

Suites et séries de fonctions (1^{re} partie)

\mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} , I est un intervalle de \mathbb{R} contenant au moins deux points, X une partie non vide \mathbb{R} .

1 CONVERGENCES SIMPLE ET UNIFORME

1 Convergence simple

Définition 1 : Convergence simple

Soit $f : X \rightarrow \mathbb{K}$ et $(f_n)_n$ une suite de fonctions appartenant à \mathbb{K}^X .
On dit que $(f_n)_n$ **converge simplement sur X vers f** lorsque

On note alors

Remarque

R1 – C'est-à-dire

R2 – Écrire $f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{CS} f(x)$ n'a absolument aucun sens.

Exemple

E1 – $f_n : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{n+x}{1+nx}$

E2 – $g_n : x \in [0, 1] \mapsto x^n$

E3 – Une fonction triangulaire h_n nulle en 0 et près de 1 et d'intégrale égale à 1 sur $[0, 1]$.

2 Convergence uniforme

□ Définition

Définition 2 : Convergence uniforme

Soit $f : X \rightarrow \mathbb{K}$ et $(f_n)_n$ une suite de fonctions appartenant à \mathbb{K}^X .
On dit que $(f_n)_n$ **converge uniformément sur X vers f** lorsqu'

On note alors

Remarque

R3 – Graphiquement, à partir d'un certain rang, la courbe de f_n se situe dans la bande délimitée par les courbes $f - \varepsilon$ et $f + \varepsilon$.

La différence avec la convergence simple est que cette fois, le rang ne dépend que de ε , plus de x .

Propriété 1 : CU \Rightarrow CS

La convergence uniforme implique la convergence simple.

Propriété 2 : CU par majoration uniforme

S'il existe une suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que

H1

H2

alors

C1 (f_n) converge uniformément vers f .

**Remarque**

R4 – Il suffit d'avoir la majoration uniforme à partir d'un certain rang seulement pour pouvoir conclure.

Définition 4 : Norme infinie

On définit, pour $f \in E = \mathcal{B}(X, \mathbb{K})$,

$$\|f\|_{\infty} =$$

Propriété 3 : Transmission du caractère borné par CU

On suppose que

H1

H2

alors

C1

Propriété 5 : La norme infinie est une norme

Il s'agit d'une norme sur $\mathcal{B}(X, \mathbb{K})$.

Remarque

R5 – La preuve est à savoir faire.

b

Norme infinie**Définition 3 : Norme**

On appelle **norme** sur un \mathbb{K} -espace vectoriel E toute application $N : E \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant

Défini-positivité :

Homogénéité :

Inégalité triangulaire (ou sous-additivité) :

Propriété 4 : Utilisable directement

Si A est une partie non vide de \mathbb{R} et $\lambda \in \mathbb{R}^+$, alors $\sup(\lambda A) = \lambda \sup(A)$.

c

Lien avec la convergence uniforme**Propriété 6 : CU et norme infinie**

Soit $f : X \rightarrow \mathbb{K}$ et $(f_n)_n$ une suite de fonctions appartenant à \mathbb{K}^X . $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{CU} f$ si et seulement si

Remarque

R6 – Mais rien n'indique que les f_n soient bornées a priori.

Exemple

$$E4 - f_n : x \mapsto e^x + \frac{1}{n}$$

Propriété 7 : Cas des fonctions bornées

Si les fonctions $f_n : X \rightarrow \mathbb{K}$ et $f : X \rightarrow \mathbb{K}$ sont bornées, alors

$$f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{CU} f \iff$$

Propriété 8 : Non convergence uniforme

Si $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{CS} f$ et s'il existe

alors la convergence de (f_n) n'est pas uniforme.



