17
Dénombrabilité, Sommabilité

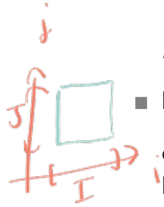
I Rappels...

1 ... sur des sommes finies

- Il faut connaître $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$, $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ et $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ et savoir continuer, par télescopage de $(k+1)^n - k^n$.
- On sait aussi calculer $\sum_{k=0}^{n} x^k = \begin{cases} n+1 & \text{si } x = 1 \\ \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \end{cases}$

  Si $x \neq 1$, $\sum_k x^k = 1^{er}\text{ terme} \times \frac{1-x^{\text{nb termes}}}{1-x}$

  $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \underset{\times 1^{n-k}}{=} (x+1)^n$

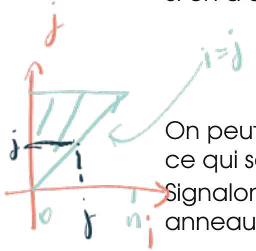


- La formule $\sum_{i\in I}\left(\sum_{j\in J} a_{i,j}\right) = \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I} a_{i,j}\right)$, si I et J sont deux ensembles finis, est une conséquence de la commutativité et de l'associativité de l'addition.
  Dans le cas de sommes triangulaires, l'interversion peut aussi se faire en étant prudent sur les bornes : par exemple, il faut être à l'aise avec

$$\sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=i}^{n} a_{i,j}\right) = \sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant n}\left(a_{i,j}\right) = \sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{i=0}^{j} a_{i,j}\right).$$

Si on a une hésitation, un artifice simple : posons $a_{i,j} = 0$ si $j < i$. Alors

$$\sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=i}^{n} a_{i,j}\right) = \sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{n} a_{i,j}\right) = \sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{i=0}^{n} a_{i,j}\right) = \sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{i=0}^{j} a_{i,j}\right).$$



On peut aussi représenter l'ensemble des couples (i,j) d'indexation pour « voir » ce qui se passe.
Signalons enfin la distributivité de la multiplication sur l'addition (si on est dans un anneau), qui permet d'écrire

$$\left(\sum_{i\in I} a_i\right)\left(\sum_{j\in J} b_j\right) = \sum_{i\in I}\left(\sum_{j\in J} a_i b_j\right) = \sum_{(i,j)\in I\times J} a_i b_j$$

2 ... et sur les ensembles finis

Définition 1 : Ensemble fini, cardinal

Un ensemble E est dit **fini** s'il est vide ou s'il existe un $n \in \mathbb{N}^*$ et une bijection entre $[\![1,n]\!]$ et E.
n est le **cardinal** de E, noté $|E| = \#E = \mathrm{Card}E$.
On pose $|\varnothing| = 0$.

Remarque

R1 – On dit aussi que E est équipotent à $[\![1,n]\!]$.
Cela revient à numéroter les éléments de E : $E = \{x_k, k \in [\![1,n]\!]\}$.

$$f : \begin{array}{l} [\![1,n]\!] \longrightarrow E \\ k \longmapsto f(k) = x_k \end{array}$$

Propriété 1 : des cardinaux

Soient E, F deux ensembles finis.

(i) *Si $A \in \mathscr{P}(E)$, A fini et $|A| \leqslant |E|$, avec égalité si et seulement si $A = E$.*
(ii) *Si $A, B \in \mathscr{P}(E)$ disjoints ($A \cap B = \varnothing$), $|A \cup B| =$* $|A \sqcup B| = |A| + |B|$
(iii) *Si $A, B \in \mathscr{P}(E)$, $|A \cup B| =$* $|A| + |B| - |A \cap B|$
(iv) *Si $A \in \mathscr{P}(E)$, $|E \setminus A| =$* $|E| - |A|$
(v) *si $A, B \in \mathscr{P}(E)$, $|A \setminus B| =$* $|A| - |A \cap B|$ ⚠
(vi) *$E \times F$ est fini et $|E \times F| =$* $|E| \times |F|$
(vii) *F^E est fini et $|F^E| =$* $|F|^{|E|}$
(viii) *$\mathscr{P}(E)$ est fini et $|\mathscr{P}(E)| =$* $2^{|E|}$

f° de $E \to F$

(ix) $\mathfrak{S}(E)$ fini et $|\mathfrak{S}(E)| = |E|!$

bijections $E \to E$ = permutations de E.

Exercice 1 : CCINP 112

II Ensembles dénombrables

1 Définition

Définition 2 : Ensemble dénombrable, énumération

E est dit dénombrable s'il est équipotent à $\mathbb{N}$
ie s'il existe $f : \mathbb{N} \to E$ bijection.
On parle d'énumération de E

$f : \begin{array}{|l} \mathbb{N} \longrightarrow E \\ n \longmapsto x_n \end{array}$

Remarque

R 2 – On peut compter ses éléments... sans s'arrêter !
Il a en quelques sortes autant d'éléments que $\mathbb{N}$.
On peut écrire $E = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$.
Trouver une bijection entre E et $\mathbb{N}$, ou entre $\mathbb{N}$ et E, cela revient au même.

