importe quelle famille génératrice de E .

Corollaire 2

Si E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie $n \neq 0$, \mathcal{G} une famille génératrice de E et \mathcal{L} une sous-famille libre de \mathcal{G} .
 Alors on peut trouver une base \mathcal{B} de E telle que \mathcal{L} soit une sous-famille de \mathcal{B} et \mathcal{B} soit une sous-famille \mathcal{G} .

3 Dimension d'un produit d'espaces vectoriels

Propriété 16 : Base et dimension d'un produit cartésien

Si E_1, \dots, E_n sont des espaces de dimension finie, $E_1 \times \dots \times E_n$ l'est encore et

$$\dim E_1 \times \dots \times E_n = \dim E_1 + \dots + \dim E_n.$$

Si E est de dimension finie, E^n l'est encore et $\dim E^n = n \dim E$.

4 Dimension des sous-espaces

Propriété 17 : dimension des sous-espaces

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie, F un sous-espace de E .
 Alors F est de dimension finie et $\dim F \leq \dim E$ avec égalité si et seulement si $F = E$.
 L'entier $\dim E - \dim F$ est appelé **codimension** de F dans E .

Définition 12 : Droites, plans

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie n .
 Un sous-espace de dimension 1 est une **droite vectorielle** de E , un sous-espace de dimension 2 est un **plan vectoriel** de E .



5 Rang d'une famille de vecteurs

Définition 13 : Rang d'une famille de vecteurs

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel, \mathcal{F} une famille d'éléments de E .

On appelle **rang** de \mathcal{F} l'entier $\text{rg } \mathcal{F} = \dim(\text{Vect } \mathcal{F})$.

Propriété 18 : Rang d'une sous-famille, caractérisation des familles libres

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel, \mathcal{F} une famille d'éléments de E .

- (i) Si \mathcal{F}' est une sous-famille de \mathcal{F} , $\text{rg } \mathcal{F}' \leq \text{rg } \mathcal{F}$.
- (ii) Si \mathcal{F} est finie, \mathcal{F} est libre si et seulement si elle contient $\text{rg } \mathcal{F}$ vecteurs.

6 Somme directe et supplémentaire (MPI)

Propriété 19 : Caractérisation de la supplémentarité avec des bases

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel, F_1, \dots, F_n des sous-espaces de dimension finie, \mathcal{B}_{F_i} une base de F_i , \mathcal{C} la famille obtenue en mettant bout à bout les \mathcal{B}_{F_i} (concaténation).

On a toujours que \mathcal{C} engendre $H = F_1 + \dots + F_n$, et, de plus,

les F_i sont en somme directe si et seulement si \mathcal{C} est libre donc une base de H .

On dit alors que la base \mathcal{C} de H est adaptée à la décomposition $H = F_1 \oplus \dots \oplus F_n$.

On a alors $\dim(F_1 \oplus \dots \oplus F_n) = \sum_{i=1}^n \dim F_i$.

Corollaire 3 : dimension d'une somme

Soient F_1, \dots, F_n des sous-espaces vectoriels de E de dimension finie, alors $\sum_{i=1}^n F_i$ est de dimension finie et $\dim\left(\sum_{i=1}^n F_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \dim F_i$ avec égalité si et seulement si la somme est directe.

Corollaire 4 : Sous-espaces supplémentaires en dimension finie

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie, F_1, \dots, F_n des sous-espaces de E .

F_1, \dots, F_n sont supplémentaires dans E (ie $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_n$) si et seulement si deux des trois propriétés suivantes sont vraies :

1. $E = F_1 + \dots + F_n$.
2. La somme est directe.
3. $\dim E = \sum_{i=1}^n \dim F_i$.

Corollaire 5 : Existence et dimension des supplémentaires

Tout sous-espaces vectoriel F d'un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie E admet un supplémentaire dans E .

De plus, si $p = \dim F$ et $n = \dim E$, tout supplémentaire de F est de codimension p , c'est-à-dire de dimension $n - p$.

7 Formule de Grassmann

Propriété 20 : Formule de Grassmann

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et F, G des sous-espaces de dimension finie.

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G).$$



APPLICATIONS LINÉAIRES (MP2I)

LINÉAIRES

1 Généralités

□ Définition

Définition 14 : Application linéaire

Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels et $u: E \rightarrow F$.

On dit que u est une **application linéaire** lorsque

$$\begin{cases} \forall x, y \in E, & u(x + y) = u(x) + u(y) \\ \forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, & u(\lambda x) = \lambda u(x) \end{cases}$$

ce qui s'écrit aussi

$$\forall x, y \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad u(x + \lambda y) = u(x) + \lambda u(y).$$

On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E vers F .