Méthode 1 : Étudier la convergence uniforme de $(f_n)_n$

- On étudie la convergence simple et on note f la limite.
- Puis pour prouver qu'il y a convergence uniforme :
 - ★ Soit on cherche à déterminer $\|f_n - f\|_\infty$ par exemple en étudiant les variations, puis on montre que $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$.
 - ★ Soit on majore uniformément les $|f_n(x) - f(x)|$, c'est-à-dire qu'on cherche $\alpha_n \rightarrow 0$ indépendant de x tel que $\forall x \in X, |f_n(x) - f(x)| \leq \alpha_n$.
- Ou, pour prouver qu'il n'y a pas convergence uniforme :
 - ★ Soit les $(f_n)_n$ sont bornées mais pas f .
 - ★ Soit trouver $(x_n)_n$ telle que $f_n(x_n) - f(x_n) \not\rightarrow 0$.

Exemple : On reprend les mêmes exemples

E5 - $f_n : x \mapsto \frac{n+x}{1+nx}$ sur \mathbb{R}_*^+ .

E6 - $g_n : x \mapsto x^n$ sur $[0, 1]$

E7 - h_n sur $[0, 1]$.

Exercice 1 : CCINP 11

3 Convergence uniforme locale

On suppose que X est une réunion d'intervalles.

Soit $f : X \rightarrow \mathbb{K}, (f_n)_n$ une suite de fonctions appartenant à $\mathbb{K}^I, x_0 \in \bar{X}$.

La suite de fonctions $(f_n)_n$ **converge uniformément vers f au voisinage de x_0** lorsqu'il existe un voisinage de x_0 sur lequel $(f_n)_n$ converge uniformément vers f , soit, de manière équivalente, s'il existe $\eta > 0$ tel que $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur $X \cap]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$.

Bien sûr, si $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur X , elle converge uniformément vers f au voisinage de tout point de X , mais, malheureusement, la réciproque est fautive.

Lorsque X n'est pas majoré, la suite de fonctions $(f_n)_n$ **converge uniformément vers f au voisinage de $+\infty$** lorsqu'il existe un voisinage de $+\infty$ sur lequel $(f_n)_n$ converge uniformément vers f , soit, de manière équivalente, s'il existe $a > 0$ tel que $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur $X \cap [a, +\infty[$.

De même, lorsque X n'est pas minoré, la suite de fonctions $(f_n)_n$ **converge uniformément vers f au voisinage de $-\infty$** lorsqu'il existe un voisinage de $-\infty$ sur lequel $(f_n)_n$ converge uniformément vers f , soit, de manière équivalente, s'il existe $b > 0$ tel que $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur $X \cap]-\infty, b]$.

Propriété 9 : CU sur tout segment \Rightarrow au v. de chaque point de X

Si la suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur tout segment inclus dans X , alors

Remarque

- R7 - La convergence uniforme sur tout segment n'implique pas non plus la convergence uniforme sur X , ni la convergence au voisinage des bornes ouvertes de X . De plus, la convergence uniforme sur tout segment n'implique pas la convergence uniforme au voisinage de $+\infty$.
- R8 - À noter aussi qu'on ne prouve pas une convergence uniforme en découpant X : c'est une convergence globale qui ne peut s'obtenir en réunissant des convergences uniforme sur des parties de X , contrairement à la convergence simple qui, elle, est ponctuelle.

Exemple

E8 - $g_n : x \mapsto x^n$ converge uniformément vers la fonction nulle sur tout segment de $[0, 1[$, mais pas sur $[0, 1[$ comme déjà vu.



CONTINUITÉ ET LIMITE

1 Continuité

Théorème 1 : Limite uniforme de fonctions continues en un point

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{K}, (f_n)_n$ une suite de fonctions appartenant à $\mathbb{K}^I, x_0 \in I$. On suppose que

H1

H2

Alors

C1

**Corollaire 1 : Limite uniforme de fonctions continues sur un intervalle**

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{K}$, $(f_n)_n$ une suite de fonctions appartenant à \mathbb{K}^I . On suppose que

H1

H2

Alors

C1

**Méthode 2 : Pour montrer qu'on n'a pas convergence uniforme...**

Il suffit que les f_n soient continues mais pas f .

Exemple

E 9 – $g_n : x \mapsto x^n$ sur $[0, 1]$.

