

Espaces vectoriels, applications linéaires, matrices

Dans tout le chapitre, \mathbb{K} désigne un sous-corps de \mathbb{C} .

STRUCTURE D'ESPACE VECTORIEL (MP2I)

1 Définition

Définition 1 : \mathbb{K} -espace vectoriel

Soit E un ensemble et \mathbb{K} un corps. On appelle **loi de composition externe** sur E toute application

$$\cdot : \begin{cases} \mathbb{K} \times E & \longrightarrow E \\ (\lambda, x) & \longrightarrow \lambda \cdot x \end{cases}$$

On appelle **espace vectoriel sur \mathbb{K}** ou **\mathbb{K} -espace vectoriel** tout triplet $(E, +, \cdot)$ tel que

- E est un ensemble, $+$ est une loi de composition interne sur E et \cdot est une loi de composition externe sur E .
- $(E, +)$ est un groupe abélien d'élément neutre noté 0_E ou 0_E .
- **Pseudo-distributivité à droite :**

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall x \in E, (\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x.$$

- **Pseudo-distributivité à gauche :**

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x, y \in E, \lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y.$$

- **Pseudo-associativité :**

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall x \in E, (\lambda \times \mu) \cdot x = \lambda \cdot (\mu \cdot x).$$

- **Pseudo-élément neutre :** $\forall x \in E, 1_{\mathbb{K}} \cdot x = x.$

Définition 2 : Famille presque nulle, combinaison linéaire

On appelle **famille presque nulle** de scalaire toute famille $(\lambda_i)_{i \in I}$ telle que $\lambda_i \neq 0$ pour un nombre fini de vecteurs seulement. On note $\mathbb{K}^{(I)}$ l'ensemble des familles de scalaires presque nulles.

Si x_1, \dots, x_n sont des vecteurs de E , on appelle **combinaison linéaire** de x_1, \dots, x_n , tout vecteur de la forme $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$ où $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$.

La définition s'étend aux familles infinies de vecteurs en n'ayant qu'un nombre fini de scalaires non nuls : toute combinaison linéaire est nécessairement finie (d'intérêt des familles presque nulles de scalaires).

Si $\mathcal{F} = (x_i)_{i \in I}$, les combinaisons linéaires d'éléments de \mathcal{F} sont les $\sum_{i \in I} \lambda_i x_i$ où $(\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^{(I)}$.

Propriété 1 : Produit cartésien de \mathbb{K} -espaces vectoriels

Si $\left(E, \begin{smallmatrix} + \\ E \end{smallmatrix}, \cdot, \begin{smallmatrix} \cdot \\ E \end{smallmatrix}\right)$ et $\left(F, \begin{smallmatrix} + \\ F \end{smallmatrix}, \cdot, \begin{smallmatrix} \cdot \\ F \end{smallmatrix}\right)$ sont des \mathbb{K} -espaces vectoriels alors $(E \times F, +, \cdot)$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel, avec les lois coordonnées à coordonnée : si $\lambda \in \mathbb{K}$ et $(x, y), (x', y') \in E \times F$,

$$(x, y) + (x', y') = \left(\begin{smallmatrix} x + x' \\ E \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} y + y' \\ F \end{smallmatrix} \right)$$

$$\lambda \cdot (x, y) = \left(\begin{smallmatrix} \lambda \cdot x \\ E \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} \lambda \cdot y \\ F \end{smallmatrix} \right)$$

Remarque

R1 – Se généralise, par récurrence, au produit de n \mathbb{K} -espaces vectoriels $E_1 \times \dots \times E_n$.

Propriété 2 : Fonctions à valeurs dans un \mathbb{K} -espace vectoriel

Si X est un ensemble non vide et $\left(F, \begin{smallmatrix} + \\ F \end{smallmatrix}, \cdot, \begin{smallmatrix} \cdot \\ F \end{smallmatrix}\right)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel, alors $(F^X, +, \cdot)$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel avec les lois habituelles sur les fonctions.



Propriété 3 : Espaces vectoriels classiques

Sont des \mathbb{K} -espaces vectoriels :

- $(\mathbb{K}, +, \times)$
- $(\mathbb{K}^n, +, \cdot)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$,
- $(\mathbb{K}^{\mathbb{N}}, +, \cdot)$,
- $(\mathbb{K}^D, +, \cdot)$ pour tout ensemble D ,
- $(\mathbb{K}[X], +, \cdot)$,
- $(\mathbb{K}(X), +, \cdot)$.

$(\mathbb{C}, +, \times)$ est un \mathbb{R} -espace vectoriel, et, plus généralement, si \mathbb{K} est un sous-corps de \mathbb{L} , alors $(\mathbb{L}, +, \times)$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel.

2 Sous-espace vectoriel

Définition 3 : Sous-espace vectoriel

Soit $(E, +, \cdot)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel et F une partie de E .
On dit que $(F, +, \cdot)$ est un sous-espace vectoriel de E lorsque $(F, +_{|F}, \cdot_{|\mathbb{K} \times F})$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel.

Propriété 4 : Caractérisation de sous-espaces vectoriels

F est un sous-espace vectoriel de E

$$\Leftrightarrow \begin{cases} F \subset E \\ F \neq \emptyset \ (0_E \in F) \\ \forall x, y \in F, \ x + y \in F \\ \forall \lambda \in \mathbb{K}, \ \forall x \in F, \ \lambda x \in F \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} F \subset E \\ F \neq \emptyset \ (0_E \in F) \\ \forall \lambda \in \mathbb{K}, \ \forall x, y \in F, \ x + \lambda y \in F \\ (F \text{ stable par combin. linéaires}) \end{cases}$$



Voir exercice du TD : 1

3 Intersection de sous-espaces vectoriels

Propriété 5 : Intersection de sev

Soit $(F_i)_{i \in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E . Alors $\bigcap_{i \in I} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E .

Remarque

R2 – $F \cup G$ est un sous-espace de E ssi $F \subset G$ ou $G \subset F$.

Si $F \cup G$ est un sous-espace de E et si $F \not\subset G$, alors on a $x \in F$ tel que $x \notin G$ et si $y \in G$, $x + y \in F \cup G$ car sous-espace et comme $x = (x + y) - y \notin G$, $x + y \notin G$ donc $x + y \in F$ et $y = (x + y) - x \in F$ donc $G \subset F$.

4 Sous-espaces vectoriel engendré par une partie

Définition 4 : Sous-espaces vectoriels engendré par une partie

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel, $A \subset E$.
On appelle **sous-espace vectoriel engendré** par A le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant A .
On le note $\text{Vect } A$ ou $\text{Vect}_{\mathbb{K}} A$.
Si $F = \text{Vect } A$, on dit que A **engendre** F ou que F est une **partie génératrice** de F .

Propriété 6 : Caractérisation d'un Vect

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel, $A \subset E$. $\text{Vect } A$ est l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de A :

$$\text{Vect } A = \{ \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n ; n \in \mathbb{N}^*, x_1, \dots, x_n \in A, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K} \}.$$

Remarque

R3 – Si A est finie, $A = \{x_1, \dots, x_p\}$, alors

$$\text{Vect } A = \text{Vect}(x_1, \dots, x_p) = \left\{ \sum_{i=1}^p \lambda_i x_i ; (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p \right\}$$

$$= \mathbb{K} x_1 + \dots + \mathbb{K} x_p.$$

R4 – $\text{Vect } A \subset F \text{ sev} \iff A \subset F \iff \forall x \in A, x \in F.$

R5 – Si $A \subset B$, alors $\text{Vect } A \subset \text{Vect } B.$



Méthode 1 : Passer de famille génératrice à équations

On résout le système donné par le paramétrage traduisant le caractère générateur de la famille en égalant les coordonnées : il y a plus d'équations que d'inconnues.

Les premières servent à déterminer les paramètres du système, les autres formes des équations de notre sous-espace après élimination des paramètres.



Méthode 2 : Passer d'équations à famille génératrice

Pour passer d'un système d'équations décrivant un sous-espace vectoriel à une famille génératrice de celui-ci, on résout le système formé par les équations : certaines coordonnées vont alors s'exprimer en fonction d'autres qui vont devenir des paramètres et donner une famille génératrice.



