Cahier de Vacances

Ces exercices de révision couvrent une large partie du programme de première année. Ils contiennent les exercices de la banque CCINP 2024 faisable en sup, à savoir faire absolument, des corrigés officiels sont disponibles en lignes (vous saurez les trouver).

Les autres exercices sont des classiques vus pendant l'année de MP2I ou non.

Vous pouvez demander des indications et/ou discuter des exercices via le Mattermost (canal MATHS MPI 2024/2025).

Les exercices du Cahier de Calcul sont tous à maîtriser également.

La semaine de la rentrée, vous aurez un devoir de 2 h de Mathématiques portant sur le programme de MP2I.

Pour les très ambitieux parmi vous, je vous invite à vous intéresser aux livres de la collection **Oraux X-ENS** (7 tomes) de chez *Cassini* et aux livres **Les Maths en Tête** (2 tomes) de Xavier Gourdon aux éditions *ellipses*.

Ensembles, applications et structures algébriques

1 injectivité - surjectivité

Soit E, F, G trois ensembles, et $f : E \to F$, $g : F \to G$ deux applications.

1. Montrer que si $g \circ f$ est surjective et g injective, alors f est surjective.
2. Montrer que si $g \circ f$ est injective et f surjective, alors g est injective.

2 Différence symétrique

Soit E un ensemble. On note $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble des parties de E. Pour toutes parties A et B de E on note $A \setminus B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \notin B\}$.

En particulier, pour toute partie A de E, $E \setminus A$ est le complémentaire de A dans E.

Pour toute partie A de E on appelle *fonction indicatrice* de A l'application notée $\mathbb{1}_A$ définie par

$$\forall x \in A,\ \mathbb{1}_A(x) = 1 \text{ et } \forall x \in E \setminus A,\ \mathbb{1}_A(x) = 0.$$

On note plus simplement $\tilde{1}$ la fonction indicatrice de E.

Enfin, pour tout $(A, B) \in \mathscr{P}(E)^2$, on appelle *différence symétrique* de A et B l'ensemble $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

1. Soit $(A, B, C) \in \mathscr{P}(E)^3$.
   a) Exprimer $\mathbb{1}_{E \setminus A}$, $\mathbb{1}_{A \cap B}$, $\mathbb{1}_{A \setminus B}$ et $\mathbb{1}_{A \cup B}$ en fonction de $\tilde{1}$, $\mathbb{1}_A$ et $\mathbb{1}_B$.
   b) En déduire $\mathbb{1}_{A \Delta B}$ en fonction de $\mathbb{1}_A$ et $\mathbb{1}_B$.
   c) Démontrer que
   $$\mathbb{1}_{(A \Delta B) \Delta C} = \mathbb{1}_{A \Delta (B \Delta C)}.$$
2. Démontrer que $(\mathscr{P}(E), \Delta)$ est un groupe commutatif.

3 Groupe de matrices

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note

$$M(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ -x & 1 & -\frac{x^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On note $G = \{M(x),\ x \in \mathbb{R}\}$ et $\times$ la multiplication usuelle dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Démontrer que $(G, \times)$ est un groupe.

4 Anneau intègre

On dit qu'un anneau $(A, +, \times)$ est *intègre* si

$$\forall (x, y) \in A^2,\ x \times y = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } y = 0.$$

1. Les anneaux $(\mathbb{Z}, +, \times)$, $(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$, $(\mathbb{R}[X], +, \times)$ et $\left(\mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R}), +, \times\right)$ sont-ils intègres ? Justifier.
2. Démontrer que tout corps est un anneau intègre. La réciproque est-elle vraie ?
3. Soit $(A, +, \times)$ un anneau intègre et $(a, b, x) \in A^3$. On suppose que $x \neq 0$. Démontrer que :
   - $a \times x = b \times x \Rightarrow a = b$;
   - $x \times a = x \times b \Rightarrow a = b$.
4. Soit $(A, +, \times)$ un anneau intègre et $a \in A$ tel que $a \neq 0$. Démontrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a^k \neq 0$.
5. Soit $(A, +, \times)$ un anneau commutatif, intègre et ne possédant qu'un nombre fini d'éléments.