Exercice 2 : CCINP 9**2 Théorème de la double limite****Théorème 2 : de la double limite**

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{K}$, $(f_n)_n$ une suite de fonctions appartenant à \mathbb{K}^I , $(b_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $a \in \bar{I}$ éventuellement infini. On suppose que

H1

H2

Alors on a $b \in \mathbb{K}$ tel que

C1

C2

Autrement dit, les limites existant bien :

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\lim_{x \rightarrow a} f_n(x) \right).$$

Remarque

R 9 – Lorsque a est une borne ouverte de I , une convergence uniforme sur tout segment **ne suffit pas!**
(Mais lorsque $a \in I$, c'est simplement la continuité en a .)

**Méthode 3 : Pour montrer qu'on n'a pas convergence uniforme...**

Il suffit d'avoir a tel qu'on n'ait pas $\lim_{x \rightarrow a} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\lim_{x \rightarrow a} f_n(x) \right)$ alors que ces limites existent.

Exemple

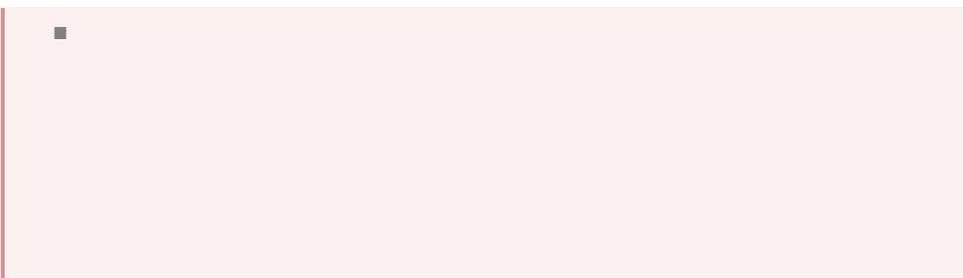
E 10 – $g_n : x \mapsto x^n$ en $a = 1$

**APPROXIMATIONS UNIFORMES****1****Par des polynômes****Théorème 3 : de Weierstraß**

On donne trois énoncés équivalents :

■

■



IV SÉRIES DE FONCTIONS

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de \mathbb{K}^X .

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^n f_k$, la somme partielle au rang n de la série de fonctions

$\sum f_n$.

On souhaite étudier la suite de fonctions $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en étudiant $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (sur le même schéma que les séries numériques.)

1 Convergence simple

Définition 5 : Convergence simple

On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ **converge simplement sur X** si

Lorsque c'est le cas,

- $f : x \in X \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ est appelée **somme** de la série de fonctions $\sum f_n$ et est notée $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$.
- Si $n \in \mathbb{N}$, $R_n = f - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k$ est le reste d'ordre n de la série de fonctions $\sum f_n$.

Remarque

R 12 – \triangleleft f désigne ici la somme de la **série de fonctions** $\sum f_n$ et non la limite simple de la **suite de fonctions** (f_n) .

R 13 – Ainsi, la **série** de fonctions $\sum f_n$ converge simplement si et seulement si la **suite** de fonctions (S_n) converge simplement, et dans ce cas, $S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$.

R 14 – Lorsque la série $\sum f_n$ converge simplement, la suite $(f_n)_n$ converge simplement vers la fonction nulle, et la réciproque est fautive.

R 15 – La somme d'une série de fonction (et le reste si elle converge simplement) sont des fonctions.

Remarque

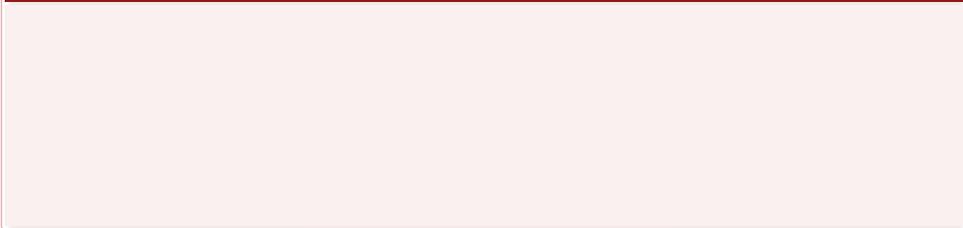
R 10 – Le résultat ne tient plus sur un intervalle non borné.