Méthode 3 : Égalité de Vect

Pour montrer que $\text{Vect } A = \text{Vect } B$, on montre que

$$A \subset \text{Vect } B$$

puis que

$$B \subset \text{Vect } A.$$

5 Familles de vecteurs

Définition 5 : Familles liées, libres, génératrices, bases

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel, $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_n) \in E^n.$

- La famille \mathcal{F} est dite **liée** (ses vecteurs sont dit **linéairement dépendants**) lorsqu'il existe une combinaison linéaire non triviale de ses vecteurs égale au vecteur nul :

$$\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}, \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = 0_E$$

- La famille \mathcal{F} est dite **libre** (ses vecteurs sont dit **linéairement indépendants**) lorsqu'elle n'est pas liée, c'est-à-dire que toute combinaison linéaire de ses vecteurs égale au vecteur nul est triviale : $\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n,$

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = 0_E \implies \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_i = 0.$$

- La famille \mathcal{F} est dite **génératrice** de E (ou **engendre** E) lorsque tout vecteur de E est combinaison linéaire de ces vecteurs :

$$\forall x \in E, \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$$

c'est-à-dire $E = \text{Vect } \mathcal{F}.$

- La famille \mathcal{F} est une **base** de E lorsqu'elle est libre et génératrice dans $E.$

Toutes ces définitions s'étendent aux familles infinies, les combinaisons linéaires restant toujours finies (les suites de coefficients $(\lambda_i)_i$ sont presque nulles).

Remarque

R6 – Les couples de vecteurs liés sont les couples de vecteurs colinéaires, les triplets de vecteurs liés sont les triplets de vecteurs coplanaires.

! Non colinéaires deux à deux ne suffit pas!

Par exemple, dans \mathbb{R}^3 , les vecteurs $x = (1, 0, 0)$, $y = (0, 1, 0)$ et $z = (1, 1, 0)$ sont non colinéaires deux à deux et pourtant, ils sont coplanaires donc linéairement dépendant.

R7 – **!** Dire que x et y sont colinéaires, c'est dire qu'il existe $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$ tel que $\lambda x + \mu y = 0_E$, c'est-à-dire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $y = \lambda x$ **OU** que $x = 0_E$.

R8 – Une famille contenant 0_E est toujours liée.

**Propriété 7 : Famille de polynômes à degrés étagés**

Toute famille de polynômes **non nuls** et à **degrés étagés** (c'est-à-dire deux à deux distincts) est libre.

Exemple

E1 – $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ et plus généralement $((X - a)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont libres et même des bases de $\mathbb{K}[X]$.

**Méthode 4 : Montrer qu'une famille est liée**

- Pour montrer qu'une famille est liée, on cherche une combinaison linéaire nulle non triviale de ses vecteurs.
- Cela peut parfois se faire par exemple en résolvant un système linéaire.
- On raisonne fréquemment par l'absurde et/ou par récurrence.
- On peut aussi utiliser un argument de dimension (s'il y a plus de vecteurs que la dimension, la famille est liée).

**Méthode 5 : Montrer qu'une famille est libre**

- Pour montrer qu'une famille est libre, on prend une combinaison linéaire nulle des vecteurs, et on montre qu'elle est triviale : tous les scalaires sont nuls.
- Il suffit aussi de concaténer des familles libres de vecteurs pris dans des sous-espaces en somme directe.
- Une famille de polynômes **non nuls** à degrés étagés est libre.
- On peut aussi, en dimension finie, utiliser un déterminant.
- Dans un espace préhilbertien, une famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.
- On verra dans le cours de réduction qu'une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est automatiquement libre.

Exemple

E2 – La famille $(1, \cos, \sin, \cos(2\cdot), \sin(2\cdot))$ est libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.



Voir exercice du TD : 2

Définition – Propriété 1 : Coordonnées

$\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E si et seulement si $\forall x \in E, \exists! (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n, x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$. Le triplet (x_1, \dots, x_n) est appelé n -uplet des **coordonnées** de x dans la base \mathcal{B} .

Cette définition s'étend au cas où \mathcal{B} est infinie, les familles des coordonnées étant presque nulles.

Remarque

R9 – Unicité = libre, existence = génératrice

Définition – Propriété 2 : Bases canoniques

On appelle **bases canoniques** de $\mathbb{K}^n, \mathbb{K}[X], \mathbb{K}_n[X], \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ les familles

- $((0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0))_{1 \leq k \leq n}$,
 $\quad \quad \quad \uparrow$
 $\quad \quad \quad k^e$
- $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$,
- $(1, X, X^2, \dots, X^n)$,
- $(E_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$.

Remarque

R10 – L'existence et l'unicité de la décomposition en éléments simples des fractions rationnelles fournissent des bases de $\mathbb{R}(X)$ et $\mathbb{C}(X)$.

Propriété 8 : Sur-famille et sous-famille

Toute sur-famille d'une famille liée ou génératrice l'est encore.

Toute sous-famille d'une famille libre l'est encore.

Propriété 9 : Complétion d'une famille libre

Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel, $n \in \mathbb{N}^*$, $x_1, \dots, x_n, y \in E$.

- (x_1, \dots, x_n, y) libre $\iff \begin{cases} (x_1, \dots, x_n) \text{ libre} \\ y \notin \text{Vect}(x_1, \dots, x_n) \end{cases}$
- (x_1, \dots, x_n) liée si et seulement s'il existe $i_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $x_{i_0} \in \text{Vect}((x_i)_{i \neq i_0})$.
Lorsque c'est le cas, on a alors

$$\text{Vect}(x_1, \dots, x_n) = \text{Vect}(x_i)_{i \neq i_0}.$$

6 Sommes de sous-espaces vectoriels (MPI)

Définition 6 : Sommes de sev

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel, F_1, \dots, F_n des sous-espaces vectoriels de E . On note

$$F_1 + \dots + F_n = \sum_{i=1}^n F_i =$$

Ainsi,

$$x \in \sum_{i=1}^n F_i \iff$$

Remarque

- R 11 - $\triangleleft \mathbb{K}x + \mathbb{K}y \neq \mathbb{K}(x+y)$, en général.
- R 12 - $\triangleleft F + F = F$, $F - F = F$, si G est un sous-espace de F , $F + G = F$.
- R 13 - si $\lambda \neq 0$, $\lambda F = F$.
- R 14 - \triangleleft En général, $(F+G) \cap H \neq F \cap H + G \cap H$. Exemple : trois droites coplanaires.

Propriété 10

- (i) Une somme de sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel.
- (ii) Si A_1, \dots, A_n sont des parties de E , alors

$$\text{Vect} \left(\bigcup_{k=1}^n A_k \right) = \sum_{k=1}^n \text{Vect} A_k.$$

7 Somme directe (MPI)

Définition 7 : Somme directe

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel, F_1, \dots, F_n des sous-espaces vectoriels de E . On dit que F_1, \dots, F_n sont en **somme directe** lorsque

On note alors

$$F_1 + \dots + F_n = F_1 \oplus \dots \oplus F_n = \bigoplus_{i=1}^n F_i.$$

Remarque

- R 15 - Comme pour des ensembles disjoints, il n'y a pas de notation pour dire que des sous-espaces sont en somme directe. La notation désigne la somme des sous-espaces, en rappelant que celle-ci est directe.

Propriété 11 : Caractérisation

F_1, \dots, F_n sont en somme directe si et seulement si

Propriété 12 : Cas de deux sous-espaces

Deux sous-espaces F et G sont en somme directe si et seulement si $F \cap G = \{0_E\}$.
 \triangleleft Le résultat est faux pour plus de deux sous-espaces.

**Exemple**

E3 – Dans \mathbb{R}^2 , $F = \mathbb{R}(1,0)$, $G = \mathbb{R}(0,1)$ et $H = \mathbb{R}(1,1)$

8 Sous-espaces supplémentaires (MPI)

Définition 8 : Sous-espaces supplémentaires

Soient F et G des sous-espaces vectoriels d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E .
 F et G sont dits **supplémentaires** dans E si et seulement si $E = F \oplus G$ c'est-à-dire

$$\forall x \in E, \exists! (x_F, x_G) \in F \times G, x = x_F + x_G.$$

Remarque

R16 – ⚠ Ne pas confondre supplémentaire et complémentaire! Le complémentaire d'un sous-espace vectoriel n'est **jamais** un! (Pourquoi?)

Propriété 13

- (i) F et G sont supplémentaires dans E si et seulement si $F + G = E$ et $F \cap G = \{0_E\}$.
 (ii) Il n'y a pas unicité du supplémentaire en général.