Exemple

E 1 – $\mathbb{N}$ est dénombrable. $id : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ énumération.

E 2 – $2\mathbb{N}$ est dénombrable. $f : \begin{array}{|l} \mathbb{N} \longrightarrow 2\mathbb{N} \\ n \longmapsto 2n \end{array}$ de réciproque $g : \begin{array}{|l} 2\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \\ n \longmapsto \frac{n}{2} \end{array}$

$f \circ g = id_{2\mathbb{N}}$
$g \circ f = id_{\mathbb{N}}$

E 3 – $2\mathbb{N}+1$ est dénombrable.

$f : \begin{array}{|l} \mathbb{N} \longrightarrow 2\mathbb{N}+1 \\ n \longmapsto 2n+1 \end{array}$

Propriété 2 : Cas des parties infinies de $\mathbb{N}$

Toute partie infinie de $\mathbb{N}$ est dénombrable.

On retrouve E1, E2, E3.

Exemple

E 4 – On retrouve la dénombrabilité de $2\mathbb{N}$ et $2\mathbb{N}+1$.

Propriété 3 : Dénombrabilité de $\mathbb{Z}$

$\mathbb{Z}$ est dénombrable.

2 Ensembles au plus dénombrables

Définition 3 : Ensemble au plus dénombrable

Un ensemble au plus dénombrable est un ensemble fini ou dénombrable.

Propriété 4 : Caractérisation

Un ensemble est au plus dénombrable si et seulement si il est équipotent (ie en bijection) à une partie de $\mathbb{N}$.

Corollaire 1 : Partie d'un ensemble dénombrable

Une partie d'un ensemble dénombrable est au plus dénombrable.

3 Produit cartésien

Propriété 5 : Dénombrabilité de $\mathbb{N}^2$

$\mathbb{N}^2$ est dénombrable.

Propriété 6 : Produit cartésien d'ensembles dénombrables

Un produit cartésien d'un nb fini d'ensemble dénombrable l'est.
En particulier, tout $\mathbb{N}^p$ où $p \geqslant 1$ est dénombrable.

Théorème 1 : Dénombrabilité de $\mathbb{Q}$

$\mathbb{Q}$ est dénombrable.

4 Réunion d'ensembles dénombrables

On commence par le lemme très intuitif suivant :

Lemme 1

Soit E un ensemble non vide. Il y a équivalence entre

(i) *E est au plus dénombrable.*

(ii) *Il existe une surjection entre $\mathbb{N}$ et E*

(iii) *Il existe une injection entre E et $\mathbb{N}$*

Exemple

E 5 – On retrouve la dénombrabilité de $\mathbb{Q}$

Propriété 7 : Réunion au plus dénombrable d'ensembles au plus dénombrables

Une réunion au plus dénombrable d'ensembles au plus dénombrables l'est encore.

Exemple

E 6 – On retrouve la dénombrabilité de $\mathbb{Q}$

Exercice 2 : Montrer qu'un ensemble E est au plus dénombrable si et seulement s'il existe une famille $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties finies telles que $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$, qu'on peut supposer croissante.

5 Ensembles non dénombrables

Remarque : Rappel

R 3 – Tout nombre réel non décimal admet un unique développement décimal.
Les décimaux en ont deux. Par exemple $3{,}1416 = 3{,}141599999...$
Tout réel admet un unique développement décimal ne se terminant pas par une infinité de 9 appelé développement décimal propre.

Théorème 2 : Non dénombrabilité de $\mathbb{R}$

$\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

Remarque

R 4 – $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ n'est pas dénombrable non plus, sinon $\mathbb{R}$ le serait.

Théorème 3 : de Cantor (HP)

Si E est un ensemble non vide, il n'existe pas de surjection de E dans $\mathscr{P}(E)$.

Corollaire 2 : Non dénombrabilité de $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ (HP)

$\mathscr{P}(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable.

Exercice 3 : Dénombrabilité ou non de $\mathbb{N}^{(\mathbb{N})}$ et $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$

III Sommabilité

1 Introduction

Remarque : Digression sur une série semi-convergente

R5 – On sait que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{n+1}$ est convergente et que sa somme vaut $\ln 2$ avec trois méthodes (à savoir faire !)

- soit en utilisant le développement asymptotique $H_n = \ln n + \gamma + o(1)$ de la série harmonique et en séparant termes d'ordre pair ou impair,
- soit avec une inégalité de Taylor-Lagrange appliquée entre 0 et 1 à $x \mapsto \ln(1+x)$,
- soit encore en voyant que $\frac{1}{n+1} = \int_0^1 t^n \,\mathrm{d}t$ et en reconnaissant une somme géométrique.