- Si u est bijective, on parle d'**isomorphisme** (d'espaces vectoriels).
- Si $E = F$, on parle d'**endomorphisme** et on note $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E, E)$.
- Si $E = F$ et u est bijective, on parle d'**automorphisme**.
- Si $u \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$, on dit que f est une **forme linéaire**.
- On note $\mathcal{L}(E, \mathbb{K}) = E^*$ appelé **dual** de E l'ensemble des formes linéaires sur E .

b Propriétés

Propriété 21

Soient E, F, G trois \mathbb{K} -espaces vectoriels et $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

- (i) $u(0_E) = 0_F$
- (ii) $\forall x_1, \dots, x_n \in E, \forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K},$

$$u\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i u(x_i).$$
- (iii) Si A est une partie de $E, u(\text{Vect } A) = \text{Vect}(u(A)).$
- (iv) Si E' est un sous-espace vectoriel de $E, u|_{E'} \in \mathcal{L}(E', F)$ (u induit une application linéaire sur E').
- (v) Si u est bijective (isomorphisme) alors $u^{-1} \in \mathcal{L}(F, E).$
- (vi) $(\mathcal{L}(E, F), +, \cdot)$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel.
- (vii) Si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G), v \circ u \in \mathcal{L}(E, G).$
- (viii) Si E' est un sous-espace vectoriel de E et F' est un sous-espace vectoriel de $F, u(E')$ est un sous-espace vectoriel de F et $u^{-1}(F')$ est un sous-espace vectoriel de $E.$

c Noyau et image

Définition 15 : Noyau et image

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F).$

- Le **noyau** de u est

$$\text{Ker } u = u^{-1}(\{0_F\}) = \{x \in E \mid u(x) = 0_F\} \in \mathcal{P}(E).$$
- L'**image** de u est

$$\text{Im } u = u(E) = \{u(x) \mid x \in E\} \in \mathcal{P}(F).$$

Propriété 22

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F).$

- (i) $\text{Im } u$ et $\text{Ker } u$ sont des sous-espaces vectoriels de F et E respectivement.
- (ii) u est injective si et seulement si $\text{Ker } u = \{0_E\}.$
- (iii) u est surjective si et seulement si $\text{Im } u = F.$
- (iv) Si E' est un sous-espace vectoriel de $E,$ alors $\text{Ker}(u|_{E'}) = E' \cap \text{Ker } u$ et $\text{Im}(u|_{E'}) = u(E').$

d Rang

Propriété 23

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ avec E ou F de dimension finie.
 Alors $\text{Im } u$ est de dimension finie au plus $\min(\dim E, \dim F).$

Définition 16 : Rang

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F), E$ ou F de dimension finie.
 On appelle **rang** de u l'entier $\text{rg } u = \dim(\text{Im } u).$
 Si \mathcal{B} est une base de $E,$ alors $\text{rg } u = \text{rg}(u(\mathcal{B})).$

Propriété 24 : Effet sur le rang de la composition par un isomorphisme

On ne change pas le rang en composant à gauche ou à droite par un isomorphisme.

2 Endomorphismes

a Structure d'algèbre

Propriété 25

$(\mathcal{L}(E), +, \circ, \cdot)$ est une \mathbb{K} -algèbre non commutative et non intègre si $\dim E \geq 2.$

Notation 1

Si $u, v \in \mathcal{L}(E),$ on note $uv = u \circ v, u^n = \underbrace{u \circ \dots \circ u}_{n \text{ fois}}$
 pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $u^0 = \text{id}_E.$

Définition 17 : Polynôme en un endomorphisme

Si $P = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n \in \mathbb{K}[X],$ on peut définir $P(u) = a_0 \text{id}_E + a_1 u + \dots + a_n u^n.$
 Lorsque $P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)},$ on dit que P est un **polynôme annulateur** de $u.$



Propriété 26

Si $u \in \mathcal{L}(E)$, l'application $(\mathbb{K}[X], +, \times, \cdot) \rightarrow (\mathcal{L}(E), +, \circ, \cdot)$ est un morphisme de \mathbb{K} -algèbres.

$P \mapsto P(u)$

⚠ En particulier, $(P \times Q)(u) = P(u) \circ Q(u)$.

Propriété 27 : Binôme

Si $u, v \in \mathcal{L}(E)$ tels que $u \circ v = v \circ u$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(u + v)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u^k v^{n-k}.$$

b Groupe linéaire

Définition 18 : Groupe linéaire

L'ensemble des automorphismes de E est noté $\mathcal{GL}(E)$ appelé **groupe linéaire de E** .

Propriété 28 : Structure

$(\mathcal{GL}(E), \circ)$ est un groupe.

Méthode 7 : Montrer l'inversibilité et trouver l'inverse avec un polynôme annulateur

Lorsque l'on a un polynôme P annulateur de u ayant un coefficient constant, on isole le terme id_E dans un membre et on factorise par u dans l'autre : on obtient alors $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u \circ v = v \circ u = \text{id}_E$ ce qui donne l'inversibilité, et l'expression de l'inverse sous forme de polynôme en u .

c Projecteurs

Définition 19 : Projection

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel, et F, G deux sous-espaces supplémentaires : $F \oplus G = E$.

