5

Suites et séries de fonctions (1re partie)

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, I est un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux points, X une partie non vide $\mathbb{R}$.

I Convergences simple et uniforme

1 Convergence simple

Définition 1 : Convergence simple

Soit $f : X \to \mathbb{K}$ et $(f_n)_n$ une suite de fonctions appartenant à $\mathbb{K}^X$.
On dit que $(f_n)_n$ **converge simplement sur X vers f** lorsque

$\forall x \in X,\ f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$

On note alors $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{CS} f$

Remarque

R 1 – C'est-à-dire $\forall x\in X,$ $\forall \varepsilon>0,\ \exists N\in\mathbb{N},\ \forall n\geq N,\ |f_n(x)-f(x)|\leq\varepsilon$ ie $\forall x\in X,\ |f_n(x)-f(x)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

R 2 – Écrire $\underbrace{f_n(x)}_{\in\mathbb{K}} \xrightarrow[n\to+\infty]{\cancel{CS}} \underbrace{f(x)}_{\in\mathbb{K}}$ n'a absolument aucun sens.

Exemple

E 1 – $f_n : x\in\mathbb{R}_+^* \mapsto \dfrac{n+x}{1+nx}$

E 2 – $g_n : x\in[0,1]\mapsto x^n$

E 3 – Une fonction triangulaire h_n nulle en 0 et près de 1 et d'intégrale égale à 1 sur $[0,1]$.

2 Convergence uniforme

a Définition

Définition 2 : Convergence uniforme

Soit $f : X \to \mathbb{K}$ et $(f_n)_n$ une suite de fonctions appartenant à $\mathbb{K}^X$.
On dit que $(f_n)_n$ **converge uniformément sur X vers f** lorsque

$\forall \varepsilon>0,\ \exists N\in\mathbb{N},\ \forall n\geq N,\ \forall x\in X,\ \underbrace{|f_n(x)-f(x)|\leq\varepsilon}$

On note alors $f_n \xrightarrow{CU} f$

Ne dépend plus de x.

$\forall x\in X,\ f(x)-\varepsilon \leq f_n(x) \leq f(x)+\varepsilon$

Remarque

R 3 – Graphiquement, à partir d'un certain rang, la courbe de f_n se situe dans la bande délimitée par les courbes $f-\varepsilon$ et $f+\varepsilon$.
La différence avec la convergence simple est que cette fois, le rang ne dépend que de ε, plus de x.

Propriété 1 : CU ⇒ CS

La convergence uniforme implique la convergence simple.

Propriété 2 : CU par majoration uniforme

S'il existe une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}}$ telle que

H1 $\alpha_n \to 0$

H2 $\underbrace{\forall n\in\mathbb{N},}_{\text{apcr suffit}}$ $\forall x\in X,\ |f_n(x)-f(x)| \leq \alpha_n$

ne dépend pas de x

alors

C1 *(f_n) converge uniformément vers f.*

Propriété 3 : Transmission du caractère borné par CU

On suppose que

H1 $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est bornée

H2 $f_n \xrightarrow{CU} f$

alors

C1 f est bornée

b Norme infinie

Définition 3 : Norme

On appelle **norme** sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E toute application $N : E \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant

Défini-positivité : $\forall x \in E,\ N(x) \geqslant 0$ et $N(x) = 0 \implies x = 0_E$

Homogénéité : $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall x \in E,\ N(\lambda x) = |\lambda|\, N(x)$

Inégalité triangulaire (ou sous-additivité) : $\forall x, y \in E,\ N(x+y) \leq N(x) + N(y)$

Propriété 4 : Utilisable directement

Si A est une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}^+$, alors $\sup(\lambda A) = \lambda \sup(A)$.

Définition 4 : Norme infinie

On définit, pour $f \in E = \mathscr{B}(X, \mathbb{K})$,

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|$$

Propriété 5 : La norme infinie est une norme

Il s'agit d'une norme sur $\mathscr{B}(X, \mathbb{K})$.

Remarque

R 4 – La preuve est à savoir faire.

c Lien avec la convergence uniforme

Propriété 6 : CU et norme infinie

Soit $f : X \to \mathbb{K}$ et $(f_n)_n$ une suite de fonctions appartenant à $\mathbb{K}^X$. $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{CU} f$ si et seulement si apcr $f_n - f$ bornée et $\|f_n - f\|_\infty \longrightarrow 0$.

Remarque

R 5 – Mais rien n'indique que les f_n soient bornées à priori.

Exemple

E 4 – $f_n : x \mapsto e^x + \frac{1}{n}$

⚠ Cas particulier.

