Savoir-faire et thèmes classiques – Dénombrement, Dénombrabilité, sommabilité

Savoir-faire

- ☐ Manipuler les cardinaux des ensembles finis
- ☐ Effectuer des dénombrements de base en étudiant les situations : ordre important ou non, avec ou sans répétitions, disjonction de cas, etc.
- ☐ Connaître les formules concernant les cœfficients binomiaux
- ☐ Calculer des sommes finies en utilisant des télescopages, des sommes géométriques (dont l'indexation peut commencer à autre chose que 0), la somme des k^j pour $j \in \{1,2,3\}$, le binôme de Newton, des sommes de terme général $\cos(ak+b)$ ou $\binom{n}{k}\cos(ak+b)$ ou en remplaçant $\cos$ par $\sin$, ch ou sh.
- ☐ Montrer une (au plus) dénombrabilité directement, par inclusion, par produit cartésien, avec une surjection depuis $\mathbb{N}$, avec une réunion au plus dénombrable
- ☐ Montrer une non dénombrabilité par argument diagonal (exemple : $]0,1[$)
- ☐ Montrer une sommabilité dans le cas réel positif par calcul dans $[0,+\infty]$, en utilisant une sommation par paquet, Fubini, somme double produit
- ☐ Ramener l'étude d'une famille sommable à celle d'une série
- ☐ Obtenir une sommabilité par comparaison
- ☐ Obtenir une sommabilité en rajoutant des modules et en travaillant dans $[0,+\infty]$
- ☐ Reconnaître et calculer un produit de Cauchy

Thèmes Classiques

- ☐ Théorème de Cantor ; $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable
- ☐ Manipulation des sommes indexées par $\mathbb{Z}$
- ☐ Familles sommables faisant intervenir ζ
- ☐ $(*)$ Nombre de dérangements, nombre de surjections (voir formule d'inversion de Pascal)

Savoir-faire et thèmes classiques – Structures algébriques et arithmétique

1 Structures algébriques

Savoir-faire

- ☐ Utiliser la définition d'un groupe, d'un groupe abélien
- ☐ Connaître les groupes classiques
- ☐ Utiliser la caractérisation d'un sous-groupe, reconnaître un groupe en tant que produit cartésien, qu'intersection, que groupe engendré par une partie, image directe ou réciproque d'un sous-groupe par un morphisme de groupe (par exemple son noyau ou son image), ensemble des inversibles d'un anneau
- ☐ Connaître les sous-groupes de $(\mathbb{Z},+)$
- ☐ Montrer qu'on a un morphisme de groupe, calculer son noyau
- ☐ Traduire l'injectivité et la surjectivité d'un morphisme de groupe avec son noyau ou son image
- ☐ Définir le sous-groupe engendré par une partie, décrire ses éléments
- ☐ Utiliser la définition d'un anneau, d'un anneau commutatif
- ☐ Connaître les anneaux classiques
- ☐ Faire des calculs dans un anneau avec hypothèses adaptées (binôme, $a^n - b^n$, somme géométrique...)
- ☐ Utiliser la définition d'un corps
- ☐ Connaître les corps classiques
- ☐ Utiliser la définition d'un anneau intègre, la régularité de ses éléments, le fait qu'un corps le soit
- ☐ Reconnaître un sous-anneau, un anneau comme anneau produit, un sous-corps
- ☐ Montrer qu'on a un morphisme d'anneaux, calculer son noyau
- ☐ Définir un idéal d'un anneau commutatif
- ☐ Voir le noyau d'un morphisme d'anneau comme un idéal, l'image comme un sous-anneau
- ☐ Définir un idéal et un anneau principal
- ☐ Caractériser la divisibilité avec les idéaux, définir les PGCD et PPCM en termes d'idéaux
- ☐ Utiliser la définition d'une algèbre
- ☐ Connaître les algèbres classiques
- ☐ Définir un polynôme en un élément d'une algèbre
- ☐ Définir un morphisme d'algèbres

Thèmes Classiques

- ☐ CNS pour qu'une réunion de sous-groupes (ou sev) le soit encore
- ☐ $(*)$ Sous-groupes de $(\mathbb{R},+)$
- ☐ Théorème de Lagrange
- ☐ Centre d'un groupe
- ☐ $(*)$ Sous-groupes distingués
- ☐ Idéaux annulateurs, premiers
- ☐ Nilpotents d'un anneau
- ☐ Entiers de Gauß
- ☐ Anneau de Boole $(\mathscr{P}(E),\Delta,\cap)$
- ☐ $(*)$ Radical d'un idéal

2 Arithmétique entière

Savoir-faire

- ☐ Définir PGCD et PPCM à l'aide d'idéaux, les caractériser à l'aide de l'ordre partiel de division, les calculer à partir de décompositions primaires
- ☐ Utiliser la propriété d'Euclide, l'algorithme d'Euclide, l'algorithme d'Euclide étendu
- ☐ Résoudre une équation diophantienne $ax + by = c$ dans $\mathbb{Z}$
- ☐ Définir des nombres premiers entre eux, s'y ramener par factorisation du PGCD, utiliser le théorème de Bézout, le lemme de Gauß, et les autres propriétés du programme les concernant
- ☐ Définir les nombres premiers, utiliser leurs propriétés, montrer qu'ils sont en nombre infini, écrire une décomposition primaire
- ☐ Définir une valuation p-adique et connaître ses propriétés
- ☐ Définir la relation de congruence modulo n, traduire que deux nombres sont congrus modulo n par un argument de divisibilité
- ☐ Connaître les critères de divisibilité par $2, 3, 4, 5, 8, 9, 10, 11$
- ☐ Obtenir une divisibilité par calcul modulaire
- ☐ Connaître le petit théorème de Fermat
- ☐ Calculer les puissances d'un entier modulo n : soit en trouver une cyclicité à la main, soit en utilisant le petit théorème de Fermat

Thèmes Classiques

- ☐ Nombres de Mersenne et de Fermat
- ☐ Formule de Legendre
- ☐ Triplets pythagoriciens
- ☐ Fonction et inversion de Möbius
- ☐ Carrés dans $\mathbb{F}_p$
- ☐ Théorème de Wilson
- ☐ Chiffrement RSA