Ainsi,

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots = \ln 2.$$

Il se trouve que l'ordre des termes est important dans cette somme.
Ainsi, en sommant un terme d'indice impair puis deux d'indices pairs, on peut obtenir

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \cdots = \frac{\ln 2}{2}.$$

En effet, on peut, dans une somme partielle, regrouper le terme d'ordre impair et le terme d'ordre pair qui le suit immédiatement et obtenir

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \cdots = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots\right) = \frac{\ln 2}{2}.$$

(Bien sûr, il faudrait le formaliser plus rigoureusement, mais c'est l'idée).
On peut en fait démontrer qu'en réordonnant les termes, on est capable d'obtenir n'importe quel nombre réel et même $\pm\infty$.
Par exemple, en regroupant les termes positifs par paquets toujours $\geqslant \frac{1}{4}$ (ce qui est toujours possible) :

$$(1) - \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right) - \dots$$

on obtient une série qui diverge grossièrement (la suite extraite des termes de rangs pairs ne tend pas vers 0).
De plus, en faisant des regroupement de « paquets », il est possible de trouver des séries divergentes : c'est ce qui arriverait si on rassemblait d'une part les termes d'indice pair et d'autre part les termes d'indice impair.
Bref, la convergence n'est « ni commutative, ni associative », même si la série initiale était convergente.
Remarquons que dans une série divergente comme $\sum (-1)^n$, on peut avec des paquets, la rendre convergente : $(1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots$ converge vers 0.
Toutes les séries ne demandent pas tant de précautions. Par exemple, la série absolument convergente $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ converge vers $\frac{\pi^2}{6}$ et ce, quel que soit l'ordre des termes, avec ou non des paquets, finis ou infinis : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ peut être manipulée comme une somme finie.
Lorsque l'ordre des termes n'importe plus, on n'est plus obligé de se limiter à des sommes indexées par $\mathbb{N}$: on peut sommer des familles indexées par n'importe quel ensemble dénombrable : $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}^2$, $\mathbb{Q}$...

2 Familles de réels positifs

a Calculs dans $[0,+\infty]$

Définition 4 : Opération et ordre dans $[0,+\infty]$

On note $[0,+\infty] = [0,+\infty[\cup\{+\infty\} = \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$.

On étend les lois $+$, $\times$ ainsi que l'ordre $\leqslant$ de la manière suivante : si $a \in [0,+\infty[$,

- $a + (+\infty) = (+\infty) + a = (+\infty) + (+\infty) = +\infty$.
- Si $a > 0$, $a \times (+\infty) = (+\infty) \times a = (+\infty) \times (+\infty) = +\infty$.
- $a < +\infty$ et $+\infty \leqslant +\infty$.

Enfin, on appelle **borne supérieure** d'une partie A non vide de $[0,+\infty]$ le plus petit des majorants de A dans $[0,+\infty]$.

Propriété 8 : Détermination de la borne supérieure

Si $A \subset \mathbb{R}^+$ est majorée dans $\mathbb{R}$, c'est le $\sup_{\mathbb{R}} A$ dans $\mathbb{R}$ que l'on connaît bien.

Si $A \subset \mathbb{R}^+$ non majorée dans $\mathbb{R}$ ou si A contient $+\infty$, alors $\sup A = +\infty$.

Remarque

R 6 – Les propriétés de calcul dans $[0,+\infty]$ sont les mêmes que dans $\mathbb{R}$ (associativité, commutativité, distributivité, compatibilité de l'ordre avec les opérations...), pourvu qu'on évite de multiplier $+\infty$ par 0...

⚠ aux différences qui pourraient être < 0 ou non définies

b Sommes de familles de réels positifs

Définition 5 : Sommes de familles de réels positifs

Soit I ensemble quelconque (fini ou infini, éventuellement non dénombrable). On note ici $\mathscr{P}_f(I)$ l'ensemble des parties finies de I.

Soit $(u_i)_{i\in I} \in (\mathbb{R}^+)^I$ une famille de **réels positifs** indexée par I.

On appelle **somme** de la famille, notée $\sum_{i\in I} u_i$ la borne supérieure dans $[0,+\infty]$ de $A = \left\{\sum_{i\in J} u_i,\ J \in \mathscr{P}_f(I)\right\}$:

$$\sum_{i\in I} u_i = \sup A = \sup_{J\in\mathscr{P}_f(I)} \left(\sum_{i\in J} u_i\right)$$

Vraie somme ! (finie)

fausse somme !

Remarque

R 7 – On va voir un peu plus loin qu'il est nécessaire que $\{i \in I,\ u_i \neq 0\}$ soit au plus dénombrable pour que la somme (qui est une borne supérieure) soit finie.
Mais la particularité des réels positifs de pouvoir travailler dans $[0,+\infty]$ permet de considérer dans cette partie des ensembles d'indices I quelconque.

Propriété 9 : Cas des sommes finies

*On suppose que $I = \{i_1, \ldots, i_p\}$ est fini. Alors la somme de **réels positifs** définie précédemment est bien égale à $\sum_{k=1}^{p} u_{i_k}$, le $\sup$ étant ici fini (c'est même un $\max$).*

Propriété 10 : Cas des séries

*Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}}$ une famille de **réels positifs**. Alors le nombre $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n \in [0,+\infty]$ défini précédemment est égal à $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ si la série est convergente, et $+\infty$ sinon.*

On se permet donc d'utiliser les deux notations indifféremment, et de noter $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = +\infty$ lorsque la série est divergente.