Tout vecteur x de E se décompose de manière unique sous la forme $x = x_F + x_G$ où $x_F \in F$ et $x_G \in G$.

On appelle **projection (ou projecteur) sur F parallèlement à G** l'application

$$p: \begin{cases} E & \rightarrow & E \\ x & \mapsto & x_F \end{cases}$$

On définit de même la projection q sur G parallèlement à F .

On dit que les projections p et q sont **associées**.

Propriété 29

Avec les notations ci-dessus :

- $p, q \in \mathcal{L}(E)$
- $p + q = \text{id}_E$
- $p \circ q = q \circ p = 0_{\mathcal{L}(E)}$

Propriété 30 : Caractérisation

p est une projection (vectorielle) sur E si et seulement si $p \in \mathcal{L}(E)$ et $p^2 = p \circ p = p$.

Dans ce cas,

- (i) $\text{Im } p \oplus \text{Ker } p = E$
- (ii) p est la projection sur $F = \text{Im } p = \text{Inv } p = \text{Ker}(p - \text{id}_E)$ parallèlement à $G = \text{Ker } p$.



Méthode 8 : Étude d'une projection

- Reconnaître et étudier une projection, c'est
- vérifier que $p \in \mathcal{L}(E)$ et $p \circ p = p$ pour un endomorphisme, ou $P^2 = P$ pour une matrice.
 - Chercher $F = \text{Ker}(p - \text{id}_E)$ et $G = \text{Ker } p$.

d Symétries

Définition 20 : Symétrie

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel, et F, G deux sous-espaces supplémentaires : $F \oplus G = E$.

Tout vecteur x de E se décompose de manière unique sous la forme $x = x_F + x_G$ où $x_F \in F$ et $x_G \in G$.

On appelle **symétrie sur F parallèlement à G** l'application $s: \begin{cases} E & \rightarrow & E \\ x & \mapsto & x_F - x_G \end{cases}$ le $s = p - q$ avec les notations précédentes.

Propriété 31

- (i) $s \in \mathcal{L}(E)$
- (ii) Si p projection sur F parallèlement à G , $s = 2p - \text{id}_E$.

Propriété 32 : Caractérisation

s est une symétrie (vectorielle) sur E si et seulement si $s \in \mathcal{L}(E)$ et $s^2 = s \circ s = \text{id}_E$.
Le cas échéant,

- (i) $\text{Ker}(s - \text{id}_E) \oplus \text{Ker}(s + \text{id}_E) = E$
- (ii) s est la symétrie par rapport à $F = \text{Ker}(s - \text{id}_E)$ parallèlement à $G = \text{Ker}(s + \text{id}_E)$

Propriété 35

Soit \mathcal{B} une base de E , $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

- u est injective si et seulement si $u(\mathcal{B})$ est libre.
- u est surjective si et seulement si $u(\mathcal{B})$ engendre F .
- u est un isomorphisme si et seulement si $u(\mathcal{B})$ est une base de F .



Méthode 9 : Étude d'une symétrie

Reconnaître et étudier une symétrie, c'est

1. vérifier que $s \in \mathcal{L}(E)$ et $s \circ s = \text{id}_E$ pour un endomorphisme, ou $S^2 = I_n$ pour une matrice.
2. Chercher $F = \text{Ker}(p - \text{id}_E)$ et $G = \text{Ker}(p + \text{id}_E)$.

3 Détermination d'une application linéaire

a Image d'une base

Propriété 33 : Linéarité des formes i^{e} coordonnées

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in I}$ une base de E . Pour $x \in E$, on note $(x_i)_{i \in I}$ ses coordonnées dans \mathcal{B} .
Alors pour tout $i \in I$, l'application

$$\varphi_i : \begin{cases} E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & x_i \end{cases} \text{ est une forme linéaire (i}^{\text{e}} \text{ coordonnée).}$$

b Applications linéaires et dimensions

Propriété 36 : CNS pour que $\dim E = \dim F$

Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimension finie.
Alors $\dim E = \dim F \iff E$ et F sont isomorphes.

Propriété 37

Soient E, F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimension finie tels que $\dim E = \dim F$ et $u \in \mathcal{L}(E, F)$.
Alors u est injective $\iff u$ est surjective $\iff u$ est bijective.

Propriété 38

Soit E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimension finie tels que $\dim E = \dim F = n$ et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Les propriétés suivantes sont équivalents :

- (i) u isomorphisme
- (ii) u est inversible à gauche
- (iii) u est inversible à droite
- (iv) $\text{rg } u = n$

c Dimension de $\mathcal{L}(E, F)$

Propriété 39

Soit E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimension finie.
Alors $\mathcal{L}(E, F)$ est de dimension finie et $\dim \mathcal{L}(E, F) = \dim E \times \dim F$.

d Décomposition d'applications linéaires (MPI)

Corollaire 6 : Applications linéaires coïncidant sur une base

Soit \mathcal{B} une base de E , $u, v \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors $u = v$ si et seulement si $u(\mathcal{B}) = v(\mathcal{B})$.