   Démontrer que $(A, +, \times)$ est un corps.

Nombres complexes

Cahier de Calcul : fiche 16.

5 CCINP 84

1. Donner la définition d'un argument d'un nombre complexe non nul (on ne demande ni l'interprétation géométrique, ni la démonstration de l'existence d'un tel nombre).
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner, en justifiant, les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^n = 1$ et préciser leur nombre.
3. En déduire, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $(z+\mathrm{i})^n = (z-\mathrm{i})^n$ et démontrer que ce sont des nombres réels.

6 CCINP 89

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > 2$.

On pose $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}}$.

1. On suppose que $k \in [\![1, n-1]\!]$. Déterminer le module et un argument du complexe $z^k - 1$.
2. On pose $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left|z^k - 1\right|$.

   Montrer que $S = \dfrac{2}{\tan \frac{\pi}{2n}}$.

7 Sommes de cos et sin

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$.

1. Calculer $C_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$ et $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin(kx)$.

   Indication : on commencera par calculer la somme $C_n(x) + \mathrm{i}S_n(x)$ en discutant selon la valeur de x.
2. Calculer $\widetilde{C}_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(kx)$ et $\widetilde{S}_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(kx)$.

8 Racines n^e de l'unité

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on pose $\omega_k = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}}$.

1. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k$.
2. Soit $q \in \mathbb{N}$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k^q$.

   Indication : on pourra distinguer deux cas, selon que q divise n ou q ne divise pas n.

Arithmétique

Cahier de Calcul : fiche 23.

9 CCINP 86

1. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$. Prouver que si $p \wedge a = 1$ et $p \wedge b = 1$ alors $p \wedge (ab) = 1$.
2. Soit p un nombre premier.
   (a) Prouver que pour tout $k \in [\![1, p-1]\!]$, p divise $\binom{p}{k} k!$ et en déduire que p divise $\binom{p}{k}$.
   (b) Prouver que $\forall n \in \mathbb{N},\ n^p \equiv n \bmod p$.
   Indication : procéder par récurrence.
   (c) En déduire, pour tout entier naturel n, que

   $$p \text{ ne divise pas } n \Longrightarrow n^{p-1} \equiv 1 \bmod p.$$

10 CCINP 94

1. Énoncer le théorème de Bézout dans $\mathbb{Z}$.
2. Soit a et b deux entiers naturels premiers entre eux.
   Soit $c \in \mathbb{N}$.
   Prouver que : $(a|c$ et $b|c) \Longleftrightarrow ab|c$.
3. On considère le système (S) : $\begin{cases} x \equiv 6 \mod(17) \\ x \equiv 4 \mod(15) \end{cases}$ dans lequel l'inconnue x appartient à $\mathbb{Z}$.
   (a) Déterminer une solution particulière x_0 de (S) dans $\mathbb{Z}$.
   (b) *Déduire des questions précédentes* la résolution dans $\mathbb{Z}$ du système (S).

11 Racines rationnelles de polynômes entiers

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme à coefficients dans $\mathbb{Z}$. On suppose que $a_0 \neq 0$ et $a_n \neq 0$.

1. Soit $(a,b,c) \in \mathbb{Z}^3$. On suppose que a et b sont premiers entre eux.
   Prouver que $(a|c)$ et $(b|c) \Longleftrightarrow ab|c$.
2. Soit $\alpha = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}^*$, avec $(p,q) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{N}^*$ tel que $p \wedge q = 1$.
   Montrer que si α est racine de P, alors p divise a_0 et q divise a_n.
3. Factoriser le polynôme
   $$P(X) = 3X^3 + 4X^2 + 2X - 4$$
   en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

Polynômes et fractions rationnelles

Cahier de Calcul : fiches 24 et 25.