Exercice 3

Montrer que si une fonction polynomiale est bornée sur un intervalle qui ne l'est pas, elle est constante, puis qu'une limite uniforme de fonctions polynomiales sur un intervalle non borné est polynomiale.

2 Par des fonctions en escalier

Théorème 4 : Approximation uniforme d'une fonction CPM sur un segment par des fonctions en escalier



Remarque

R 11 – On montre que pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver φ en escalier telle que $\|\varphi - f\|_\infty \leq \varepsilon$.

Alors, en posant $\varepsilon = \frac{1}{n+1}$, on obtient φ_n en escalier telle que $(\varphi_n)_n$ converge uniformément vers f .



Exemple : Étudier la convergence simple de $\sum f_n$

E 11 – $f_n : x \mapsto e^{-\sqrt{n}x}$

E 12 – $f_n : x \mapsto \frac{\cos(nx)}{1+n^2x^2}$

E 13 – $f_n : x \mapsto \frac{1}{n^x}$

Lorsque cela a un sens, on appelle **fonction ζ de Riemann** la fonction

$$\zeta : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}.$$

2 Convergence uniforme

Définition 6 : Convergence uniforme

On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ **converge uniformément** sur X lorsque

c'est-à-dire lorsqu'il existe $f : X \rightarrow \mathbb{K}$ tel que

-
-

Remarque

R 16 – On définit aussi de même la convergence uniforme au voisinage d'un point (fini ou non) de la série de fonction comme convergence uniforme locale de (S_n) .

Propriété 10 : CU \Rightarrow CS

Propriété 11 : CU par majoration uniforme

Si on a une suite réelle $(\alpha_n)_n$ telle que

H1

H2

alors

C1 $\sum f_n$ converge uniformément sur X vers f .

Propriété 12 : CU par CU des restes vers la fonction nulle

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions convergeant simplement sur X , R_n le reste d'ordre n .

Exercice 4 : CCINP 8

Propriété 13 : Condition nécessaire de CU

Si la série de fonction $\sum f_n$ converge uniformément sur X , alors



Méthode 4 : Pour montrer que $\sum f_n$ ne converge pas uniformément

On peut rechercher $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ telle que $f_n(x_n) \neq 0$.

Exercice 5 : CCINP 17



Méthode 5 : Montrer directement une convergence uniforme de série de fonctions

Ce n'est pas simple en général. On commence par la convergence simple de $\sum f_n$ vers f . Puis on peut tenter

- de majorer uniformément (en x) directement $|R_n| = |S_n - f|$,
- de calculer le reste (séries géométriques, télescopiques),
- d'utiliser le critère sur les séries alternées,
- d'effectuer une comparaison série-intégrale.

En réalité, la plupart du temps, il y a plus simple : la convergence normale.

Exemple

E 14 – Fonction ζ sur $]1, +\infty[$

3 Convergence normale

Définition 7 : Convergence normale

On dit que la série $\sum f_n$ **converge normalement** sur X lorsque les f_n sont toutes bornées et la série numérique $\sum \|f_n\|_{\infty}$ converge.

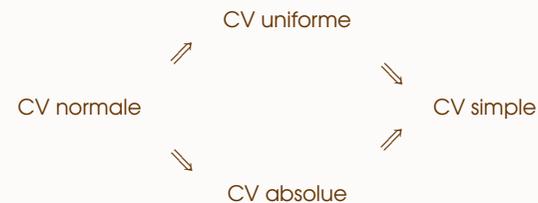
Propriété 14 : La convergence normale implique la convergence uniforme et la convergence absolue

Lorsque la série $\sum f_n$ converge normalement sur X ,

- pour tout $x \in I$, la série numérique $\sum f_n(x)$ converge absolument,
- $\sum f_n$ converge uniformément.

Remarque

R 17 – On a le diagramme



Les réciproques sont fausses.

R 18 – En cas de convergence normale locale / sur tout segment, on en tire une convergence uniforme du même type.

Exemple

E 15 – Pour la fonction ζ , il n'y a pas convergence normale sur $]1, +\infty[$, mais sur tout $[a, +\infty[$. On retrouve la convergence uniforme.