Théorème 4

Si $E = \bigoplus_{i=1}^p E_i$ et pour tout i , $u_i \in \mathcal{L}(E_i, F)$, alors il existe une unique application linéaire $u \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que pour tout i , $u|_{E_i} = u_i$.



4 Théorème du rang

Théorème 5 : et formule du rang

$u \in \mathcal{L}(E, F)$ induit un isomorphisme de tout supplémentaire H de $\text{Ker } u$ sur $\text{Im } u$.

Si, de plus, E est de dimension finie, $\dim E = \dim \text{Ker } u + \text{rg } u$.

Corollaire 7

Si E est de dimension finie, u est injective si et seulement si $\text{rg } u = \dim E$.

Si F est de dimension finie, u est surjective si et seulement si $\text{rg } u = \dim F$.

5 Formes linéaires et hyperplans

E désigne un \mathbb{K} -espace vectoriel.

Définition 21 : Formes linéaires

On rappelle que les **formes linéaires** sont les $\varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ et que (HP) $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ est appelé **espace dual** de E .

Définition 22 : Hyperplan

On appelle **hyperplan** de E tout sous-espace de E égal au noyau d'une forme linéaire non nulle de E .

Théorème 6 : Caractérisation des hyperplans

Soit H un sous-espace vectoriel de E . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) H est un hyperplan (noyau d'une forme linéaire non nulle : $\exists \varphi \in E^* \setminus \{0_{E^*}\}, H = \text{Ker } \varphi$.)
- (ii) H est un supplémentaire de toute droite $D \not\subset H$.
- (iii) H est un supplémentaire d'une droite $D \not\subset H$.

Corollaire 8

Soient $\varphi_1, \varphi_2 \in E^* \setminus \{0_{E^*}\}$.

$$\text{Ker } \varphi_1 = \text{Ker } \varphi_2 \iff \exists \lambda \in \mathbb{K}^*, \varphi_1 = \lambda \varphi_2.$$

Propriété 40 : Cas de la dimension finie

En dimension finie, les hyperplans de E sont exactement les sous-espaces de dimension $n - 1$.

Propriété 41 : Système d'équations d'un sous-espace

Si F est un sous-espace vectoriel de E avec $\dim E = n$ et $\dim F = p$ tels que $p < n$, alors F est l'intersection de $n - p$ hyperplans distincts.

6 Solutions des problèmes linéaires (MP2I)

Définition 23 : Problème linéaire

Un **problème linéaire** est un problème conduisant à une équation du type $u(x) = b$ où $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $b \in F$ un vecteur fixé, l'inconnue x étant un vecteur de E .

Propriété 42 : Structure de l'ensemble des solutions

L'ensemble des solutions de cette équation est

- soit vide (si $b \notin \text{Im } u$)
- soit un sous-espace affine de E de direction $\text{Ker } u$, donc de la forme

$$x_0 + \text{Ker } u$$

où x_0 est une solution particulière et $\text{Ker } u$ est l'espace vectoriel des solutions de l'équation homogène $u(x) = 0_F$.

IV CALCUL MATRICIEL

\mathbb{K} désigne un sous-corps de \mathbb{C} .

Sauf mention contraire, n, p, q, r, s désignent des entiers naturels non nuls.

1 Espaces de matrices

Propriété 43 : Espace vectoriel de matrices

- (i) $(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), +, \cdot)$ a une structure de \mathbb{K} -espace vectoriel, d'élément nul $0_{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$.
- (ii) $\dim \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) = n \times p$.

Définition 24 : Base canonique

On appelle **base canonique** $(E_{1,1}, E_{1,2}, \dots, E_{n,p})$ où

$$E_{i,j} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & & \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \leftarrow i \downarrow j$$

Propriété 44 : Coefficients des matrices élémentaires

$$\forall i, k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall j, \ell \in \llbracket 1, p \rrbracket, (E_{i,j})_{k,\ell} = \delta_{i,k} \delta_{j,\ell}.$$

Définition 25 : Produit matriciel

On définit

$$\times : \begin{cases} \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}) & \longrightarrow \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K}) \\ (A, B) & \longmapsto C = A \times B \end{cases}$$

avec $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall j \in \llbracket 1, q \rrbracket, c_{i,j} = \sum_{k=1}^p a_{i,k} b_{k,j}.$

Propriété 45 : Bilinéarité, associativité, neutre

- (i) **Associativité** : Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}), C \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K}). A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$
- (ii) **Bilinéarité** : Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}). A \mapsto A \times B$ et $B \mapsto A \times B$ sont linéaires.
- (iii) **Neutre** : Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), A \times I_p = I_n \times A = A.$