Méthode 6 : Montrer que deux sous-espaces sont supplémentaires

- Raisonner par analyse-synthèse : si on a une décomposition $x = a + b$, alors... $a = \dots$ et $b = \dots$ (unicité sous réserve d'existence), et réciproquement de tels a et b conviennent (d'où l'existence).
- Montrer que $F \cap G = \{0_E\}$ (en général plus facile) et $F + G = E$ (en général moins facile).
- En dimension finie, utiliser des bases (une concaténation de bases de chaque sev donne une base de l'espace entier, dite adaptée à la décomposition $E = F \oplus G$) ou un argument de dimension $\dim F + \dim G = \dim E$ et, au choix, soit $F \cap G = \{0_E\}$, soit $F + G = E$: voir plus loin.
- Reconnaître les sous-espaces caractéristiques d'une symétrie ou d'une projection.
- Plus généralement, reconnaître les sous-espaces propres d'un endomorphisme diagonalisable (voir cours de réduction).
- Reconnaître, si F est de dimension finie dans un espace préhilbertien, une décomposition $F \oplus F^\perp = E$.

Exemple

- E4 – Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ les sous-espaces des fonctions paires et impaires sont supplémentaires.
 E5 – Les sous-espaces $B\mathbb{K}[X]$ et $\mathbb{K}_{\deg B-1}[X]$ sont supplémentaires dans $\mathbb{K}[X]$.

Définition 9 : Sous-espaces supplémentaires

Soient F_1, \dots, F_n des sous-espaces vectoriels de E .
 On dit que F_1, \dots, F_n sont **supplémentaires dans E** lorsque

Exemple

E6 – $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E si et seulement si les $\mathbb{K}e_i$ sont supplémentaires dans E .



Voir exercice du TD : 3



DIMENSION FINIE (MP2I)

1 Espace de dimension finie

Définition 10 : Espace de dimension finie

Un \mathbb{K} -espace vectoriel est dit de **dimension finie** s'il possède une famille génératrice finie.

Dans le cas contraire, il est dit de **dimension infinie**.

Exemple

E7 – $\mathbb{K}[X]$ n'est pas de dimension finie. Pourquoi?

2 Dimension, bases extraites et incomplètes

Propriété 14 : Existence de bases et leur taille

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie, $E \neq \{0_E\}$.

- E possède des bases.
- Toutes les bases de E ont même nombre d'éléments.

Définition 11 : Dimension

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie.

Si $E = \{0_E\}$, on pose $\dim E = 0$.

Sinon, on note $\dim E$ (ou $\dim_{\mathbb{K}} E$) le nombre de vecteurs de toute base de E .



Voir exercice du TD : 5, 7

Propriété 15 : Taille des familles libres ou génératrices

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie n . Toute famille génératrice de E possède au moins n vecteurs, toute famille libre de E possède au plus n vecteurs.

Corollaire 1

Toute famille d'au moins $n + 1$ vecteurs en dimension n est liée.

Théorème 1 : Caractérisation des bases

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie $n \neq 0$, \mathcal{B} une famille finie de vecteurs de E .

\mathcal{B} est une base de E si et seulement si elle contient $n = \dim E$ vecteur et elle est libre **ou** génératrice.

Théorème 2 : de la base extraite

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie, $E \neq \{0_E\}$. De toute famille génératrice de E , on peut extraire une base de E .

Théorème 3 : de la base incomplète

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie $n \neq 0$. On peut compléter toute famille libre de vecteurs de E en une base de E .

De plus, les vecteurs pour compléter peuvent être choisis dans n'importe quelle famille génératrice de E .

Corollaire 2

Si E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie $n \neq 0$, \mathcal{G} une famille génératrice de E et \mathcal{L} une sous-famille libre de \mathcal{G} .

Alors on peut trouver une base \mathcal{B} de E telle que \mathcal{L} soit une sous-famille de \mathcal{B} et \mathcal{B} soit une sous-famille \mathcal{G} .

3 Dimension d'un produit d'espaces vectoriels

Propriété 16 : Base et dimension d'un produit cartésien

Si E_1, \dots, E_n sont des espaces de dimension finie, $E_1 \times \dots \times E_n$ l'est encore et

$$\dim E_1 \times \dots \times E_n = \dim E_1 + \dots + \dim E_n.$$

Si E est de dimension finie, E^n l'est encore et $\dim E^n = n \dim E$.

4 Dimension des sous-espaces

Propriété 17 : dimension des sous-espaces

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie, F un sous-espace de E .

Alors F est de dimension finie et $\dim F \leq \dim E$ avec égalité si et seulement si $F = E$.

L'entier $\dim E - \dim F$ est appelé **codimension** de F dans E .

**Définition 12 : Droites, plans**

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie n .
 Un sous-espace de dimension 1 est une **droite vectorielle** de E , un sous-espace de dimension 2 est un **plan vectoriel** de E .

5 Rang d'une famille de vecteurs**Définition 13 : Rang d'une famille de vecteurs**

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel, \mathcal{F} une famille d'éléments de E .
 On appelle **rang** de \mathcal{F} l'entier $\text{rg } \mathcal{F} = \dim(\text{Vect } \mathcal{F})$.

Remarque

R 17 – Si E est de dimension finie n , alors $\text{rg } \mathcal{F} \leq n$.

Propriété 18 : Rang d'une sous-famille, caractérisation des familles libres

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel, \mathcal{F} une famille d'éléments de E .

- (i) Si \mathcal{F}' est une sous-famille de \mathcal{F} , $\text{rg } \mathcal{F}' \leq \text{rg } \mathcal{F}$.
 (ii) Si \mathcal{F} est finie, \mathcal{F} est libre si et seulement si elle contient $\text{rg } \mathcal{F}$ vecteurs.

Remarque

R 18 – En dimension finie, la méthode du pivot de Gauß permet de déterminer le rang d'une famille de vecteurs.

6 Somme directe et supplémentaire (MPI)**Propriété 19 : Caractérisation de la supplémentarité avec des bases**

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel, F_1, \dots, F_n des sous-espaces de dimension finie, \mathcal{B}_{F_i} une base de F_i , \mathcal{C} la famille obtenue en mettant bout à bout les \mathcal{B}_{F_i} (concaténa-tion).

On a toujours que \mathcal{C} engendre $H = F_1 + \dots + F_n$, et, de plus,

les F_i sont en somme directe si et seulement si \mathcal{C} est libre donc une base de H .

On dit alors que la base \mathcal{C} de H est adaptée à la décomposition $H = F_1 \oplus \dots \oplus F_n$.

On a alors $\dim(F_1 \oplus \dots \oplus F_n) = \sum_{i=1}^n \dim F_i$.

Corollaire 3 : dimension d'une somme

Soient F_1, \dots, F_n des sous-espaces vectoriels de E de dimension finie, alors $\sum_{i=1}^n \dim F_i$

Corollaire 4 : Sous-espaces supplémentaires en dimension finie

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie, F_1, \dots, F_n des sous-espaces de E .

F_1, \dots, F_n sont supplémentaires dans E (ie $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_n$) si et seulement si deux des trois propriétés suivantes sont vraies :

- 1.
- 2.
- 3.

Remarque

R 19 – En particulier, pour deux sous-espaces, F et G sont supplémentaires dans E (ie $E = F \oplus G$) si et seulement si deux des trois propriétés suivantes sont vraies :

1. $E = F + G$.
2. $F \cap G = \{0_E\}$
3. $\dim E = \dim F + \dim G$.

Corollaire 5 : Existence et dimension des supplémentaires

Tout sous-espaces vectoriel F d'un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie E admet un supplémentaire dans E .

De plus, si $p = \dim F$ et $n = \dim E$, tout supplémentaire de F est de codimension p , c'est-à-dire de dimension $n - p$.

Exercice 1

Soient $n \in \mathbb{N}$, $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts, et pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$,

$$F_i = \left\{ P \in \mathbb{K}_n[X], \forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket \setminus \{i\}, P(x_j) = 0 \right\}.$$

Montrer que les F_i sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}_n[X]$ tels que $\mathbb{K}_n[X] = \bigoplus_{i=0}^n F_i$.

7 Formule de Grassmann

Propriété 20 : Formule de Grassmann

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et F, G des sous-espaces de dimension finie.

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G).$$



Voir exercice du TD : 6



APPLICATIONS LINÉAIRES (MP2I)

1 Généralités

a Définition

Définition 14 : Application linéaire

Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels et $u : E \rightarrow F$.
On dit que u est une **application linéaire** lorsque

$$\begin{cases} \forall x, y \in E, u(x + y) = u(x) + u(y) \\ \forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, u(\lambda x) = \lambda u(x) \end{cases}$$

ce qui s'écrit aussi

$$\forall x, y \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, u(x + \lambda y) = u(x) + \lambda u(y).$$

On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E vers F .

- Si u est bijective, on parle d'**isomorphisme** (d'espaces vectoriels).
- Si $E = F$, on parle d'**endomorphisme** et on note $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E, E)$.
- Si $E = F$ et u est bijective, on parle d'**automorphisme**.
- Si $u \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$, on dit que f est une **forme linéaire**.
- On note $\mathcal{L}(E, \mathbb{K}) = E^*$ appelé **dual** de E l'ensemble des formes linéaires sur E .