Propriété 11 : Comparaison

- *Si pour tout $i \in I$, $0 \leqslant a_i \leqslant b_i$* $\sum_{i\in I} a_i \leqslant \sum_{i\in I} b_i$ (dans $[0,+\infty]$)

  En particulier, si $\sum_{i\in I} b_i < +\infty$, alors $\sum_{i\in I} a_i < +\infty$.
- *Si $I' \subset I$,* $\sum_{i\in I'} a_i \leqslant \sum_{i\in I} a_i$

c Sommabilité dans le cas positif

Définition 6 : Famille sommable de réels positifs

Soit I un ensemble, $(u_i)_{i\in I}$ une famille de **réels positifs**.
On dit que $(u_i)_{i\in I}$ est **sommable** lorsque $\sum_{i\in I} u_i < +\infty$.

Propriété 12 : Dénombrabilité de l'ensemble d'indice

Si $(u_i)_{i\in I}$ une famille sommable de réels positifs, alors $\{i \in I,\ u_i \neq 0\}$ est au plus dénombrable.

d Invariance par permutation

Remarque

R8 – Une permutation de I est une bijection de I sur I.

$\mathfrak{S}(I) = \{$permutations de $I\}$

Propriété 13 : Invariance par permutation

*Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de **réels positifs**, I étant dénombrable. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}(I)$ une permutation de I. Alors dans $[0,+\infty]$.*

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{i\in I} u_{\sigma(i)}$$

Propriété 14 : Cas dénombrable : écriture sous forme de série

*Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de **réels positifs**, I étant **dénombrable**.*
Soit $n \mapsto i_n$ une bijection de $\mathbb{N}$ sur I (ie une énumération de I).
Alors dans $[0,+\infty]$. $\sum_{i\in I} u_i = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{i_n}$

Remarque

R9 – Quitte à retirer les termes nuls, dans le cas dénombrable, on se ramène à une étude de série ; dans le cas fini, c'est facile ; dans les autres cas, c'est $+\infty$.

Corollaire 3 : Invariance par permutation d'une série

Si $\sum a_n$ est une série à termes réels positifs et $\sigma \in \mathfrak{S}(\mathbb{N})$, alors

$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{\sigma(n)}$ dans $(0,+\infty)$.

d'après prop 10 et 13. $\square$

e Linéarité

Propriété 15 : Linéarité, cas des réels positifs

Si I est un ensemble quelconque, $a=(a_i)_{i\in I}$ et $b=(b_i)_{i\in I}$ des familles de réels positifs, $\lambda\in\mathbb{R}^+$.

Alors $\sum_{i\in I}(a_i+\lambda b_i) = \sum_{i\in I} a_i + \lambda \sum_{i\in I} b_i$ dans $[0,+\infty]$

(Ici, on pose $0\times(+\infty)=0$.)

f Sommation par paquets

Théorème 4 : sommation par paquets

Soit I un ensemble quelconque, réunion disjointe des I_j pour $j\in J$:

$$I = \bigsqcup_{j\in J} I_j$$

(presque une partition : il peut y avoir des I_j vides. On parle de recouvrement disjoint.)

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de ***réels positifs****. Alors*

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I_j} u_i\right) \text{ dans } [0,+\infty]$$

Remarque

R 10 – On travaille dans $[0,+\infty]$. Si l'une [a] des $\sum_{i\in I_j} u_i$ vaut $+\infty$, alors $\sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I_j} u_i\right)=+\infty$.

Autrement dit, dans une somme d'éléments de $[0,+\infty]$, si l'un des termes vaut $+\infty$, c'est aussi le cas de la somme.

a. Ici, on parle de borne supérieure plutôt que de somme, vous suivez ?.

Démonstration : Hors Programme

On a déjà que si l'une des $\sum_{i\in I_j} u_i = +\infty$, alors, comme les parties finie de I_j sont des parties finies de I, $+\infty = \sum_{i\in I_j} u_i \leqslant \sum_{i\in I} u_i$ qui vaut $+\infty$.

On peut donc supposer que pour tout $j\in J$, $\sum_{i\in I_j} u_i < +\infty$.

Notons $S=\sum_{i\in I} u_i$ et $S'=\sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I_j} u_i\right)$.

Soit K une partie finie de I. Pour tout $k\in K$, il existe un unique $j_k\in J$ tel que $k\in J_{j_k}$. Soit $J'=\{j_k,\ k\in K\}$.