Propriété 46 : $E_{i,j} \times E_{k,\ell}$

Lorsque les tailles sont compatibles,

$$E_{i,j} \times E_{k,\ell} = \delta_{j,k} E_{i,\ell}$$

Théorème 7 : Produit par blocs

Soit les matrices par blocs $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{matrix} \uparrow p \\ \downarrow q \end{matrix} \begin{matrix} \uparrow n \\ \downarrow m \end{matrix}$ et $N = \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix} \begin{matrix} \uparrow p \\ \downarrow q \end{matrix} \begin{matrix} \uparrow r \\ \downarrow s \end{matrix}$ où A, B, C, D, E, F, G, H sont des matrices de format correspondant. Alors

$$M \times N = \begin{pmatrix} AE + BG & AF + BH \\ CE + DG & CF + DH \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+m, r+s}(\mathbb{K}).$$

2 Transposition

Définition 26 : Transposée

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}).$ On appelle **transposée** de A la matrice $A^T \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ telle que

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket \times \llbracket 1, n \rrbracket, (A^T)_{i,j} = (A)_{j,i}$$

Propriété 47 : de la transposition

Soit $T : \begin{cases} \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) & \longrightarrow \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}) \\ A & \longmapsto A^T \end{cases}$

- (i) **Linéarité** : Si $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K},$

$$(A + B)^T = A^T + B^T \quad \text{et} \quad (\lambda A)^T = \lambda A^T$$
- (ii) T est **involutif** : si $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), (A^T)^T = A.$
- (iii) Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}), (A \times B)^T = B^T \times A^T.$

3 Matrices carrées

a La \mathbb{K} -algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Propriété 48 : Algèbre des matrices carrées

$(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ est un anneau, ni commutatif ni intègre dès que $n \geq 2,$ d'élément unité $I_n.$ Ainsi, $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times, \cdot)$ est une \mathbb{K} -algèbre de dimension $n^2.$

Propriété 49 : Formules du Binôme et $A^m - B^m$

Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tels que $A \times B = B \times A, m \in \mathbb{N},$

$$(A + B)^m = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} A^k B^{m-k}$$

$$A^m - B^m = (A - B) (A^{m-1} + A^{m-2} B + \dots + AB^{m-2} + B^{m-1})$$

Définition 27 : Groupe linéaire

On appelle **groupe linéaire** le groupe $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ des inversible de l'anneau $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times).$

Propriété 50

- (i) $(\mathcal{GL}_n(\mathbb{K}), \times)$ est un groupe.
- (ii) Si $A, B \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}), A \times B \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ et $(A \times B)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1}.$



(iii) Si $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$, $A^{-1} \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ et $(A^{-1})^{-1} = A$.

(iv) Sont équivalentes :

- A est inversible
- A est inversible à gauche
- A est inversible à droite
- les colonnes de A forment une famille libre
- les lignes de A forment une famille libre

(v) Si $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0_{\mathbb{K}}\}$ et $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$, $\lambda A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ et $(\lambda A)^{-1} = \lambda^{-1} A^{-1}$.

(vi) $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ si et seulement si $A^T \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ et dans ce cas $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

- On appelle **matrice diagonale** toute matrice carrée $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\forall i \neq j, m_{i,j} = 0$.

$$\text{On note } \text{diag}(a_1, \dots, a_n) = \begin{pmatrix} a_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & a_n \end{pmatrix}.$$

On note $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble de ces matrices.

- On appelle **matrice scalaire** toute matrice de la forme λI_n où $\lambda \in \mathbb{K}$.
- On dit que $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est **symétrique** lorsque $S^T = S$ ie $\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, s_{i,j} = s_{j,i}$. On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{K}) = \{S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid S^T = S\}$.
- On dit que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est **antisymétrique** lorsque $A^T = -A$ ie $\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, a_{j,i} = -a_{i,j}$. On note $\mathcal{A}_n(\mathbb{K}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid A^T = -A\}$.



Méthode 10 : Calcul pratique

Pour démontrer l'inversibilité d'une matrice et calculer son inverse, on peut :

- Résoudre le système $A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$: il admet une unique solution si et seulement si A est inversible et alors on obtient $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.
- Effectuer des opérations élémentaires (pivot de Gauss) :
 - ★ soit exclusivement sur les lignes,
 - ★ soit exclusivement sur les colonnes,
 se ramener à I_n et effectuer les mêmes opérations simultanément en partant de I_n qui va devenir A^{-1} si A est inversible.
- Reconnaître une matrice de passage (cf plus loin).
- Utiliser la formule de la comatrice si $n = 2$ ou 3 (voir déterminant).

b

Matrices carrées particulières

Définition 28 : Matrices triangulaires, diagonales, scalaires

- On appelle **matrice triangulaire supérieure** (respectivement **inférieure**) toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\forall i > j, m_{i,j} = 0$ (respectivement $\forall i < j, m_{i,j} = 0$.)

On note $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ (respectivement $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$) l'ensemble de ces matrices.

Lorsque les coefficients diagonaux sont également tous nuls, on parle de **matrice triangulaire stricte**.