Propriété 7 : Cas des fonctions bornées

Si les fonctions $f_n : X \to \mathbb{K}$ et $f : X \to \mathbb{K}$ sont bornées, alors

$$f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{CU} f \iff \|f_n - f\|_\infty \to 0$$

Propriété 8 : Non convergence uniforme

Si $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{CS} f$ et s'il existe $(x_n)_n \in X^{\mathbb{N}}$ telle que

$(f_n - f)(x_n) = f_n(x_n) - f(x_n) \not\longrightarrow 0$

alors la convergence de (f_n) n'est pas uniforme.

Méthode 1 : Étudier la convergence uniforme de $(f_n)_n$

- On étudie la convergence simple et on note f la limite.
- Puis pour prouver qu'il y a convergence uniforme :
  - ⋆ Soit on cherche à déterminer $\|f_n - f\|_\infty$ par exemple en étudiant les variations, puis on montre que $\|f_n - f\|_\infty \to 0$.
  - ⋆ Soit on majore uniformément les $|f_n(x) - f(x)|$, c'est-à-dire qu'on cherche $\alpha_n \to 0$ indépendant de x tel que $\forall x \in X, \quad |f_n(x) - f(x)| \leqslant \alpha_n$.
- Ou, pour prouver qu'il n'y a pas convergence uniforme :
  - ⋆ Soit les $(f_n)_n$ sont bornées mais pas f.
  - ⋆ Soit trouver $(x_n)_n$ telle que $f_n(x_n) - f(x_n) \not\to 0$. ou ... cf après

Exemple : On reprend les mêmes exemples

E5 – $f_n : x \mapsto \dfrac{n+x}{1+nx}$ sur $\mathbb{R}_*^+$.

E6 – $g_n : x \mapsto x^n$ sur $[0,1]$

E7 – h_n sur $[0,1]$.

Exercice 1 : CCINP 11

3 Convergence uniforme locale

On suppose que X est une réunion d'intervalles.

Remarque

élément ou borne finie

Voisinage de x_0

R6 – Soit $f : X \to \mathbb{K}$, $(f_n)_n$ une suite de fonctions appartenant à $\mathbb{K}^X$, $x_0 \in \overline{X}$.
La suite de fonctions $(f_n)_n$ **converge uniformément vers** f **au voisinage de** x_0 lorsqu'il existe un voisinage de x_0 sur lequel $(f_n)_n$ converge uniformément vers f, soit, de manière équivalente, s'il existe $\eta > 0$ tel que $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur $X \cap]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$.
Bien sûr, si $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur X, elle converge uniformément vers f au voisinage de tout point de X, mais, malheureusement, la réciproque est fausse.

R7 – Lorsque X n'est pas majoré, la suite de fonctions $(f_n)_n$ **converge uniformément vers** f **au voisinage de** $+\infty$ lorsqu'il existe un voisinage de $+\infty$ sur lequel $(f_n)_n$ converge uniformément vers f, soit, de manière équivalente, s'il existe $a > 0$ tel que $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur $X \cap [a, +\infty[$.

au v. de $-\infty$: sur $X \cap]-\infty, b]$ où $b \in \mathbb{R}$

Propriété 9 : CU sur tout segment ⇒ au v. de chaque point de X

Si la suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur tout segment inclus dans X, alors
$(f_n)_n$ CV uniformément au v. de chaque point de X.

Remarque

R8 – La convergence uniforme sur tout segment n'implique pas non plus la convergence uniforme sur X, ni la convergence au voisinage des bornes ouvertes de X.
De plus, la convergence uniforme sur tout segment n'implique pas la convergence uniforme au voisinage de $+\infty$.

Exemple

E8 – $g_n : x \mapsto x^n$ converge uniformément vers la fonction nulle sur tout segment de $[0,1[$, mais pas sur $[0,1[$ comme déjà vu.

II CONTINUITÉ ET LIMITE

1 Continuité

apcr suffit.

Théorème 1 : Limite uniforme de fonctions continues en un point

Soit $f : I \to \mathbb{K}$, $(f_n)_n$ une suite de fonctions appartenant à $\mathbb{K}^I$, $x_0 \in I$. On suppose que

H1 $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est continue en x_0

H2 $f_n \xrightarrow{CU} f$ au voisinage de x_0

Alors

C1 f est continue en x_0

Corollaire 1 : Limite uniforme de fonctions continues sur un intervalle

Soit $f : I \to \mathbb{K}$, $(f_n)_n$ une suite de fonctions appartenant à $\mathbb{K}^I$. On suppose que

H1 $\forall n \in \mathbb{N}$ $f_n \in \mathcal{C}^0(I)$

H2 $f_n \xrightarrow{CU} f$ au v. de tout point de I

Alors

C1 $f \in \mathcal{C}^0(I)$

Méthode 2 : Pour montrer qu'on n'a pas convergence uniforme...