Remarque

R 20 – Ne pas confondre E^* et $E \setminus \{0_E\}$.

R 21 – Une application linéaire est en particulier un morphisme de groupe de $(E, +)$ sur $(F, +)$.

Exemple

- E 8** – Dérivation, intégration.
- E 9** – Homothéties vectorielles
- E 10** – Morphisme d'évaluation de E^D dans E .
- E 11** – Morphisme des fonctions polynomiales associées aux polynômes.
- E 12** – La trace sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- E 13** – La transposition sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ vers $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.

b Propriétés

Propriété 21

Soient E, F, G trois \mathbb{K} -espaces vectoriels et $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

- (i) $u(0_E) = 0_F$
- (ii) $\forall x_1, \dots, x_n \in E, \forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K},$

$$u\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i u(x_i).$$

- (iii) Si A est une partie de E , $u(\text{Vect } A) = \text{Vect}(u(A))$.
- (iv) Si E' est un sous-espace vectoriel de E , $u|_{E'} \in \mathcal{L}(E', F)$ (u induit une application linéaire sur E').
- (v) Si u est bijective (isomorphisme) alors $u^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$.
- (vi) $(\mathcal{L}(E, F), +, \cdot)$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel.
- (vii) Si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$, $v \circ u \in \mathcal{L}(E, G)$.



(viii) Si E' est un sous-espace vectoriel de E et F' est un sous-espace vectoriel de F , $u(E')$ est un sous-espace vectoriel de F et $u^{-1}(F')$ est un sous-espace vectoriel de E .

C Noyau et image

Définition 15 : Noyau et image

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

- Le **noyau** de u est

$$\text{Ker } u = u^{-1}(\{0_F\}) = \{x \in E \mid u(x) = 0_F\} \in \mathcal{P}(E).$$

- L'**image** de u est

$$\text{Im } u = u(E) = \{u(x) \mid x \in E\} \in \mathcal{P}(F).$$

Remarque

R 22 – L'image de u est en fait l'image de u vu comme simple fonction et le noyau de u est le noyau de u vu comme un morphisme de groupes additifs.

Propriété 22

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

- $\text{Im } u$ et $\text{Ker } u$ sont des sous-espaces vectoriels de F et E respectivement.
- u est injective si et seulement si $\text{Ker } u = \{0_E\}$.
- u est surjective si et seulement si $\text{Im } u = F$.
- Si E' est un sous-espace vectoriel de E , alors $\text{Ker}(u|_{E'}) = E' \cap \text{Ker } u$ et $\text{Im}(u|_{E'}) = u(E')$.



Voir exercice du TD : 13

d Rang

Propriété 23

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ avec E ou F de dimension finie.
Alors $\text{Im } u$ est de dimension finie au plus $\min(\dim E, \dim F)$.

Définition 16 : Rang

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$, E ou F de dimension finie.
On appelle **rang** de u l'entier $\text{rg } u = \dim(\text{Im } u)$.
Si \mathcal{B} est une base de E , alors $\text{rg } u = \text{rg}(u(\mathcal{B}))$.

Remarque

R 23 – On a toujours $\text{rg } u \leq \min(\dim E, \dim F)$.

Propriété 24 : Effet sur le rang de la composition par un isomorphisme

On ne change pas le rang en composant à gauche ou à droite par un isomorphisme.



Voir exercice du TD : 19, 20

2 Endomorphismes

a Structure d'algèbre

Propriété 25

$(\mathcal{L}(E), +, \circ, \cdot)$ est une \mathbb{K} -algèbre non commutative et non intègre si $\dim E \geq 2$.

Notation 1

Si $u, v \in \mathcal{L}(E)$, on note $uv = u \circ v$, $u^n = \underbrace{u \circ \dots \circ u}_n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $u^0 = \text{id}_E$.

Définition 17 : Polynôme en un endomorphisme

Si $P = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n \in \mathbb{K}[X]$, on peut définir $P(u) = a_0 \text{id}_E + a_1 u + \dots + a_n u^n$.
Lorsque $P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$, on dit que P est un **polynôme annulateur** de u .

Propriété 26

Si $u \in \mathcal{L}(E)$, l'application $\left. \begin{array}{l} (\mathbb{K}[X], +, \times, \cdot) \longrightarrow (\mathcal{L}(E), +, \circ, \cdot) \\ P \qquad \qquad \qquad \longmapsto P(u) \end{array} \right\}$ est un morphisme de \mathbb{K} -algèbres.
 ⚠ En particulier, $(P \times Q)(u) = P(u) \circ Q(u)$.

Remarque

R 24 – Deux polynômes en u commutent.

Propriété 27 : Binôme

Si $u, v \in \mathcal{L}(E)$ tels que $u \circ v = v \circ u$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(u + v)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u^k v^{n-k}.$$



Voir exercice du TD : 14, 15, 18, 21, 22, 23

b

Groupe linéaire

Définition 18 : Groupe linéaire

L'ensemble des automorphismes de E est noté $\mathcal{GL}(E)$ appelé **groupe linéaire** de E .

Propriété 28 : Structure

$(\mathcal{GL}(E), \circ)$ est un groupe.



Méthode 7 : Montrer l'inversibilité et trouver l'inverse avec un polynôme annulateur

Lorsque l'on a un polynôme P annulateur de u ayant un coefficient constant, on isole le terme id_E dans un membre et on factorise par u dans l'autre : on obtient alors $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u \circ v = v \circ u = \text{id}_E$ ce qui donne l'inversibilité, et l'expression de l'inverse sous forme de polynôme en u .

Exercice 2 : CCINP 62 (sauf 2.b)



Voir exercice du TD : 12

c

Projecteurs

Définition 19 : Projection

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel, et F, G deux sous-espaces supplémentaires : $F \oplus G = E$.

Tout vecteur x de E se décompose de manière unique sous la forme $x = x_F + x_G$ où $x_F \in F$ et $x_G \in G$.

On appelle **projection** (ou **projecteur**) sur F **parallèlement à** G l'application

$$p : \begin{array}{l} E \longrightarrow E \\ x \longmapsto x_F \end{array}$$

On définit de même la projection q sur G parallèlement à F .

On dit que les projections p et q sont **associées**.

Propriété 29

Avec les notations ci-dessus :

$$\bullet p, q \in \mathcal{L}(E) \quad \bullet p + q = \text{id}_E \quad \bullet p \circ q = q \circ p = 0_{\mathcal{L}(E)}$$

Propriété 30 : Caractérisation

p est une projection (vectorielle) sur E si et seulement si $p \in \mathcal{L}(E)$ et $p^2 = p \circ p = p$. Dans ce cas,

- (i) $\text{Im } p \oplus \text{Ker } p = E$
- (ii) p est la projection sur

$$F = \text{Im } p = \text{Inv } p = \text{Ker}(p - \text{id}_E)$$

parallèlement à $G = \text{Ker } p$



Remarque

R 25 – A savoir retrouver sur un dessin.

R 26 – On retiendra que

$$x \in F = \text{Im } p \iff x \in \text{Ker}(p - \text{id}_E) \iff p(x) = x.$$

Exemple

E 14 – Projection sur \mathcal{P} (fonctions paires) parallèlement à \mathcal{I} (fonctions impaires) ?



Méthode 8 : Étude d'une projection

Reconnaître et étudier une projection, c'est

1. vérifier que $p \in \mathcal{L}(E)$ et $p \circ p = p$ pour un endomorphisme, ou $p^2 = p$ pour une matrice.
2. Chercher $F = \text{Ker}(p - \text{id}_E)$ et $G = \text{Ker } p$.



Voir exercice du TD : 16, 17

d Symétries

Définition 20 : Symétrie

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel, et F, G deux sous-espaces supplémentaires : $F \oplus G = E$.

Tout vecteur x de E se décompose de manière unique sous la forme $x = x_F + x_G$ où $x_F \in F$ et $x_G \in G$.

On appelle **symétrie sur F parallèlement à G** l'application s :

$$\begin{cases} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x_F - x_G \end{cases}$$

ie $s = p - q$ avec les notations précédentes.

Propriété 31

- (i) $s \in \mathcal{L}(E)$
- (ii) Si p projection sur F parallèlement à G , $s = 2p - \text{id}_E$.