Propriété 51 : Sous-algèbres

$\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$, $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ et $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$ sont des sous-algèbres de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de dimensions respectives

Propriété 52 : Sous-espaces supplémentaires

$\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, de dimensions respectives

c

Trace d'une matrice carrée

Définition 29 : Trace

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle **trace** de A le scalaire $\text{tr } A = \sum_{i=1}^n a_{i,i}$.

Propriété 53 : de la trace

- (i) **Linéarité** : Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $\text{tr}(A+B) = \text{tr } A + \text{tr } B$ et $\text{tr}(\lambda A) = \lambda \text{tr } A$.
- (ii) Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.

$\text{tr}(ABC) = \text{tr}(CAB) = \text{tr}(BCA) \neq \text{tr}(BAC)$ en général. (Permutations circulaires seulement).

V MATRICES ET APPLICATIONS LINÉAIRES

1 Matrice d'une application linéaire dans des bases

Définition 30 : Matrice d'une application linéaire

- Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie $n \neq 0$ et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E .
 - Si $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \in E$, de coordonnées (x_1, \dots, x_n) dans \mathcal{B} , on appelle **matrice de x dans la base \mathcal{B}** la matrice colonne

$$X = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$$

- Si $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_p) \in E^p$ une famille de p vecteurs de E , $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E .

Pour tout $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, on note $(x_{1,j}, \dots, x_{n,j})$ les coordonnées de x_j dans la base \mathcal{B}

(le $x_j \xleftrightarrow{\mathcal{B}} X_j = \begin{pmatrix} x_{1,j} \\ \vdots \\ x_{n,j} \end{pmatrix}$.)

On appelle **matrice de la famille \mathcal{F} dans la base \mathcal{B}** la matrice rectangulaire

$$A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_p) = \left(X_1 \mid X_2 \mid \dots \mid X_p \right) = \begin{pmatrix} x_{1,1} & \dots & x_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n,1} & \dots & x_{n,p} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$

On place dans les colonnes les coordonnées dans \mathcal{B} des vecteurs de \mathcal{F} .

- Si E, F des \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimension finie, $p = \dim E$ et $n = \dim F$, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E et $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_n)$ une base de F et $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

On appelle **matrice de l'application linéaire u dans les bases \mathcal{B} au départ et \mathcal{C} à l'arrivée** la matrice rectangulaire

$$A = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u) = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(u(\mathcal{B})) = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(u(e_1), \dots, u(e_p))$$

On place dans les colonnes les coordonnées dans \mathcal{C} des images par u des vecteurs de \mathcal{B} .

Lorsque $u \in \mathcal{L}(E)$ ($E = F$: endomorphisme) et $\mathcal{B} = \mathcal{C}$, on note

$$A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u(\mathcal{B})) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

Propriété 54 : Isomorphisme de représentation matricielle

L'application $\begin{matrix} \mathcal{L}(E, F) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ u & \longmapsto & A = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u) \end{matrix}$ est un isomorphisme (d'espaces vectoriels.)

Propriété 55 : Traduction matricielle de l'évaluation

Soient E, F des \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimension finie, $p = \dim E$ et $n = \dim F$, \mathcal{B} une base de E et \mathcal{C} une base de F et $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

Pour tout $x \in E$,

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}}(u(x)) = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x).$$

Autrement dit, $y = u(x)$ se traduit matriciellement par $Y = AX$ avec des notations évidentes.

Propriété 56 : Traduction matricielle de la composée

Soient E, F, G des \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimension finie, $p = \dim E$, $n = \dim F$, $q = \dim G$, \mathcal{B} une base de E , \mathcal{C} une base de F , \mathcal{D} une base de G , $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$.

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{D}}(v \circ u) = \text{Mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{D}}(v) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u).$$

Propriété 57 : Isomorphisme de représentation matricielle d'endomorphismes

Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie n , \mathcal{B} une base de E . Alors

$\begin{matrix} \mathcal{L}(E) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ u & \longmapsto & \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \end{matrix}$ est un isomorphisme de \mathbb{K} -algèbres.

2 Application linéaire canoniquement associée

Définition 31 : Application linéaire canoniquement associée

Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle **application linéaire canoniquement associée à A** l'unique $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ dont la matrice dans les bases canoniques est A .

Ainsi, écrire $(y_1, \dots, y_n) = u(x_1, \dots, x_p)$ revient à écrire

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}.$$

Les colonnes de A contiennent les images par u des vecteurs de la base canonique de \mathbb{K}^p .



Définition 32 : Noyau, image, rang d'une matrice

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, u l'application linéaire canoniquement associée à A . On définit l'image, le noyau et le rang de A par :

$\text{Ker } A = \left\{ X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \mid AX = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ correspondant à $\text{Ker } u = \{x \in \mathbb{K}^p \mid u(x) = 0_{\mathbb{K}^n}\}$

$\text{Im } A = \{AX \mid X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})\}$ correspondant à $\text{Im } u = \{u(x) \mid x \in \mathbb{K}^p\}$.