Il suffit que les f_n soient continues mais pas f.

Exemple

E 9 – $g_n : x \mapsto x^n$ sur $[0, 1]$.

Exercice 2 : CCINP 9

2 Théorème de la double limite

Théorème 2 : de la double limite

Soit $f : I \to \mathbb{K}$, $(f_n)_n$ une suite de fonctions appartenant à $\mathbb{K}^I$, $(b_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $a \in \overline{I}$ éventuellement infini. On suppose que

élt ou borne de I.

H1 $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) \xrightarrow[x \to a]{} b_n$

H2 (f_n) converge uniformément au v. de a vers f

Alors on a $b \in \mathbb{K}$ tel que

C1 $(b_n)_n$ converge vers $b \in \mathbb{K}$

C2 $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} b$

Autrement dit, les limites existant bien :

$$\lim_{x \to a} \left(\lim_{n \to +\infty} f_n(x) \right) = \lim_{n \to +\infty} \left(\lim_{x \to a} f_n(x) \right).$$

Preuve non exigible

Remarque

R 9 – ⚠ Lorsque a est une borne ouverte de I, une convergence uniforme sur tout segment **ne suffit pas** !
(Mais lorsque $a \in I$, c'est simplement la continuité en a.)

Exemple

E 10 – $g_n : x \mapsto x^n$ en $a = 1$

Méthode 3 : Pour montrer qu'on n'a pas convergence uniforme...

Il suffit d'avoir a tel qu'on n'ait pas $\lim_{x \to a} \left(\lim_{n \to +\infty} f_n(x) \right) = \lim_{n \to +\infty} \left(\lim_{x \to a} f_n(x) \right)$ alors que ces limites existent.

III Approximations uniformes

1 Par des polynômes

Théorème 3 : de Weierstraß

On donne trois énoncés équivalents :

1) ▪ Toute fonction continue $\boxed{\text{sur un segment}}$ $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ est limite uniforme sur ce segment d'une suite de fonctions polynomiales

2) ▪ Si $f : [a, b] \to \mathbb{K}$ continue, il existe une suite de f° polynomiales $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $P_n \xrightarrow{CU} f$ sur $[a, b]$ ie $\|\underbrace{P_n - f}_{\text{borné car } C^0 \text{ sur un segment}}\|_\infty \to 0$

3) ▪ Si $f \in \mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{K})$,

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists p$ f° polynomiale sur $[a,b]$

telle que $\underbrace{\forall x \in [a,b], |p(x) - f(x)| \leq \varepsilon}_{\text{ie } \|p-f\|_\infty \leq \varepsilon}$

Preuve : non exigible cf TD.

Remarque

R 10 – Le résultat ne tient plus sur un intervalle non borné.

Exercice 3

Montrer que si une fonction polynomiale est bornée sur un intervalle qui ne l'est pas, elle est constante, puis qu'une limite uniforme de fonctions polynomiales sur un intervalle non borné est polynomiale.

2 Par des fonctions en escalier

Théorème 4 : Approximation uniforme d'une fonction CPM sur un segment par des fonctions en escalier

Toute fonction continue par morceaux sur un segment est limite uniforme d'une suite de fonctions en escalier sur ce segment.

Remarque

R 11 – On montre que pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver φ en escalier telle que $\|\varphi - f\|_\infty \leqslant \varepsilon$.
Alors, en posant $\varepsilon = \frac{1}{n+1}$, on obtient φ_n en escalier telle que $(\varphi_n)_n$ converge uniformément vers f.

IV SÉRIES DE FONCTIONS

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathbb{K}^X$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$, la somme partielle au rang n de la série de fonctions $\sum f_n$.

On souhaite étudier la suite de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en étudiant $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (sur le même schéma que les séries numériques.)

1 Convergence simple

Définition 5 : Convergence simple

On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ **converge simplement sur** X si

$(S_n)_n$ converge simplement sur X ie $\forall x \in X$, $\sum f_n(x)$ converge.

Lorsque c'est le cas,

- $f : x \in X \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ est appelée **somme** de la série de fonctions $\sum f_n$ et est notée $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$.
- Si $n \in \mathbb{N}$, $R_n = f - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k$ est le reste d'ordre n de la série de fonctions $\sum f_n$.

fonction de $x \in X$.