Propriété 32 : Caractérisation

s est une symétrie (vectorielle) sur E si et seulement si $s \in \mathcal{L}(E)$ et $s^2 = s \circ s = \text{id}_E$. Le cas échéant,

- (i) $\text{Ker}(s - \text{id}_E) \oplus \text{Ker}(s + \text{id}_E) = E$
- (ii) s est la symétrie par rapport à $F = \text{Ker}(s - \text{id}_E)$ parallèlement à $G = \text{Ker}(s + \text{id}_E)$

Remarque

R 27 – Si $F = \{0_E\}$, alors $G = E$ et $s = -\text{id}_E$: symétrie centrale.



Méthode 9 : Étude d'une symétrie

Reconnaître et étudier une symétrie, c'est

1. vérifier que $s \in \mathcal{L}(E)$ et $s \circ s = \text{id}_E$ pour un endomorphisme, ou $S^2 = I_n$ pour une matrice.
2. Chercher $F = \text{Ker}(p - \text{id}_E)$ et $G = \text{Ker}(p + \text{id}_E)$.

3 Détermination d'une application linéaire

a Image d'une base

Propriété 33 : Linéarité des formes i^{e} coordonnée

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in I}$ une base de E . Pour $x \in E$, on note $(x_i)_{i \in I}$ ses coordonnées dans \mathcal{B} .

Alors pour tout $i \in I$, l'application $\varphi_i : \begin{cases} E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & x_i \end{cases}$ est une forme linéaire (i^{e} coordonnée).

Propriété 34 : Caractérisation par l'image d'une base

Soient E, F deux espaces vectoriels, $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in I}$ une base de E et $\mathcal{F} = (f_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de F .

Il existe une unique application linéaire $u \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $\forall i \in I, u(e_i) = f_i$.

Corollaire 6 : Applications linéaires coïncidant sur une base

Soit \mathcal{B} une base de E , $u, v \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors $u = v$ si et seulement si $u(\mathcal{B}) = v(\mathcal{B})$.

Propriété 35

Soit \mathcal{B} une base de E , $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

- u est injective si et seulement si $u(\mathcal{B})$ est libre.
- u est surjective si et seulement si $u(\mathcal{B})$ engendre F .
- u est un isomorphisme si et seulement si $u(\mathcal{B})$ est une base de F .

Remarque

R 28 – $u \in \mathcal{L}(E, F)$ est un isomorphisme si et seulement si l'image d'une base de E par u est une base de F .

b Applications linéaires et dimensions

Propriété 36 : CNS pour que $\dim E = \dim F$

Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimension finie.
Alors $\dim E = \dim F \iff E$ et F sont isomorphes.

Remarque

R 29 – L'étude de l'espace vectoriel \mathbb{K}^p se reporte sur tout \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension p .

Propriété 37

Soient E, F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimension finie tels que $\dim E = \dim F$ et $u \in \mathcal{L}(E, F)$.
Alors u est injective $\iff u$ est surjective $\iff u$ est bijective.

Remarque

R 30 – C'est en particulier le cas pour tout endomorphisme en dimension finie.

Exemple : Interpolation de Lagrange

E 15 – $u : \begin{cases} \mathbb{K}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}^{n+1} \\ P & \longmapsto & (P(x_0), P(x_1), \dots, P(x_n)) \end{cases}$ où x_0, \dots, x_n sont deux à deux distincts.

Exercice 3 : CCINP 55, 87, 90

Propriété 38

Soit E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimension finie tels que $\dim E = \dim F = n$ et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) u isomorphisme
- (ii) u est inversible à gauche
- (iii) u est inversible à droite
- (iv) $\text{rg } u = n$

c Dimension de $\mathcal{L}(E, F)$

Propriété 39

Soit E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimension finie.
Alors $\mathcal{L}(E, F)$ est de dimension finie et $\dim \mathcal{L}(E, F) = \dim E \times \dim F$.

Remarque

R 31 – $\mathcal{L}(E)$ est de dimension $(\dim E)^2$.

d Décomposition d'applications linéaires (MPI)

Théorème 4

Si $E = \bigoplus_{i=1}^p E_i$ et pour tout i , $u_i \in \mathcal{L}(E_i, F)$, alors

4 Théorème du rang

Théorème 5 : et formule du rang

$u \in \mathcal{L}(E, F)$ induit un isomorphisme de tout supplémentaire H de $\text{Ker } u$ sur $\text{Im } u$.
Si, de plus, E est de dimension finie, $\dim E = \dim \text{Ker } u + \text{rg } u$.

Remarque

R 32 – En général, $\text{Ker } u$ et $\text{Im } u$ ne sont pas supplémentaires.

Exemple

E 16 – $u : (x, y) \mapsto (y, 0)$

Corollaire 7

Si E est de dimension finie, u est injective si et seulement si $\text{rg } u = \dim E$.
Si F est de dimension finie, u est surjective si et seulement si $\text{rg } u = \dim F$.

**Exercice 4 : CCINP 64, 93 : question 1, 60****5 Formes linéaires et hyperplans**

E désigne un \mathbb{K} -espace vectoriel.

Définition 21 : Formes linéaires

On rappelle que les **formes linéaires** sont les $\varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ et que (HP) $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ est appelé **espace dual** de E .

Remarque

R 33 – En dimension finie, $\dim E^* = \dim E$.



Voir exercice du TD : 24, 25

Définition 22 : Hyperplan

On appelle **hyperplan** de E tout sous-espace de E égal au noyau d'une forme linéaire non nulle de E .

Théorème 6 : Caractérisation des hyperplans

Soit H un sous-espace vectoriel de E . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) H est un hyperplan (noyau d'une forme linéaire non nulle : $\exists \varphi \in E^* \setminus \{0_{E^*}\}, H = \text{Ker } \varphi$.)
- (ii) H est un supplémentaire de toute droite $D \not\subset H$.
- (iii) H est un supplémentaire d'une droite $D \not\subset H$.

Corollaire 8

Soient $\varphi_1, \varphi_2 \in E^* \setminus \{0_{E^*}\}$.

$$\text{Ker } \varphi_1 = \text{Ker } \varphi_2 \iff \exists \lambda \in \mathbb{K}^*, \varphi_1 = \lambda \varphi_2.$$

Propriété 40 : Cas de la dimension finie

En dimension finie, les hyperplans de E sont exactement les sous-espaces de dimension $n - 1$.

Remarque : Équation d'un hyperplan

R 34 – Si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E et $H = \text{Ker } \varphi$ un hyperplan. Pour tout $x \in E$, $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$ donc

$$\varphi(x) = x_1 \varphi(e_1) + \dots + x_n \varphi(e_n).$$

Si on note $a_i = \varphi(e_i)$, on obtient

$$x \in H \iff a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0.$$

Réciproquement, toute équation de H donne une telle forme linéaire φ .

La propriété précédente nous dit que toutes les équations de H sont colinéaires.

Propriété 41 : Système d'équations d'un sous-espace

Si F est un sous-espace vectoriel de E avec $\dim E = n$ et $\dim F = p$ tels que $p < n$, alors F est l'intersection de $n - p$ hyperplans distincts.

Remarque

R 35 – Cela traduit le fait que le sous-espace puisse être décrit par un système de $n - p$ équations indépendantes.

6 Solutions des problèmes linéaires (MP2I)**Définition 23 : Problème linéaire**

Un **problème linéaire** est un problème conduisant à une équation du type $u(x) = b$ où $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $b \in F$ un vecteur fixé, l'inconnue x étant un vecteur de E .

Propriété 42 : Structure de l'ensemble des solutions

L'ensemble des solutions de cette équation est

- soit vide (si $b \notin \text{Im } u$)
- soit un sous-espace affine de E de direction $\text{Ker } u$, donc de la forme

$$x_0 + \text{Ker } u$$

où x_0 est une solution particulière et $\text{Ker } u$ est l'espace vectoriel des solutions de l'équation homogène $u(x) = 0_F$.

Exemple

- E 17 – Équations différentielles linéaires
- E 18 – Suites arithmético-géométriques.
- E 19 – Systèmes linéaires.

E 20 – Interpolation de Lagrange $u : \begin{cases} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}^{n+1} \\ P & \longrightarrow & (P(x_0), \dots, P(x_n)) \end{cases}$

Connaissant une solution P_0 , l'ensemble des solutions est $P_0 + \text{Ker } u$.

IV CALCUL MATRICIEL

\mathbb{K} désigne un sous-corps de \mathbb{C} .
Sauf mention contraire, n, p, q, r, s désignent des entiers naturels non nuls.