$\text{rg } A = \text{rg } u = \dim(\text{Im } A)$

Propriété 58 : Lien avec les colonnes

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

(i) $\text{Im } A = \text{Vect}(C_1, \dots, C_p)$ où C_1, \dots, C_p sont les colonnes de A .

(ii) $\text{rg } A = \text{rg}(C_1, \dots, C_p)$.

(iii) **Formule du rang** : $\text{rg } A + \dim(\text{Ker } A) = p$.

Propriété 59 : CNS d'inversibilité

Sont équivalentes :

(i) $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible

(ii) Son application linéaire canoniquement associée u est un automorphisme

(iii) $\text{Ker } A = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

(iv) $\text{rg } A = n$

3 Changement de base

Définition 33 : Matrice de passage

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de E .

On appelle **matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}'** notée $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$, la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$ dont les colonnes sont les coordonnées dans \mathcal{B} des vecteurs de \mathcal{B}' .

Autrement dit $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(\text{id}_E)$.

Propriété 60 : Inversibilité

Toute matrice de passage est inversible et $\left(P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}\right)^{-1} = P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$.

Propriété 61 : Changement de base d'un vecteur

Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de E , $x \in E$.

Si $X = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ et $X' = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(x)$, alors

$$X = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \times X'$$

$\mathcal{B} \qquad \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}' \qquad \mathcal{B}'$

Propriété 62 : Changement de base pour une application linéaire

Soient E, F des \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimension finie, $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de E , $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ deux bases de F , $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

Soient $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u)$ et $A' = \text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{C}'}(u)$. Alors

$$A' = P_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{C}} \times A \times P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$$

$\mathcal{C}', \mathcal{B}' \qquad \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C} \qquad \mathcal{C}, \mathcal{B} \qquad \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'$

c'est-à-dire, si $P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ et $Q = P_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{C}}$,

$$A' = Q^{-1}AP \quad \text{ie} \quad A = QA'P^{-1}$$

Corollaire 9 : Changement de base pour un endomorphisme

Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de E , $u \in \mathcal{L}(E)$.

Soient $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ et $A' = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(u)$. Alors

$$A' = P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} \times A \times P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$$

$\mathcal{B}' \qquad \mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B} \qquad \mathcal{B} \qquad \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'$

c'est-à-dire, si $P = P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$

$$A' = P^{-1}AP \quad \text{ie} \quad A = PA'P^{-1}$$

4 Matrices équivalentes

Définition 34 : Matrices équivalentes

Une matrice A de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est dite **équivalente** à une autre matrice B de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ si on peut trouver $U \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ et $V \in \mathcal{GL}_p(\mathbb{K})$ telles que $A = UVB$.

Cela signifie aussi que A et B représentent une même application linéaire.

Propriété 63 : Transposées de matrices équivalentes

A et B sont équivalentes si et seulement si A^T et B^T le sont.

Théorème 8 : Rang et équivalence avec J_r

Une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est de rang r si et seulement si elle est équivalente à

$$J_r = \begin{pmatrix} I_r & (0) \\ (0) & 0_{n-r,p-r} \end{pmatrix}.$$

Corollaire 10

- (i) Deux matrices de même format sont équivalentes si et seulement si elles ont même rang.
- (ii) Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\text{rg } A = \text{rg } (A^T)$.
- (iii) Le rang d'une matrice est celui de la famille de ses vecteurs lignes.

5 Matrices semblables

Définition 35 : Matrices semblables

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. A est dite semblable à B lorsqu'on l'on a $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ tel que

$$A = PBP^{-1}$$

C'est une relation d'équivalence. Les classes d'équivalences s'appellent les classes de similitude.

Propriété 64 : Caractérisation géométrique

$A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables si et seulement si elles représentent un même endomorphisme.



Méthode 11

Pour montrer que deux matrices sont semblables, on peut introduire l'endomorphisme canoniquement associé à l'une et chercher une base dans laquelle on obtient l'autre.

Propriété 65 : Calculs avec des matrices semblables

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ telles que $A = PBP^{-1}$.

- (i) $\forall k \in \mathbb{N}, A^k = PB^kP^{-1}$
- (ii) A inversible ssi B l'est, et si c'est le cas, la formule précédente est valable dans \mathbb{Z} .

Propriété 66 : La trace est un invariant de similitude

Si A et B sont semblables alors $\text{tr } A = \text{tr } B$. La réciproque est fautive.

Définition 36 : trace d'un endomorphisme

Soit E \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$. On appelle trace de u , notée $\text{tr } u$, la trace de n'importe quelle matrice le représentant.

Propriété 67 : de la trace

tr est une forme linéaire sur $\mathcal{L}(E)$ et si $u, v \in \mathcal{L}(E)$, $\text{tr}(u \circ v) = \text{tr}(v \circ u)$.

Propriété 68 : à retenir! Trace d'un projecteur

La trace d'un projecteur est égale à son rang.