12 CCINP 85

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et $a \in \mathbb{R}$.
   (a) Donner sans démonstration, en utilisant la formule de Taylor, la décomposition de $P(X)$ dans la base $\left(1, X-a, (X-a)^2, \cdots, (X-a)^n\right)$.
   (b) Soit $r \in \mathbb{N}^*$. En déduire que : a est une racine de P d'ordre de multiplicité r si et seulement si $P^{(r)}(a) \neq 0$ et $\forall k \in [\![0, r-1]\!]$, $P^{(k)}(a) = 0$.
2. Déterminer deux réels a et b pour que 1 soit racine double du polynôme $P = X^5 + aX^2 + bX$ et factoriser alors ce polynôme dans $\mathbb{R}[X]$.

13 CCINP 87

Soient $a_0, a_1, \cdots, a_n$ $n+1$ réels deux à deux distincts.

1. Montrer que si $b_0, b_1, \cdots, b_n$ sont $n+1$ réels quelconques, alors il existe un unique polynôme P vérifiant $\deg P \leqslant n$ et $\forall i \in \{0, \cdots, n\}$ $P(a_i) = b_i$.
2. Soit $k \in [\![0, \ldots, n]\!]$.
   Expliciter ce polynôme P, que l'on notera L_k, lorsque
   $$\forall i \in [\![0, \ldots, n]\!] \quad b_i = \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq k \\ 1 \text{ si } i = k \end{cases}$$
3. Prouver que $\forall p \in [\![0, \ldots, n]\!]$,
   $$\sum_{k=0}^{n} a_k^p L_k = X^p.$$

14 CCINP 90

$\mathbb{K}$ désigne le corps des réels ou celui des complexes.
Soient a_1, a_2, a_3 trois scalaires distincts donnés de $\mathbb{K}$.

1. Montrer que
   $$\begin{array}{cccc} \Phi : & \mathbb{K}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}^3 \\ & P & \longmapsto & \big(P(a_1), P(a_2), P(a_3)\big) \end{array}$$
   est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
2. On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{K}^3$ et on pose
   $$\forall k \in \{1,2,3\},\ L_k = \Phi^{-1}(e_k).$$
   (a) Justifier que (L_1, L_2, L_3) est une base de $\mathbb{K}_2[X]$.
   (b) Exprimer les polynômes L_1, L_2 et L_3 en fonction de a_1, a_2 et a_3.
3. Soit $P \in \mathbb{K}_2[X]$. Déterminer les coordonnées de P dans la base (L_1, L_2, L_3).
   Application : On se place dans $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère orthonormé et on considère les trois points $A(0,1), B(1,3), C(2,1)$.
   Déterminer une fonction polynomiale de degré 2 dont la courbe passe par les points A, B et C.

15 Division euclidienne

Les questions 2) et 3) sont indépendantes.

1. Énoncer le théorème de division euclidienne.
2. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ et $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ tel que $a \neq b$.
   Déterminer le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)(X-b)$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose
   $$A(X) = (X-3)^{2n} + (X-2)^n - 2.$$
   Détermner le reste de la division euclidienne de A par $(X-2)^2$.

16 Racines simples

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que toutes les racines complexes du polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{X^k}{k!}$ sont simples.

17 Polynômes réels scindés simples

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré $n \geqslant 2$.

1. Soit $r \in [\![2, n]\!]$. Démontrer que si P admet r racines réelles distinctes, alors P' admet au moins $r-1$ racines réelles distinctes.
   Indication : on appliquera le théorème de Rolle.
2. Démontrer que si P est scindé dans $\mathbb{R}[X]$ et n'admet que des racines simples, alors P' est scindé dans $\mathbb{R}[X]$ et n'admet que des racines simples.
3. Démontrer que si P est scindé dans $\mathbb{R}[X]$, alors P' est scindé dans $\mathbb{R}[X]$.

18 Produit de sin

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$.

1. Montrer que $\prod_{k=1}^{n-1} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{k\pi}{n}} = (-\mathrm{i})^{n-1}$.
2. a) Déterminer les racines complexes du polynôme
   $$P(X) = \sum_{k=1}^{n-1} X^k.$$
   b) En déduire la valeur de
   $$\prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}}\right).$$
3. Calculer $\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)$.
   Indication : on utilisera les relations d'Euler.