1 Espaces de matrices

Propriété 43 : Espace vectoriel de matrices

- (i) $(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), +, \cdot)$ a une structure de \mathbb{K} -espace vectoriel, d'élément nul $0_{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$.
- (ii) $\dim \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) =$

Remarque

R 36 – $\dim \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = n^2$ (et non $n!$)

Définition 24 : Base canonique

On appelle **base canonique** $(E_{1,1}, E_{1,2}, \dots, E_{n,p})$ où

$$E_{i,j} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \leftarrow i$$

\uparrow
 j

$$M = \begin{pmatrix} m_{1,1} & \dots & m_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n,1} & \dots & m_{n,p} \end{pmatrix} \text{ s'écrit de manière unique } \sum_{i,j} m_{i,j} E_{i,j}.$$

Propriété 44 : Coefficients des matrices élémentaires

$$\forall i, k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall j, \ell \in \llbracket 1, p \rrbracket, (E_{i,j})_{k,\ell} =$$

Définition 25 : Produit matriciel

On définit

$$\times : \begin{cases} \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K}) \\ (A, B) & \longrightarrow & C = A \times B \end{cases}$$

avec $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall j \in \llbracket 1, q \rrbracket, c_{i,j} = \sum_{k=1}^p a_{i,k} b_{k,j}$.

Remarque

- R 37 – Si L_1, \dots, L_n sont les lignes de A et C_1, \dots, C_q les colonnes de B :
 - $c_{i,j} = L_i \times C_j$.
 - Les lignes de $A \times B$ sont $L_1 \times B, \dots, L_n \times B$.
 - Les colonnes de $A \times B$ sont $A \times C_1, \dots, A \times C_q$.
- R 38 – On retiendra que la multiplication à gauche agit sur les lignes, et la multiplication à droite sur les colonnes (comme les indices).
- R 39 – Il faut que les tailles soient compatibles pour multiplier des matrices. Même si les matrices sont carrées, **le produit n'est pas commutatif** (sauf si $n = 1$!).

Propriété 45 : Bilinéarité, associativité, neutre

- (i) **Associativité** : Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}), C \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$. $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$
- (ii) **Bilinéarité** : Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. $A \mapsto A \times B$ et $B \mapsto A \times B$ sont linéaires.
- (iii) **Neutre** : Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), A \times I_p = I_n \times A = A$.

Propriété 46 : $E_{i,j} \times E_{k,\ell}$

Lorsque les tailles sont compatibles,

$$E_{i,j} \times E_{k,\ell} =$$

**Remarque**

R 40 – \triangle Les différentes $E_{o,s}$ ne vivent pas dans les mêmes espaces de matrices (ne sont pas de mêmes tailles.)

Théorème 7 : Produit par blocs

Soit les matrices par blocs $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{matrix} \uparrow \\ \uparrow \\ \uparrow \\ \uparrow \end{matrix} \begin{matrix} p & q \\ n & m \end{matrix}$ et $N = \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix} \begin{matrix} \uparrow \\ \uparrow \\ \uparrow \\ \uparrow \end{matrix} \begin{matrix} r & s \\ q & p \end{matrix}$ où A, B, C, D, E, F, G, H sont des matrices de format correspondant. Alors

$$M \times N = \begin{pmatrix} AE + BG & AF + BH \\ CE + DG & CF + DH \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+m, r+s}(\mathbb{K}).$$

2 Transposition**Définition 26 : Transposée**

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle **transposée** de A la matrice $A^T \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ telle que

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket \times \llbracket 1, n \rrbracket, (A^T)_{i,j} = (A)_{j,i}$$

Remarque

R 41 – ${}^t A$ notation française. A^T notation anglo-saxonne, donc internationale.

Propriété 47 : de la transposition

$$\text{Soit } T : \begin{array}{l} \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}) \\ A \longmapsto A^T \end{array}$$

(i) **Linéarité** : Si $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$(A + B)^T = A^T + B^T \quad \text{et} \quad (\lambda A)^T = \lambda A^T$$

(ii) T est **involutif** : si $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $(A^T)^T = A$.

(iii) Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $(A \times B)^T = B^T \times A^T$.

3 Matrices carrées**a La \mathbb{K} -algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$** **Propriété 48 : Algèbre des matrices carrées**

$(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ est un anneau, ni commutatif ni intègre dès que $n \geq 2$, d'élément unité I_n . Ainsi, $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times, \cdot)$ est une \mathbb{K} -algèbre de dimension n^2 .

Propriété 49 : Formules du Binôme et $A^m - B^m$

Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tels que $\boxed{A \times B = B \times A}$, $m \in \mathbb{N}$,

$$(A + B)^m = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} A^k B^{m-k}$$

$$A^m - B^m = (A - B) \left(A^{m-1} + A^{m-2}B + \dots + AB^{m-2} + B^{m-1} \right)$$

Définition 27 : Groupe linéaire

On appelle **groupe linéaire** le groupe $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ des inversible de l'anneau $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$.

Propriété 50

(i) $(\mathcal{GL}_n(\mathbb{K}), \times)$ est un groupe.

(ii) Si $A, B \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$, $A \times B \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ et $(A \times B)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1}$.

(iii) Si $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$, $A^{-1} \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ et $(A^{-1})^{-1} = A$.

(iv) Sont équivalentes :

- A est inversible
- A est inversible à gauche
- A est inversible à droite
- les colonnes de A forment une famille libre
- les lignes de A forment une famille libre

(v) Si $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ et $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$, $\lambda A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ et $(\lambda A)^{-1} = \lambda^{-1} A^{-1}$.

(vi) $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ si et seulement si $A^T \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ et dans ce cas $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$



Méthode 10 : Calcul pratique

Pour démontrer l'inversibilité d'une matrice et calculer son inverse, on peut :

- Résoudre le système $A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$: il admet une unique solution si et seulement si A est inversible et alors on obtient $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.
- Effectuer des opérations élémentaires (pivot de Gauss) :
 - ★ soit exclusivement sur les lignes,
 - ★ soit exclusivement sur les colonnes,
 se ramener à I_n et effectuer les mêmes opérations simultanément en partant de I_n qui va devenir A^{-1} si A est inversible.
- Reconnaître une matrice de passage (cf plus loin).
- Utiliser la formule de la comatrice si $n = 2$ ou 3 (voir déterminant).



Voir exercice du TD : 26 à 29, 33

b Matrices carrées particulières

Définition 28 : Matrices triangulaires, diagonales, scalaires

- On appelle **matrice triangulaire supérieure** (respectivement **inférieure**) tout matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\forall i > j, m_{i,j} = 0$ (respectivement $\forall i < j, m_{i,j} = 0$.) On note $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ (respectivement $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$) l'ensemble de ces matrices. Lorsque les coefficients diagonaux sont également tous nuls, on parle de **matrice triangulaire stricte**.
- On appelle **matrice diagonale** tout matrice carrée $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\forall i \neq j, m_{i,j} = 0$.
On note $\text{diag}(a_1, \dots, a_n) = \begin{pmatrix} a_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & a_n \end{pmatrix}$.
On note $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble de ces matrices.
- On appelle **matrice scalaire** toute matrice de la forme λI_n où $\lambda \in \mathbb{K}$.
- On dit que $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est **symétrique** lorsque $S^T = S$ ie $\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, s_{i,j} = s_{j,i}$. On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{K}) = \{S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid S^T = S\}$.
- On dit que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est **antisymétrique** lorsque $A^T = -A$ ie $\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, a_{j,i} = -a_{i,j}$. On note $\mathcal{A}_n(\mathbb{K}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid A^T = -A\}$.



Voir exercice du TD : 30

Remarque

R42 – La diagonale d'une matrice antisymétrique est nécessairement nulle.

Propriété 51 : Sous-algèbres

$\mathcal{D}_n(\mathbb{K}), \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ et $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$ sont des sous-algèbres de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de dimensions respectives

Remarque

R43 – Si $0 \leq \ell \leq n$, $\begin{pmatrix} 0 & & (*) \\ & \ddots & \\ (0) & & 0 \end{pmatrix}^\ell = \begin{pmatrix} \leftarrow \ell \rightarrow \\ 0 & \dots & 0 & (*) \\ & \ddots & & \\ & & & 0 \\ (0) & & & \vdots \\ & & & 0 \end{pmatrix}$

Idem avec les matrices triangulaires inférieures strictes.

Propriété 52 : Sous-espaces supplémentaires

$\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, de dimensions respectives

Remarque

R44 – L'inverse d'une matrice (inversible) (anti)symétrique l'est encore, mais c'est faux pour le produit en général.

c Trace d'une matrice carrée

Définition 29 : Trace

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle **trace** de A le scalaire $\text{tr } A = \sum_{i=1}^n a_{i,i}$.

Propriété 53 : de la trace

- (i) **Linéarité** : Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $\text{tr}(A + B) = \text{tr } A + \text{tr } B$ et $\text{tr}(\lambda A) = \lambda \text{tr } A$.
- (ii) Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.