6 Rang et matrices extraites

Définition 37 : Matrice extraite

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle **matrice extraite** ou **sous-matrice** de A toute matrice dont les coefficients sont les $a_{i,j}$ pour $(i, j) \in I \times J$ avec $I \subset \llbracket 1, n \rrbracket$ et $J \subset \llbracket 1, p \rrbracket$.
On notera $A|_{I \times J}$ cette matrice, obtenue en supprimant des lignes et des colonnes de A .

Propriété 69 : Caractérisation du rang

Le rang d'une matrice est l'ordre maximum de ses matrices extraites (carrées) inversibles.

VI OPÉRATIONS ÉLÉMENTAIRES

Il existe 3 types d'opérations élémentaires :

Les permutations (ou plus exactement transpositions)
 $L_i \leftrightarrow L_j$ ou $C_i \leftrightarrow C_j$.

Les transvections $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_k$ avec $k \neq i$ ou $C_j \leftarrow C_j + \lambda C_k$ avec $k \neq j$.

Les dilations $L_i \leftarrow \lambda L_i$ ou $C_j \leftarrow \lambda C_j$ avec $\lambda \neq 0$.

5 Application à l'inversion de matrice

Propriété 73 : transformation en I_n

Par des opérations élémentaires sur des lignes (respectivement des colonnes), on peut transformer une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ en I_n .

Corollaire 11 : Famille génératrice de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$

Les matrice d'opérations élémentaires engendrent $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$.

6 Systèmes linéaires

a Traductions d'un système linéaire

On considère un système linéaire de n équations à p inconnues dans \mathbb{K} :

$$(S) \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,p}x_p = b_n \end{cases}$$

On rappelle que la matrice du système linéaire est définie par

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$

et la matrice augmentée est

$$M = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{1,1} & \dots & a_{1,p} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,p} & b_n \end{array} \right)$$

Interprétations :

■ **Matricielle** : si $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, $(S) \iff Ax = b$

■ **Équation linéaire** : si u est l'application linéaire canoniquement associée à A ,

$$(S) \iff u(x) = b \iff x \in u^{-1}(\{b\})$$

■ **Formes linéaires** : Soit pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ φ_i la forme linéaire de \mathbb{K}^p correspondant à la i^{e} (canoniquement associée à la i^{e} ligne de A) :

$$\varphi_i : \begin{cases} \mathbb{K}^p & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & a_{i,1}x_1 + \dots + a_{i,p}x_p \end{cases}$$

alors $(S) \iff \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \varphi_i(x) = b_i \iff x \in \bigcap_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \varphi_i^{-1}(\{b_i\})$

b Espace des solutions

Définition 39 : Rang d'un système

On appelle **rang** du système (S) le nombre $r = \text{rg } S = \text{rg } A = \text{rg } u \leq \min(n, p)$.

Propriété 74 : Structure de l'espace des solutions du système homogène

L'ensemble \mathcal{S}_H des solutions du système homogène (H) associé à (S) est un sous-espace vectoriel de \mathbb{K}^p de dimension $\dim \mathcal{S}_H = p - \text{rg } S$.

Propriété 75 : Structure de l'espace des solutions du système complet

L'ensemble des solution \mathcal{S}_S est soit vide, soit de la forme $\mathcal{S}_S = x_0 + \mathcal{S}_H$ où $x_0 \in \mathbb{K}^p$ est une solution particulière. C'est donc un sous-espace affine de \mathbb{K}^p de direction \mathcal{S}_H .

Lorsque $\mathcal{S}_S = \emptyset$, le système est dit **incompatible**. Sinon il est **compatible**.

Propriété 76 : Rang et nombre de solutions

(i) Le système est dit de **Cramer** lorsque $n = p = \text{rg}(S)$ ie A inversible.

Alors pour tout $b \in \mathbb{K}^n$, il y a une unique solution.

(ii) Si $\text{rg } S = n$, le système a au moins une solution.

(iii) Si $\text{rg } S = p$, le système a au plus une solution.

L'algorithme du pivot de Gauss appliqué aux systèmes a été présenté dans un chapitre de début de d'année : appliqué aux lignes de la matrice augmentée pour la rendre échelonnée en lignes (à permutation éventuelle des inconnues près), il permet d'obtenir un système équivalent

$$(S) \iff \begin{cases} p_1 x_{i_1} + \dots & = & b'_1 \\ & p_2 x_{i_2} + \dots & = & b'_2 \\ & & & \vdots \\ & & & p_r x_{i_r} + \dots & = & b'_r \\ & & & & & 0 = b'_{r+1} \\ & & & & & \vdots \\ & & & & & 0 = b'_n \end{cases}$$

où $r = \text{rg}(S)$, $i_1 < \dots < i_r$, p_1, \dots, p_r non nuls, les $n - r$ dernières équations sont les **équations de compatibilité**, elle permettent de savoir si $\mathcal{S}_S = \emptyset$.

On tire successivement x_{i_r} , puis $x_{i_{r-1}}$ jusqu'à x_{i_1} en fonction des autres inconnues. On retrouve la dimension $n - r$.