19 DES de $\dfrac{P'}{P}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^n$ et $(m_1, \ldots, m_n) \in (\mathbb{N}^*)^n$.
On suppose $a_1, \ldots, a_n$ deux à deux distincts et on note $P(X) = \prod_{k=1}^{n} (X - a_k)^{m_k}$.

1. Démontrer que $\dfrac{P'}{P} = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{m_k}{X - a_k}$.
2. Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ puis $\mathbb{R}(X)$ les fractions rationnelles :
   $$F(X) = \frac{3X^2 + 10X + 1}{X^3 + 5X^2 + X + 5}$$
   $$G(X) = \frac{3X^4 + -7X^3 + 4X^2 + 5X - 5}{X^3 - X^2 - X + 1}.$$

Algèbre linéaire

Cahier de Calcul : fiches 26, 27, 32.

20 CCINP 55

Soit a un nombre complexe.

On note E l'ensemble des suites à valeurs complexes telles que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 2a\,u_{n+1} + 4(\mathrm{i}a-1)u_n$ avec $(u_0, u_1) \in \mathbb{C}^2$.

1. (a) Prouver que E est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites à valeurs complexes.
   (b) Déterminer, en le justifiant, la dimension de E.
2. Dans cette question, on considère la suite de E définie par : $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$.
   Exprimer, pour tout entier naturel n, le nombre complexe u_n en fonction de n.
   Indication : discuter suivant les valeurs de a.

21 CCINP 59

Soit E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) de degré inférieur ou égal à n.
Soit f l'endomorphisme de E défini par : $\forall\, P \in E,\ f(P) = P - P'$.

1. Démontrer que f est bijectif de deux manières :
   (a) sans utiliser de matrice de f,
   (b) en utilisant une matrice de f.
2. Soit $Q \in E$. Trouver P tel que $f(P) = Q$.
   Indication : si $P \in E$, quel est le polynôme $P^{(n+1)}$?
3. ~~f est-il diagonalisable ?~~

22 CCINP 60

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par $f(M) = AM$.

1. Déterminer une base de $\mathrm{Ker} f$.
2. f est-il surjectif ?
3. Déterminer une base de $\mathrm{Im} f$.
4. A-t-on $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \mathrm{Ker} f \oplus \mathrm{Im} f$?

23 CCINP 62

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 - f - 2\mathrm{Id} = 0$.

1. Prouver que f est bijectif et exprimer f^{-1} en fonction de f.
2. Prouver que $E = \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id})$:
   (a) ~~en utilisant le lemme des noyaux ;~~
   (b) sans utiliser le lemme des noyaux.
3. Dans cette question, on suppose que E est de dimension finie.
   Prouver que $\mathrm{Im}(f + \mathrm{Id}) = \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id})$.

24 CCINP 93

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie $n > 0$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^3 + u^2 + u = 0$.

1. Montrer que $\mathrm{Im}\, u \oplus \mathrm{Ker}\, u = E$.
2. (a) ~~Énoncer le lemme des noyaux pour deux polynômes.~~
   (b) ~~En déduire que~~ [Montrer que]
   $$\mathrm{Im}\, u\ [\subset]\ \mathrm{Ker}\big(u^2 + u + \mathrm{Id}\big).$$
3. ~~On suppose que u est non bijectif. Déterminer les valeurs propres de u. Justifier la réponse.~~

Remarque : les questions 1. , 2. et 3. peuvent être traitées indépendamment les unes des autres.

25 CCINP 64

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie n.

1. Démontrer que
   $$E = \mathrm{Im} f \oplus \mathrm{Ker} f \Longrightarrow \mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2.$$
2. (a) Démontrer que :
   $$\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2 \Longleftrightarrow \mathrm{Ker} f = \mathrm{Ker} f^2.$$
   (b) Démontrer que :
   $$\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2 \Longrightarrow E = \mathrm{Im} f \oplus \mathrm{Ker} f.$$

26 CCINP 71

Soit p, la projection vectorielle de $\mathbb{R}^3$, sur le plan P d'équation $x + y + z = 0$, parallèlement à la droite D d'équation $x = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{3}$.