⚠ $\text{tr}(ABC) = \text{tr}(CAB) = \text{tr}(BCA) \neq \text{tr}(BAC)$ en général. (Permutations circulaires seulement).

**Exemple**

Ex 21 - $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.



Voir exercice du TD : 31 à 32

**MATRICES ET APPLICATIONS LINÉAIRES****1 Matrice d'une application linéaire dans des bases****Définition 30 : Matrice d'une application linéaire**

- Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie $n \neq 0$ et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E .

- Si $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \in E$, de coordonnées (x_1, \dots, x_n) dans \mathcal{B} , on appelle **matrice de x dans la base \mathcal{B}** la matrice colonne

$$X = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$$

- Si $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_p) \in E^p$ une famille de p vecteurs de E , $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E .

Pour tout $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, on note $(x_{1,j}, \dots, x_{n,j})$ les coordonnées de x_j dans la base \mathcal{B} (ie $x_j \xleftrightarrow{\mathcal{B}} X_j = \begin{pmatrix} x_{1,j} \\ \vdots \\ x_{n,j} \end{pmatrix}$.)

On appelle **matrice de la famille \mathcal{F} dans la base \mathcal{B}** la matrice rectangulaire

$$A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_p) = \left(X_1 \mid X_2 \mid \dots \mid X_p \right) \\ = \begin{pmatrix} x_{1,1} & \dots & x_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n,1} & \dots & x_{n,p} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$

On place dans les colonnes les coordonnées dans \mathcal{B} des vecteurs de \mathcal{F} .

- Si E, F des \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimension finie, $p = \dim E$ et $n = \dim F$, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E et $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_n)$ une base de F et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. On appelle **matrice de l'application linéaire u dans les bases \mathcal{B} au départ et \mathcal{C} à l'arrivée** la matrice rectangulaire

$$A = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u) = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(u(\mathcal{B})) = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(u(e_1), \dots, u(e_p))$$

On place dans les colonnes les coordonnées dans \mathcal{C} des images par u des vecteurs de \mathcal{B} .

Lorsque $u \in \mathcal{L}(E)$ ($E = F$: endomorphisme) et $\mathcal{B} = \mathcal{C}$, on note

$$A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u(\mathcal{B})) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

Propriété 54 : Isomorphisme de représentation matricielle

L'application $\left. \begin{array}{l} \mathcal{L}(E, F) \longrightarrow \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ u \longmapsto A = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u) \end{array} \right\}$ est un isomorphisme (d'espaces vectoriels.)

Remarque

R45 - On retrouve le fait que $\dim(\mathcal{L}(E, F)) = \dim E \times \dim F$.

Propriété 55 : Traduction matricielle de l'évaluation

Soient E, F des \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimension finie, $p = \dim E$ et $n = \dim F$, \mathcal{B} une base de E et \mathcal{C} une base de F et $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

Pour tout $x \in E$,

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}}(u(x)) = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x).$$

Autrement dit, $y = u(x)$ se traduit matriciellement par $Y = AX$ avec des notations évidentes.

Propriété 56 : Traduction matricielle de la composée

Soient E, F, G des \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimension finie, $p = \dim E$, $n = \dim F$, $q = \dim G$, \mathcal{B} une base de E , \mathcal{C} une base de F , \mathcal{D} une base de G , $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$.

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{D}}(v \circ u) = \text{Mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{D}}(v) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u).$$

et donc

Propriété 57 : Isomorphisme de représentation matricielle d'endomorphismes

Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie n , \mathcal{B} une base de E . Alors

$\left. \begin{array}{l} \mathcal{L}(E) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ u \longmapsto \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \end{array} \right\}$ est un isomorphisme de \mathbb{K} -algèbres.

Exercice 5 : CCINP 71, 59 sauf 3



Voir exercice du TD : 43, 46

2 Application linéaire canoniquement associée

Définition 31 : Application linéaire canoniquement associée

Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle **application linéaire canoniquement associée à A** l'unique $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ dont la matrice dans les bases canoniques est A .

Ainsi, écrire $(y_1, \dots, y_n) = u(x_1, \dots, x_p)$ revient à écrire $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$.

Les colonnes de A contiennent les images par u des vecteurs de la base canonique de \mathbb{K}^p .

Exemple

E 22 - $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{K})$.

Application linéaire canoniquement associée : $u : \begin{cases} \mathbb{K}^3 & \rightarrow & \mathbb{K}^2 \\ (x, y, z) & \rightarrow & \end{cases}$

Définition 32 : Noyau, image, rang d'une matrice

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, u l'application linéaire canoniquement associée à A . On définit l'image, le noyau et le rang de A par :

$\text{Ker } A = \left\{ X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \mid AX = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ correspondant à $\text{Ker } u = \{x \in \mathbb{K}^p \mid u(x) = 0_{\mathbb{K}^n}\}$

$\text{Im } A = \{AX ; X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})\}$ correspondant à $\text{Im } u = \{u(x) ; x \in \mathbb{K}^p\}$.

$\text{rg } A = \text{rg } u = \dim(\text{Im } A)$

Propriété 58 : Lien avec les colonnes

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

- (i) $\text{Im } A = \text{Vect}(C_1, \dots, C_p)$ où C_1, \dots, C_p sont les colonnes de A .
- (ii) $\text{rg } A = \text{rg}(C_1, \dots, C_p)$.
- (iii) **Formule du rang** : $\text{rg } A + \dim(\text{Ker } A) = p$.

Propriété 59 : CNS d'inversibilité

Sont équivalentes :

- (i) $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible
- (ii) Son application linéaire canoniquement associée u est un automorphisme
- (iii) $\text{Ker } A = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$
- (iv) $\text{rg } A = n$



Voir exercice du TD : 34, 36, 37, 38, 42

3 Changement de base

Définition 33 : Matrice de passage

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de E .

On appelle **matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}'** notée $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$, la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$ dont les colonnes sont les coordonnées dans \mathcal{B} des vecteurs de \mathcal{B}' .

Autrement dit $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(\text{id}_E)$.

Propriété 60 : Inversibilité

Toute matrice de passage est inversible et $\left(P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}\right)^{-1} = P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$.

Remarque

R 46 - La réciproque est vraie : toute matrice inversible est une matrice de passage.

R 47 - On en déduit une nouvelle méthode d'inversion de matrice : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associé, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$, $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3) = u(\mathcal{B})$.

$$\begin{cases} e'_1 & = & e_1 + e_2 \\ e'_2 & = & 2e_1 + e_2 + e_3 \\ e'_3 & = & 2e_1 + e_2 + 2e_3 \end{cases} \iff \dots \iff \begin{cases} e_1 & = & -e'_1 + 2e'_2 - e'_3 \\ e_2 & = & 2e'_1 - 2e'_2 + e'_3 \\ e_3 & = & -e'_2 + e'_3 \end{cases}$$

Donc A est inversible et $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

**Propriété 61 : Changement de base d'un vecteur**

Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de E , $x \in E$.
Si $X = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ et $X' = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(x)$, alors

$$X = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \times X'$$

$\mathcal{B} \quad \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}' \quad \mathcal{B}'$

4 Matrices équivalentes**Définition 34 : Matrices équivalentes**

Une matrice A de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est dite **équivalente** à une autre matrice B de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ si on peut trouver $U \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ et $V \in \mathcal{GL}_p(\mathbb{K})$ telles que $A = UB$.
Cela signifie aussi que A et B représentent une même application linéaire.

Cela définit une relation d'équivalence.

Propriété 63 : Transposées de matrices équivalentes

A et B sont équivalentes si et seulement si A^T et B^T le sont.

Théorème 8 : Rang et équivalence avec J_r

Une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est de rang r si et seulement si elle est équivalente à

$$J_r = \begin{pmatrix} I_r & (0) \\ (0) & 0_{n-r,p-r} \end{pmatrix}.$$

Remarque

R 48 – Par opérations élémentaires, on peut passer de A à J_r .

Les opérations sur les lignes se traduisent par la multiplication à gauche par des matrices inversibles, les opérations sur les colonnes se traduisent par la multiplication à droite par des matrices inversibles. On obtient alors explicitement U et V inversibles telles que $UAV = J_r$.

Corollaire 10

- (i) Deux matrices de même format sont équivalentes si et seulement si elles ont même rang.
- (ii) Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\text{rg } A = \text{rg } (A^T)$.
- (iii) Le rang d'une matrice est celui de la famille de ses vecteurs lignes.