Alors $\sum_{k\in K} u_k \leqslant \sum_{j\in J'}\left(\sum_{i\in I_j} u_i\right) \leqslant \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I_j} u_i\right)$ et, en passant au $\sup$

$$\sum_{i\in I} u_i \leqslant \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I_j} u_i\right).$$

Réciproquement, soit J' une partie finie de J. Ré-indexons $I_1,\dots,I_p$ les I_j pour $j\in J'$. Pour toutes parties finies $K_1,\dots,K_p$ de $I_1,\dots,I_p$ respectivement, on a

$$\sum_{\ell=1}^{p}\left(\sum_{i\in K_\ell} u_i\right) = \sum_{i\in K_1\cup\cdots\cup K_p} u_i \leqslant \sum_{i\in I} u_i.$$

Soit $\varepsilon>0$. Pour tout $\ell\in[\![1,p]\!]$, il existe, par caractérisation de la borne supérieure, K_ℓ partie finie de I_ℓ telle que

$$\sum_{i\in I_\ell} u_i - \frac{\varepsilon}{p} \leqslant \sum_{i\in K_\ell} u_i.$$

On a alors

$$\sum_{j\in J'}\left(\sum_{i\in I_j} u_i\right) - \varepsilon \leqslant \sum_{\ell=1}^{p}\left(\sum_{i\in K_\ell} u_i\right).$$

Donc pour tout $\varepsilon>0$,

$$\sum_{i\in I} u_i \geqslant \sum_{j\in J'}\left(\sum_{i\in I_j} u_i\right) - \varepsilon$$

puis, en faisant $\varepsilon\to 0$, $\sum_{i\in I} u_i \geqslant \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I_j} u_i\right)$, qui est donc bien une égalité. ■

Exercice 4 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une famille de réels positifs. Montrer que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=1}^{+\infty} u_{-n}$.

g Théorème de Fubini positif

Théorème 5 : de Fubini, cas positif

Soit $(u_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ une famille de réels positifs. Alors toujours dans $[0,+\infty]$.

$$\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} u_{m,n} = \sum_{m=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_{m,n}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{m=0}^{+\infty} u_{m,n}\right)$$

somme par colonnes

somme par lignes

Remarque

R 11 – Voir le parallèle avec le théorème d'intégration terme à terme (interversion série-intégrale) dans le cas de fonctions à valeurs réelles positives.

R 12 – Ce n'est pas la seule façon de procéder.

On peut former d'autres paquets, en sommant par exemple par diagonales au lieu de sommer par lignes ou par colonnes et obtenir des énoncés analogues.

Exercice 5 : Calculer la somme de $\left(\dfrac{1}{(mn)^2}\right)_{(m,n)\in\mathbb{N}_*^2}$.

(Voir généralisation plus loin : sommes doubles produits)

Exercice 6 : Montrer que la famille $\left(\dfrac{1}{(m+n)^4}\right)_{(m,n)\in\mathbb{N}^2\setminus\{(0,0)\}}$ **est sommable et exprimer sa somme comme somme d'une série.**

Exercice 7 : Montrer que $\left(\dfrac{1}{m^2+n^2}\right)_{(m,n)\in\mathbb{N}_*^2}$ **n'est pas sommable.**

Exercice 8

1. **Pour quelles valeurs du réel α la famille** $\left(\dfrac{1}{(m^2+n^2)^\alpha}\right)_{(m,n)\in\mathbb{N}_*^2}$ **est-elle sommable ?**
2. **Démontrer que, pour tous m et n positifs,** $\frac{1}{2}(m+n)^2 \leqslant m^2+n^2 \leqslant (m+n)^2$.
3. **Étudier la sommabilité de la suite double** $\left(\dfrac{1}{(m+n)^\beta}\right)_{(m,n)\in\mathbb{N}_*^2}$ **suivant les valeurs du réel β. Retrouver le résultat de la première question.**

Remarque

R 13 – Assez souvent, on utilise le résultat plus simplement : on a à manipuler une quantité qui est déjà donné sous forme de somme de série. On fait apparaître une série double, la sommabilité est automatique en cas de positivité, et on peut échanger les sommes par le théorème.

Exercice 9 : Si $x>1$, $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}$. **Montrer que** $\zeta(x) = \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{1}{n^{x+1}}$.

3 Familles de réels quelconques ou de complexes

Différence majeure avec ce qui précède : on va devoir commencer par prouver la sommabilité avant d'utiliser les théorèmes, qui, parfois, la donnent aussi comme conclusion.

Bien voir le parallèle avec les intégrales généralisées.

$u_i = u_i^+ - u_i^-$

a Définition, somme

Définition 7 : Famille sommable

Soit I un ensemble quelconque et $(u_i)_{i\in I} \in \mathbb{C}^I$.

On dit que la famille $(u_i)_{i\in I}$ est **sommable** lorsque la famille de réels positifs $(|u_i|)_{i\in I}$ l'est. Autrement dit

$$(u_i)_{i\in I} \text{ est sommable} \iff \sum_{i\in I} |u_i| < +\infty$$

$\{i \in I,\ |u_i| \neq 0\}$ $\shortparallel$

Remarque

R 14 – Il est donc nécessaire, pour que $(u_i)_{i\in I}$ soit **sommable**, que $\{i \in I,\ u_i \neq 0\}$ soit au plus dénombrable.