1. Vérifier que $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$.
2. Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Déterminer $p(u)$ et donner la matrice de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de p est diagonale.

27 Intersection et réunion de sev

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F, G deux sous-espaces vectoriels de E.

1. Démontrer que $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.
2. Démontrer que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.

28 Déterminant tridiagonal par formule de récurrence

Soit un entier $n \geqslant 1$. On considère la matrice carrée d'ordre n à coefficients réels :

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Pour $n \geqslant 1$, on désigne par D_n le déterminant de A_n.

1. Démontrer que $D_{n+2} = 2D_{n+1} - D_n$.
2. Déterminer D_n en fonction de n.

29 Image et noyau d'une composée

Soit E, F, G trois espaces vectoriels, $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$.

Démontrer que

$$\mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathrm{Im}(g);$$

$$\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(g \circ f);$$

$$f\big(\mathrm{Ker}(g \circ f)\big) = \mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(g).$$

30 Inégalité triangulaire sur les rangs

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$ et f, g deux endomorphismes de E.

1. Justifier que $\mathrm{Im}(f + g) \subset \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)$.
2. Démontrer que
   $$|\mathrm{rg}(f) - \mathrm{rg}(g)| \leqslant \mathrm{rg}(f + g) \leqslant \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g).$$
3. Démontrer que si $f + g$ est un isomorphisme et $f \circ g = 0$, alors $\mathrm{Im}(g) = \mathrm{Ker}(f)$.

31

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et f un endomorphisme de E.

On suppose que pour tout $x \in E$, $(x, f(x))$ est une famille liée.

Soit a un vecteur non nul de E.

1. Justifier l'existence de $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f(a) = \lambda a$.
2. Démontrer que pour tout $x \in \mathrm{Vect}(a)$, $f(x) = \lambda x$.
3. Soit $x \in E \setminus \mathrm{Vect}(a)$. Démontrer que $f(x) = \lambda x$.
   Indication : on pourra s'intéresser au vecteur $a + x$ et à son image par f.
4. En déduire que f est une homothétie.

32

Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on note f_a l'application de $\mathbb{R}_+^*$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f_a(x) = x^a.$$

1. Soit $a \in \mathbb{R}$.
   a) Donner la limite lorsque $x \to 0^+$ de x^a en discutant selon la valeur de a.
   b) Quelle relation existe-t-il entre f_a' et f_{a-1} ?
2. Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la proposition $\mathcal{P}(n)$: « Si $a_1, \ldots, a_n$ sont n nombres réels deux à deux distincts, alors $\big(f_{a_1}, \ldots, f_{a_n}\big)$ est une famille libre de l'espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ des fonctions de $\mathbb{R}_+^*$ vers $\mathbb{R}$. »
   Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.
   Indication : on pourra utiliser la question 1.a) ou la question 1.b).

33 Théorème des noyaux itérés

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie $n \geqslant 1$ et f un endomorphisme de E.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $N_k = \operatorname{Ker}(f^k)$ et $I_k = \operatorname{Im}(f^k)$.

1. Démontrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $N_k \subset N_{k+1}$ et $I_{k+1} \subset I_k$.
2. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note a_k la dimension de N_k. Justifier que l'ensemble
$$J = \{k \in [\![1,n]\!],\ a_k = a_{k+1}\}$$
admet un plus petit élément, que l'on notera p.
3. Démontrer par récurrence que pour tout entier $k \geqslant p$, $N_k = N_p$.
4. En déduire que pour tout entier $k \geqslant p$, $I_k = I_p$.
5. Démontrer que $E = N_p \oplus I_p$.