E 16 – $\sum n^{\alpha} x e^{-n^2 x}$ converge normalement sur \mathbb{R}^+ si et seulement si $\alpha < 1$. Sinon, convergence normale sur $[a, +\infty[$.



Méthode 6 : Convergence normale par domination

Pour montrer que $\sum f_n$ converge normalement sur X , on peut rechercher $(\alpha_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in X$, $|f_n(x)| \leq \alpha_n$,
- $\sum \alpha_n$ converge.



Exemple

E 17 – $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n^2}$.

Propriété 15 : Critère séquentiel de non convergence normale

Exemple

E 18 – $f_n(x) = xe^{-n^2x^2}$ sur \mathbb{R}^+ .

Exercice 6 : CCINP 15

4 Continuité

Théorème 5 : Transfert de continuité

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions appartenant à \mathbb{K}^I . On suppose que

H1

H2

Alors

C1

Exemple

E 19 – ζ est continue sur $]1, +\infty[$.

5 Double limite

Théorème 6 : de la double limite

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions appartenant à \mathbb{K}^I , $(b_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $a \in \bar{I}$ éventuellement infini. On suppose que

H1

H2

Alors

C1

C2

Autrement dit, les limites existant bien :

$$\lim_{x \rightarrow a} \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow a} f_k(x).$$

Remarque

R 19 – ⚠ Lorsque a est une borne ouverte de I , une convergence uniforme sur tout segment **ne suffit pas!**

Exemple

E 20 – ζ en $+\infty$.

Exercice 7

On pose $f_n : x \mapsto \frac{1}{1+n^2x^2}$.

1. Étudier la convergence simple de $\sum f_n$.
2. Montrer que la somme f de la série de fonctions est continue sur \mathbb{R}_+^* .
3. Montrer qu'il n'y a pas de convergence normale sur \mathbb{R}_+^* .
4. Calculer la limite de f en $+\infty$.

Exercice 8 : CCINP 53**Exercice 9 : Contre-exemple en 0 sur tout segment**

Soit $f_n : x \mapsto \frac{x}{(1+x^2)^n}$.

1. Étudier la convergence simple puis calculer la somme f de la série de fonctions $\sum f_n$.
2. Montrer qu'il y a convergence normale sur tout segment de \mathbb{R}_+^* .
3. Que penser de la double-limite en 0^+ ?

**Méthode 7 : Pour montrer une absence de convergence uniforme...**

... on peut utiliser la contraposée du théorème de la double limite.

Typiquement, lorsque la série des limites en a est divergente, ou lorsque les deux limites finales ne sont pas égales, c'est qu'il y a un défaut de convergence uniforme au point a .

Exercice 10 : CCINP 18 (modifié)

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, u_n(x) = \frac{(-1)^n x^n}{n}$. On considère la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} u_n$.

1. Étudier la convergence simple de cette série.
On note D l'ensemble des x où cette série converge et $S(x)$ la somme de cette série pour $x \in D$.
2. (a) Étudier la convergence normale, puis la convergence uniforme de cette série sur D .
(b) Sur quel type d'intervalle y a-t-il convergence normale? Montrer qu'il y a convergence uniforme sur $[0, 1]$.
(c) La fonction S est-elle continue sur D ?

6 Grand classique incontournable (mais HP)**Exercice 11 : Fonctions ζ de Riemann et η de Dirichlet**

On pose $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ et $\eta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}$.

1. Pour quelles valeurs de x peut-on définir $\zeta(x)$?
2. Sur quel type d'intervalles a-t-on convergence normale ?
3. Étudier les variations de ζ .
4. Calculer la limite en $+\infty$.
5. Calculer la limite en 1. Le théorème de la double-limite s'applique-t-il ? Que peut-on en déduire ?
6. Donner un équivalent de ζ en 1 par comparaison série-intégrale.
7. Tracé le graphe de ζ .
8. Pour quelles valeurs de x peut-on définir $\eta(x)$? Sur quel type d'intervalles a-t-on convergence normale ? uniforme ?
9. Montrer que si $x > 1$, $\eta(x) = (2^{1-x} - 1)\zeta(x)$. Retrouver l'équivalent de ζ en 1.