Remarque

R 12 – ⚠ f désigne ici la somme de la **série de fonctions** $\sum f_n$ et non la limite simple de la **suite de fonctions** (f_n).

R 13 – Ainsi, la **serie** de fonctions $\sum f_n$ converge simplement si et seulement si la **suite** de fonctions (S_n) converge simplement, et dans ce cas, $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{CS} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n = f$

R 14 – Lorsque la série $\sum f_n$ converge simplement, la suite $(f_n)_n$ converge simplement vers la fonction nulle, et la réciproque est fausse.

R 15 – La somme d'une série de fonction (et le reste si elle converge simplement) sont des fonctions.

Exemple : Étudier la convergence simple de $\sum f_n$

E 11 – $f_n : x \mapsto e^{-\sqrt{n}x}$

E 12 – $f_n : x \mapsto \dfrac{\cos(nx)}{1+n^2x^2}$

E 13 – $f_n : x \mapsto \dfrac{1}{n^x}$
Lorsque cela a un sens, on appelle **fonction ζ de Riemann** la fonction

$x \in]1,+\infty[$

$$\zeta : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}.$$

2 Convergence uniforme

Définition 6 : Convergence uniforme

On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ **converge uniformément** sur X lorsque

(S_n) converge uniformément sur X

c'est-à-dire lorsqu'il existe $f : X \to \mathbb{K}$ tel que

- apcr $(S_n - f)$ bornée
- $\|S_n - f\|_{\infty, X} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Remarque

R 16 – On définit aussi de même la convergence uniforme au voisinage d'un point (fini ou non) de la série de fonction comme convergence uniforme locale de (S_n).

$CU \Rightarrow CS$

Propriété 10 : ~~CS ⇒ CU~~

Si $\sum f_n$ converge uniformément sur X alors elle converge simplement sur X.

Propriété 11 : CU par majoration uniforme

Si on a une suite réelle $(\alpha_n)_n$ telle que

H1 $\alpha_n \longrightarrow 0$

H2 $\forall n \in \mathbb{N}, \ \forall x \in X, \ \underbrace{|S_n(x) - f(x)|}_{=|R_n(x)|} \leq \alpha_n$ (ou apcr)

alors

C1 *$\sum f_n$ converge uniformément sur X vers f.*

Rq : $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ donc $f - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k = R_n$ reste d'ordre n

Propriété 12 : CU par CU des restes vers la fonction nulle

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions convergeant simplement sur X, R_n le reste d'ordre n.

$\sum f_n$ CV uniformément ssi (R_n) CVU vers $\tilde{0} : x \mapsto 0$

série de f°

suite de f°

Exercice 4 : CCINP 8

Propriété 13 : Condtion nécessaire de CU

Si la série de fonction $\sum f_n$ converge uniformément sur X, alors

la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers $\tilde{0}$. Réciproque fausse.

Méthode 4 : Pour montrer que $\sum f_n$ ne converge pas uniformément

On peut rechercher $(a_n) \in X^{\mathbb{N}}$ telle que $f_n(a_n) \not\to 0$.

Exercice 5 : CCINP 17

Méthode 5 : Montrer directement une convergence uniforme de série de fonctions

Ce n'est pas simple en général. On commence par la convergence simple de $\sum f_n$ vers f. Puis on peut tenter

- de majorer uniformément (en x) directement $|R_n| = |S_n - f|$ par $\alpha_n \longrightarrow 0$.
- de calculer le reste (séries géométriques, télescopiques),
- d'utiliser le critère sur les séries alternées,
- d'effectuer une comparaison série-intégrale.

En réalité, la plupart du temps, il y a plus simple : la convergence normale.

Exemple

E 14 – Fonction ζ sur $]1, +\infty[$

3 Convergence normale

apcr suffit

Définition 7 : Convergence normale

On dit que la série $\sum f_n$ **converge normalement** sur X lorsque les f_n sont toutes bornées et la série numérique $\sum \|f_n\|_\infty$ converge.

série numérique

Propriété 14 : La convergence normale implique la convergence uniforme et la convergence absolue

Lorsque la série $\sum f_n$ converge normalement sur X,

- *elle converge uniformément,*
- *pour tout $x \in I$, la série numérique $\sum f_n(x)$ converge absolument.*

Remarque

R 17 – On a le diagramme

$$\begin{tikzcd} & \text{CV uniforme} \arrow[dr, Rightarrow] & \\ \text{CV normale} \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & & \text{CV simple} \\ & \text{CV absolue} \arrow[ur, Rightarrow] & \end{tikzcd}$$

Les réciproques sont fausses.