R 15 – Définition théorique... Mais comment définir la somme ? Comme pour les séries...

Remarque : (Rappel) Parties positive et négative d'un réel

R 16 – Si $x \in \mathbb{R}$, $x^+ = \max(0, x)$ et $x^- = \max(0, -x)$. Alors $x = x^+ - x^-$ et $|x| = x^+ + x^-$.

Propriété 16 : Condition de sommabilité, cas réel

Soit I un ensemble quelconque et $(u_i)_{i\in I} \in \mathbb{R}^I$.

Si la famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable, alors les deux familles $(u_i^+)_{i\in I} \in \mathbb{R}^I$ et $(u_i^-)_{i\in I} \in \mathbb{R}^I$ le sont.

Remarque

R 17 – La réciproque est vraie, voir linéarité plus loin.

Définition 8 : Somme dans le cas réel

Soit I un ensemble quelconque et $(u_i)_{i\in I} \in \mathbb{R}^I$ une famille sommable.

On définit la **somme**

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{i\in I} u_i^+ - \sum_{i\in I} u_i^- . \in \mathbb{R}$$

Remarque

R 18 – Définition théorique, jamais utile dans la pratique.

Propriété 17 : Condition de sommabilité, cas complexe

Soit I un ensemble quelconque et $(u_i)_{i\in I} \in \mathbb{C}^I$.

Si la famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable, alors les deux familles $(\mathfrak{Re}(u_i))_{i\in I} \in \mathbb{R}^I$ et $(\mathfrak{Im}(u_i))_{i\in I} \in \mathbb{R}^I$ le sont.

Remarque

R 19 – La réciproque est vraie, voir linéarité plus loin.

Définition 9 : Somme dans le cas complexe

Soit I un ensemble dénombrable et $(u_j)_{j\in I} \in \mathbb{C}^I$ une famille sommable.

Si la famille $(u_j)_{j\in I}$ est sommable, les deux familles $(\mathfrak{Re}(u_j))_{j\in I} \in \mathbb{R}^I$ et $(\mathfrak{Im}(u_j))_{j\in I} \in \mathbb{R}^I$ le sont.

Cela permet de définir la somme

$$\sum_{j\in I} u_j = \sum_{j\in I} \mathcal{R}e(u_j) + i \sum_{j\in I} \mathcal{I}m(u_j)$$

$\ell^1(I,\mathbb{R})$ $\ell^1(I,\mathbb{C})$

Notation 1 : Ensemble $\ell^1(I)$

On note $\ell^1(I)$ l'ensemble des familles **sommables** de réels ou complexes indexées par un ensemble quelconque I.

Propriété 18 : Cas des séries

La famille $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de nombres réels ou complexes est sommable si et seulement si la série $\sum u_i$ est **absolument** *convergente.*

Sa somme est alors la somme de la série $\sum u_i$.

cas de la déf du cas $\mathbb{R}^+$ et déf 8.

Remarque

R 20 – Si la famille $(u_i)_{i\in I}$ n'est pas sommable, elle n'a pas de somme... sauf si elle est à termes réels positifs, auquel cas $\sum\limits_{i\in I} u_i = +\infty$.

Lemme 2

Si $(u_i)_{i\in I}$ est sommable, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie finie J de I telle que

$$\left|\sum_{i\in J} u_i - \sum_{i\in I} u_i\right| \leqslant \varepsilon$$

cf poly

Propriété 19 : Sommabilité par comparaison

Soit I un ensemble quelconque, $(u_i)_{i\in I}$ une famille de nombres réels ou complexes et $(v_i)_{i\in I}$ une famille de **réels positifs** *vérifiant*

$$\forall i \in I,\ |u_i| \leqslant v_i.$$ et (v_i) sommable

Alors $(u_i)_{i\in I}$ est sommable.

dans $[0,+\infty]$, $\sum\limits_{i\in I} |u_i| \leqslant \sum\limits_{i\in I} v_i < +\infty$ donc $(|u_i|)$ sommable
par déf (u_i) sommable. □

Remarque

R 21 – Plus généralement, si $|u_i| = \mathcal{O}(v_i)$, alors $(v_i)_i$ sommable $\Longrightarrow$ $(u_i)_i$ sommable.

C'est donc aussi le cas avec o ou $\sim$.

De plus, comme pour les intégrales, on peut avoir ces relations de comparaison sans hypothèses de positivité car on peut y ajouter des valeurs absolues (non valables pour $\leqslant$) et conclure sur la sommabilité (absolue convergence), mais cela n'apparaît pas dans le programme officiel.

b Invariance par permutation

Propriété 20 : Invariance par permutation

Soit I est un ensemble quelconque et $(u_i)_{i\in I}$ une famille **sommable** *de nombres réels ou complexes.*

Soit $\sigma \in \mathfrak{S}(I)$ une permutation de I.