Voir exercice du TD : 36, 47, 48

Propriété 62 : Changement de base pour une application linéaire

Soient E, F des \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimension finie, $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de E , $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ deux bases de F , $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

Soient $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u)$ et $A' = \text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{C}'}(u)$. Alors

$$A' = P_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{C}} \times A \times P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$$

$\mathcal{C}', \mathcal{B}' \quad \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C} \quad \mathcal{C}, \mathcal{B} \quad \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'$

c'est-à-dire, si $P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ et $Q = P_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}'}$,

$$A' = Q^{-1}AP \quad \text{ie} \quad A = QA'P^{-1}$$

Corollaire 9 : Changement de base pour un endomorphisme

Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de E , $u \in \mathcal{L}(E)$.

Soient $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ et $A' = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(u)$. Alors

$$A' = P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} \times A \times P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$$

$\mathcal{B}' \quad \mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B} \quad \mathcal{B} \quad \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'$

c'est-à-dire, si $P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$

$$A' = P^{-1}AP \quad \text{ie} \quad A = PA'P^{-1}$$

5 Matrices semblables

Définition 35 : Matrices semblables

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. A est dite semblable à B lorsqu'on l'on a $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ tel que

$$A = PBP^{-1}$$

C'est une relation d'équivalence. Les classes d'équivalences s'appellent les classes de similitude.

Remarque

R 49 – Des matrices semblables sont équivalentes, mais la réciproque est fautive. En particulier, des matrices semblables ont même rang.

Propriété 64 : Caractérisation géométrique

$A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables si et seulement si elles représentent un même endomorphisme.



Méthode 11

Pour montrer que deux matrices sont semblables, on peut introduire l'endomorphisme canoniquement associé à l'une et chercher une base dans laquelle on obtient l'autre.

Propriété 65 : Calculs avec des matrices semblables

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ telles que $A = PBP^{-1}$.

- (i) $\forall k \in \mathbb{N}, A^k = PB^kP^{-1}$
- (ii) A inversible ssi B l'est, et si c'est le cas, la formule précédente est valable dans \mathbb{Z} .

Propriété 66 : La trace est un invariant de similitude

Si A et B sont semblables alors $\text{tr } A = \text{tr } B$. La réciproque est fautive.

Définition 36 : trace d'un endomorphisme

Soit E \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$. On appelle trace de u , notée $\text{tr } u$, la trace de n'importe quelle matrice le représentant.

Propriété 67 : de la trace

tr est une forme linéaire sur $\mathcal{L}(E)$ et si $u, v \in \mathcal{L}(E)$, $\text{tr}(u \circ v) = \text{tr}(v \circ u)$.

Propriété 68 : à retenir! Trace d'un projecteur

La trace d'un projecteur est égale à son rang.

Exercice 6

Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie et p_1, \dots, p_m des projecteurs de E dont la somme vaut id_E . On note F_1, \dots, F_m les images de p_1, \dots, p_m . Montrer que $E = \bigoplus_{k=1}^m F_k$.



Voir exercice du TD : 39, 40, 44

6 Rang et matrices extraites

Définition 37 : Matrice extraite

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle **matrice extraite** ou **sous-matrice** de A toute matrice dont les coefficients sont les $a_{i,j}$ pour $(i, j) \in I \times J$ avec $I \subset \llbracket 1, n \rrbracket$ et $J \subset \llbracket 1, p \rrbracket$.

On notera $A|_{I \times J}$ cette matrice, obtenue en supprimant des lignes et des colonnes de A .

Exemple

E 23 - $A = \begin{pmatrix} \boxed{2} & -1 & 0 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & \boxed{3} & 1 & 4 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-4} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est échelonnée en lignes. 2,3,-4,6 sont appelés **pivots**.

E 24 - $B = \begin{pmatrix} \boxed{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \boxed{-1} & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & -5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est échelonnée en colonnes. -1,-1 sont les pivots.

E 25 - $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ n'est pas échelonnée en lignes (même si elle est triangulaire).

Propriété 71 : Toute matrice peut être échelonnée

Toute matrice peut être transformée en une matrice échelonnée en lignes (respectivement colonnes) par des opérations élémentaires sur les lignes (respectivement colonnes.)

On applique l'algorithme du pivot de Gauss aux lignes (respectivement colonnes) de la matrice.

4 Application au calcul du rang

On ne change pas le rang par opérations élémentaires. Quelle est le rang d'une matrice échelonnée ?

Propriété 72 : Rang d'une matrice échelonnée

Le rang d'une matrice échelonnée en lignes (respectivement colonnes) est le nombre de lignes (respectivement colonnes) non nulles.

5 Application à l'inversion de matrice

Propriété 73 : transformation en I_n

Par des opérations élémentaires sur des lignes (respectivement des colonnes), on peut transformer une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ en I_n .

On en déduit la méthode d'inversion de matrice par opérations **exclusivement** sur les lignes ou les colonnes de A .

- Sur les lignes : $P_k P_{k-1} \dots P_1 A = I_n \implies A^{-1} = P_k P_{k-1} \dots P_1 I_n$.
- Sur les colonnes : $A Q_1 Q_2 \dots Q_k = I_n \implies A^{-1} = I_n Q_1 Q_2 \dots Q_k$.

Corollaire 11 : Famille génératrice de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$

Les matrice d'opérations élémentaires engendrent $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$.

6 Systèmes linéaires

a Traductions d'un système linéaire

On considère un système linéaire de n équations à p inconnues dans \mathbb{K} :

$$(S) \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,p}x_p = b_n \end{cases}$$

On rappelle que la matrice du système linéaire est définie par

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$

et la matrice augmentée est

$$M = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{1,1} & \dots & a_{1,p} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,p} & b_n \end{array} \right)$$

Interprétations :

- **Matricielle** : si $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, $(S) \iff Ax = b$



- **Équation linéaire** : si u est l'application linéaire canoniquement associée à A ,

$$(S) \Leftrightarrow u(x) = b \Leftrightarrow x \in u^{-1}(\{b\})$$

- **Formes linéaires** : Soit pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ φ_i la forme linéaire de \mathbb{K}^p correspondant à la i^{e} (canoniquement associée à la i^{e} ligne de A) :

$$\varphi_i : \begin{cases} \mathbb{K}^p & \longrightarrow \mathbb{K} \\ x & \longmapsto a_{i,1}x_1 + \dots + a_{i,p}x_p \end{cases}$$

alors $(S) \Leftrightarrow \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \varphi_i(x) = b_i \Leftrightarrow x \in \bigcap_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \varphi_i^{-1}(\{b_i\})$

b Espace des solutions

Définition 39 : Rang d'un système

On appelle **rang** du système (S) le nombre $r = \text{rg } S = \text{rg } A = \text{rg } u \leq \min(n, p)$.

Propriété 74 : Structure de l'espace des solutions du système homogène

L'ensemble \mathcal{S}_H des solutions du système homogène (H) associé à (S) est un sous-espace vectoriel de \mathbb{K}^p de dimension $\dim \mathcal{S}_H = p - \text{rg } S$.

Propriété 75 : Structure de l'espace des solutions du système complet

L'ensemble des solutions \mathcal{S}_S est soit vide, soit de la forme $\mathcal{S}_S = x_0 + \mathcal{S}_H$ où $x_0 \in \mathbb{K}^p$ est une solution particulière. C'est donc un sous-espace affine de \mathbb{K}^p de direction \mathcal{S}_H .

Lorsque $\mathcal{S}_S = \emptyset$, le système est dit **incompatible**. Sinon il est **compatible**.

Propriété 76 : Rang et nombre de solutions

- Le système est dit de **Cramer** lorsque $n = p = \text{rg}(S)$ ie A inversible. Alors pour tout $b \in \mathbb{K}^n$, il y a une unique solution.
- Si $\text{rg } S = n$, le système a au moins une solution.
- Si $\text{rg } S = p$, le système a au plus une solution.

L'algorithme du pivot de Gauss appliqué aux systèmes a été présenté dans un chapitre de début de d'année : appliqué aux lignes de la matrice augmentée pour la rendre échelonnée en lignes (à permutation éventuelle des inconnues près), il permet d'obtenir un système équivalent

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} p_1 x_{i_1} + \dots & = b'_1 \\ & p_2 x_{i_2} + \dots & = b'_2 \\ & & \vdots \\ & p_r x_{i_r} + \dots & = b'_r \\ & & 0 & = b'_{r+1} \\ & & \vdots \\ & & 0 & = b'_n \end{cases}$$

où $r = \text{rg}(S)$, $i_1 < \dots < i_r$, p_1, \dots, p_r non nuls, les $n - r$ dernières équations sont les **équations de compatibilité**, elle permettent de savoir si $\mathcal{S}_S = \emptyset$.

On tire successivement x_{i_r} , puis $x_{i_{r-1}}$ jusqu'à x_{i_1} en fonction des autres inconnues. On retrouve la dimension $n - r$.