R 18 – En cas de convergence normale locale / sur tout segment, on en tire une convergence uniforme du même type.

Exemple

E 15 – Pour la fonction ζ, il n'y a pas convergence normale sur $]1, +\infty[$, mais sur tout $[a, +\infty[$. On retrouve la convergence uniforme.

E 16 – $\sum n^\alpha x e^{-n^2 x}$ converge normalement sur $\mathbb{R}^+$ si et seulement si $\alpha < 1$. Sinon, convergence normale sur $[a, +\infty[$.

Méthode 6 : Convergence normale par domination

Pour montrer que $\sum f_n$ converge normalement sur X, on peut rechercher $(\alpha_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in X$, $|f_n(x)| \leqslant \alpha_n$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|f_n\|_\infty \leqslant \alpha_n$
- $\sum \alpha_n$ converge.

alors $\sum \|f_n\|_\infty$ CV par CSTAP

Exemple

E 17 – $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{n^2}$.

Propriété 15 : Critère séquentiel de non convergence normale

S'il existe $(a_n)_n$ telle que $\sum f_n(a_n)$ ne CV pas absolument alors $\sum f_n$ ne CV pas normalement.

Exemple

E 18 – $f_n(x) = x e^{-n^2x^2}$ sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 6 : CCINP 15

4 Continuité

Théorème 5 : Transfert de continuité

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions appartenant à $\mathbb{K}^I$. On suppose que

H1 $\forall n \in \mathbb{N},\ f_n \in \mathcal{C}^0(I)$

H2 $\sum f_n$ CVU au voisinage de chaque $x \in I$

Alors

C1 $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \in \mathcal{C}^0(I)$.

Exemple

E 19 – ζ est continue sur $]1,+\infty[$.

Exercice 7 : CCINP 18

5 Double limite

Théorème 6 : de la double limite

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions appartenant à $\mathbb{K}^I$, $(b_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $a \in \bar{I}$ éventuellement infini. On suppose que

H1 $\forall n \in \mathbb{N},\ f_n(x) \xrightarrow[x \to a]{} b_n$

H2 $\sum f_n$ cv uniformément au voisinage de a

Alors

C1 $\sum b_n$ converge

C2 $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \xrightarrow[x \to a]{} \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$

Autrement dit, les limites existant bien :

$$\lim_{x\to a} \sum_{k=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lim_{x\to a} f_n(x).$$

Remarque

R 19 – ⚠ Lorsque a est une borne ouverte de I, une convergence uniforme sur tout segment **ne suffit pas** !

Exemple

E 20 – ζ en $+\infty$.

Exercice 8

On pose $f_n : x \mapsto \dfrac{1}{1+n^2x^2}$.

1. Étudier la convergence simple de $\sum f_n$.
2. Montrer que la somme f de la série de fonctions est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Montrer qu'il n'y a pas de convergence normale sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. Calculer la limite de f en $+\infty$.

Exercice 9 : CCINP 53

Exercice 10 : Contre-exemple en 0 sur tout segment

Soit $f_n : x \mapsto \dfrac{x}{(1+x^2)^n}$.

1. Étudier la convergence simple puis calculer la somme f de la série de fonctions $\sum f_n$.
2. Montrer qu'il y a convergence normale sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$.
3. Que penser de la double-limite en 0^+ ?

Méthode 7 : Pour montrer une absence de convergence uniforme...

... on peut utiliser la contraposée du théorème de la double limite.

Typiquement, lorsque la série des limites en a est divergente, ou lorsque les deux limites finales ne sont pas égales, c'est qu'il y a un défaut de convergence uniforme au point a.

Exercice 11 : Fonctions ζ de Riemann et η de Dirichlet

On pose $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^x}$ et $\eta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^x}$.

1. Pour quelles valeurs de x peut-on définir $\zeta(x)$?
2. Sur quel type d'intervalles a-t-on convergence normale ?
3. Étudier les variations de ζ.
4. Calculer la limite en $+\infty$.
5. Calculer la limite en 1. Le théorème de la double-limite s'applique-t-il ? Que peut-on en déduire ?
6. Donner un équivalent de ζ en 1 par comparaison série-intégrale.
7. Tracé le graphe de ζ.
8. Pour quelles valeurs de x peut-on définir $\eta(x)$? Sur quel type d'intervalles a-t-on convergence normale ? uniforme ?
9. Montrer que si $x > 1$, $\eta(x) = \left(2^{1-x} - 1\right)\zeta(x)$. Retrouver l'équivalent de ζ en 1.