Alors

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{i\in I} u_{\sigma(i)}$$

appliquer le cas réel $\geqslant 0$ à u_i^+ et u_i^- / $\mathrm{Re}(u_i)$, $\mathrm{Im}(u_i)$ □

Propriété 21 : Cas dénombrable : écriture sous forme de série

Soit I est un ensemble **dénombrable** *et $(u_i)_{i\in I}$ une famille de nombres réels ou complexes , $k \mapsto i_k$ une bijection de $\mathbb{N}$ sur I.*

La famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement si $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} u_{i_k}$ est **absolument convergente***, et le cas échéant, on a*

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{k=0}^{+\infty} u_{i_k}.$$

Idem □

Corollaire 4 : Invariance par permutation d'une série absolument convergente

*Si $\sum a_n$ est une série **absolument** convergente à termes réels ou complexes et $\sigma \in \mathfrak{S}(\mathbb{N})$, alors la série $\sum a_{\sigma(n)}$ $\boxed{\textbf{converge absolument}}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} a_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.*

c Linéarité

Propriété 22 : Linéarité, cas général

Si I est un ensemble ~~dénombrable~~, si $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_i)_{i\in I}$ sont deux familles sommables d'éléments de $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), si $\lambda \in \mathbb{K}$, la famille $(\cancel{\lambda} u_i + \lambda v_i)_{i\in I}$ est sommable, et

$$\sum_{i\in I}(u_i + \lambda v_i) = \sum_{i\in I} u_i + \lambda \sum_{i\in I} v_i$$

Ainsi, $\ell^1(I)$ a une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Se ramène au cas fini ou dénombrable puis aux séries via énumération □

d Sommation par paquets

Il va bien falloir, si on abandonne la positivité des termes, quelques hypothèses. Car sinon, avec des paquets judicieux :

$$(1-1)+(1-1)+\cdots+=0$$

$$1+(-1+1)+(-1+1)+\cdots+=1$$

ce qui est fâcheux.

Théorème 6 : sommation par paquets

Soit I un ensemble quelconque, $(I_j)_{j\in J}$ un recouvrement disjoint de I :

$$p \neq q \Rightarrow I_p \cap I_q = \varnothing \quad \text{et} \quad \bigcup_{j\in J} I_j = I$$

On suppose que

H1 $(u_i)_{i\in I}$ sommable

alors

C1 $\forall j \in J$, $(u_i)_{i\in I_j}$ sommable

C2 $\left(\sum_{i\in I_j} u_i\right)_{j\in J}$ sommable

C3 $\sum_{i\in I} u_i = \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I_j} u_i\right)$

Preuve : HP □

Remarque

R 22 – La sommabilité se vérifie en général en appliquant le théorème de sommation par paquets à la famille de réels positifs $(|u_i|)_{i\in I}$. Dans ce cas, on peut aussi sommer par paquets la famille $(|u_i|)_{i\in I}$. Il suffit donc de vérifier que

H1 Pour tout n, $\sum_{i\in I_n} |u_i| < +\infty$.

H2 $\sum_{n\in\mathbb{N}}\left(\sum_{i\in I_n} |u_i|\right) < +\infty$.

pour écrire $\sum_{i\in I} u_i = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{i\in I_n} u_i\right)$.

Propriété 23 : Cas où $I = \mathbb{Z}$

La famille $(u_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ de nombres réels ou complexes est sommable si et seulement si les séries $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_{-n}$ sont $\boxed{\textbf{absolument}}$ *convergentes.*

Le cas échéant, $\sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=\cancel{0}\,1}^{+\infty} u_{-n}$.

IV Sommes doubles : le cas où $I = \mathbb{N}^2$

1 Théorème de Fubini

Théorème 7 : de Fubini

Soit $(a_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ une famille de réels ou de complexes.
Si

H1 $(a_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ *est* ***sommable*** *(c'est-à-dire si $(|a_{m,n}|)_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ l'est, par exemple avec le théorème de Fubini précédent)*

alors

$$\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} a_{m,n} = \sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} a_{m,n} = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty} a_{m,n}$$

Preuve . Somma° par paquets $\mathbb{N}^2 = \bigsqcup_{m\in\mathbb{N}} \{m\}\times\mathbb{N} = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{N}\times\{n\}$. □

Exemple : Les deux membres peuvent exister sans être égaux, attention aux conclusions trop hâtives.

E 7 – On définit $u_{p,q} = \dfrac{1}{p^2-q^2}$ si $p \neq q$ et 0 sinon.

Il est clair, par comparaison (équivalent) à une série de Riemann, que pour tout q la série $\sum_{p\neq q} u_{p,q}$ converge. Notons

$$\sigma_q = \sum_{\substack{p=1\\p\neq q}}^{+\infty} u_{p,q}$$

et essayons de calculer σ_q. Pour cela, on peut penser à se servir de la décomposition en éléments simples

$$\frac{1}{p^2-q^2} = \frac{1}{2q}\left(\frac{1}{p-q} - \frac{1}{p+q}\right)$$

On peut regarder

$$\sigma_1 = \frac{1}{2}\sum_{p=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p+1}\right) = \frac{1}{2}\sum_{p=2}^{+\infty}\left(\left(\frac{1}{p-1}+\frac{1}{p}\right) - \left(\frac{1}{p}+\frac{1}{p+1}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-0\right) = \frac{3}{4}$$

(télescopisme pas trop compliqué) ; si $q > 1$, c'est un peu plus alambiqué, on ne peut guère échapper aux sommes partielles (pour ne pas couper en deux séries divergentes) : en supposant $N > q$,

$$\sigma_q^{(N)} = \frac{1}{2q}\left(\sum_{p=1}^{q-1}\left(\frac{1}{p-q} - \frac{1}{p+q}\right) + \sum_{p=q+1}^{N}\left(\frac{1}{p-q} - \frac{1}{p+q}\right)\right)$$
$$= \frac{1}{2q}\left(-\sum_{j=1}^{q-1}\frac{1}{j} - \sum_{j=q+1}^{2q-1}\frac{1}{j} + \sum_{j=1}^{N-q}\frac{1}{j} - \sum_{j=2q+1}^{q+N}\frac{1}{j}\right)$$

On simplifie les deux premières sommes avec la troisième, en supposant $N-q > 2q-1$ ce qui n'est pas gênant puisqu'on va prendre les limites quand $N \to +\infty$:

$$\sigma_q^{(N)} = \frac{1}{2q}\left(\frac{1}{q} + \sum_{j=2q}^{N-q}\frac{1}{j} - \sum_{j=2q+1}^{q+N}\frac{1}{j}\right)$$

et enfin on simplifie les deux sommes restantes entre elles :

$$\sigma_q^{(N)} = \frac{1}{2q}\left(\frac{1}{q} + \frac{1}{2q} - \sum_{j=N-q+1}^{N+q}\frac{1}{j}\right)$$

La somme restante tend vers 0 quand $N \to +\infty$ (il n'est pas nécessaire pour cela d'avoir le développement asymptotique des sommes partielles de la série harmonique), donc

$$\sigma_q = \frac{3}{4q^2}$$

Conclusion : $\sum \sigma_q$ converge, et $\displaystyle\sum_{q=1}^{+\infty}\sigma_q = \frac{\pi^2}{8}$.

Mauvaise conclusion : C'est sommable.
Bonne conclusion : Ce n'est pas sommable, car en échangeant les rôles de p et de q, on va trouver $-\dfrac{\pi^2}{8}$ au lieu de trouver la même chose.
Chemin plus court pour arriver à la bonne conclusion : prendre $p = n$ et $q = n-1$.

$$u_{n,n-1} = \frac{1}{n^2-(n-1)^2} = \frac{1}{2n+1} \sim \frac{1}{2n} \text{ TGSDV}$$

2 Cas particulier : suites doubles produits

Propriété 24 : Sommes doubles produits

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels ou complexes.

Alors la suite double $(u_m v_n)_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable si et seulement si (soit l'une des suites est nulle, soit les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont ***absolument*** *convergentes).*

Lorsque la dernière condition est vérifiée, on a en outre

$$\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} u_m v_n = \sum_{m=0}^{+\infty} u_m \times \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

Le résultat s'étend à un produit d'un nombre quelconque (mais fini) de termes.

Remarque

R 23 – L'hypothèse de suites non nulles est juste là pour avoir une caractérisation de la sommabilité. Pour le sens $\Longleftarrow$ intéressant dans la pratique pour calculer la somme, on peut l'oublier.

3 Produit de Cauchy

Propriété 25 : Produit de Cauchy

H1 *Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries réelles ou complexes* ***absolument convergentes****.*

On note, pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$w_n =$$

Alors

C1

C2

Propriété 26 : Exponentielle complexe

Si $z, z' \in \mathbb{C}$, $\exp(z+z') = \exp z \times \exp z'$.

Exercice 10 : Si $a \in \mathbb{C}$ tel que $|a| < 1$, alors $\dfrac{1}{(1-a)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a^n$.

Remarque

R 24 – L'hypothèse d'absolue convergence est indispensable, le résultat n'est pas assuré pour des séries semi-convergentes.

R 25 – Cependant, il suffit que l'une des deux soit absolument convergente et que l'autre soit seulement convergente pour que le produit de Cauchy converge (théorème de Mertens, HP).

R 26 – Il existe d'ailleurs aussi une réciproque (HP aussi...) : si $\sum a_n$ est telle que son produit de Cauchy avec toute série convergente converge, alors elle est absolument convergente.

R 27 – Conseil pratique : quand on effectue le produit de Cauchy de deux séries, il est conseillé de « faire commencer ces deux séries à 0 ». Si on veut faire le produit de Cauchy de $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ par $\sum_{n\geqslant 2} v_n$, on pose $u_0 = v_0 = v_1 = 0$ et on fait le produit de Cauchy de $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ par $\sum_{n\geqslant 0} v_n$.

Exemple

E 8 – Avec $u_n = v_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$