34 Déterminant de Vandermonde

Pour tout entier $n \geqslant 2$ et tout $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$, on note :
$$V(a_1,\dots,a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

1. Soit $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$.
   a) Calculer $V(a,b,c)$ en l'exprimant sous forme factorisée.
   b) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $V(a,b,c) = 0$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$, et $(a_1,\dots,a_n) \in \mathbb{C}^n$.
   Que peut-on dire de $V(a_1,\dots,a_n)$ s'il existe $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $i \neq j$ et $a_i = a_j$? Justifier.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 3$, et $(a_1,\dots,a_{n-1}) \in \mathbb{C}^{n-1}$ tel que $V(a_1,\dots,a_{n-1}) \neq 0$.
   Pour tout $x \in \mathbb{C}$, on pose $f(x) = V(a_1,\dots,a_{n-1},x)$.
   a) Démontrer que f est une fonction polynomiale. Donner son degré et son coefficient dominant.
   b) Démontrer que toutes les racines complexes de f sont simples et en déduire une expression factorisée de f comme produit de fonctions polynomiales de degré 1.
4. Calculer $V(a_1,\dots,a_n)$ pour tout $n \geqslant 2$ et tout $(a_1,\dots,a_n) \in \mathbb{C}^n$.

35 Endomorphismes cycliques

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 2$.

Soit f un endomorphisme de E tel que $f^{n-1} \neq 0$ et $f^n = 0$.

1. Justifier l'existence d'un vecteur $a \in E$ tel que pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $f^k(a) \neq 0_E$.
2. Montrer que
$$\mathscr{B} = \left(a, f(a), f^2(a), \dots, f^{n-1}(a)\right)$$
est une base de E.
3. Écrire la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$.
4. Soit $g \in \mathscr{L}(E)$. On note $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$ les coordonnées de $g(a)$ dans la base $\mathscr{B}$.
   a) Montrer que si $g \circ f = f \circ g$, alors $g = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k f^k$.
   b) En déduire que $g \circ f = f \circ g$ si et seulement si
$$g \in \operatorname{Vect}\left(\mathrm{id}_E, f, f^2, \dots, f^{n-1}\right).$$

36 Théorème d'Hadamard

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Dans cete question, on suppose qu'il existe $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ non nul tel que $AX = 0$.
   a) Montrer que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $|a_{ii} x_i| \leqslant \displaystyle\sum_{1 \leqslant j \leqslant n,\, j \neq i} |a_{ij} x_j|$.
   b) En déduire qu'il existe $m \in [\![1,n]\!]$ tel que $|a_{mm}| \leqslant \displaystyle\sum_{1 \leqslant j \leqslant n,\, j \neq m} |a_{ij}|$.
2. Démontrer que si pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $|a_{ii}| > \displaystyle\sum_{1 \leqslant j \leqslant n,\, j \neq i} |a_{ii}|$ (on dit que A est **à diagonale dominante**), alors A est inversible.

Algèbre bilinéaire

Cahier de Calcul : fiche 30.

37 CCINP 76

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire noté $(\,|\,)$.
On pose $\forall x \in E$, $\|x\| = \sqrt{(x|x)}$.

1. (a) Énoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
   (b) Dans quel cas a-t-on égalité ? Le démontrer.
2. Soit $E = \left\{ f \in \mathscr{C}([a,b], \mathbb{R}),\ \forall x \in [a,b]\ f(x) > 0 \right\}$.
   Prouver que l'ensemble
$$\left\{ \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \times \int_a^b \frac{1}{f(t)}\,\mathrm{d}t\ ,\ f \in E \right\}$$
admet une borne inférieure m et déterminer la valeur de m.

38 CCINP 79

1. Soit h une fonction continue et positive de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.
   Démontrer que $\displaystyle\int_a^b h(x)\,\mathrm{d}x = 0 \Longrightarrow h = 0$.
2. Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.
   On pose
$$\forall (f,g) \in E^2,\ (f|g) = \int_a^b f(x) g(x)\,\mathrm{d}x.$$
   Démontrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.
3. Majorer $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x} e^{-x}\,\mathrm{d}x$ en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

39 CCINP 39

On note ℓ^2 l'ensemble des suites $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres réels telles que la série $\sum x_n^2$ converge.

1. (a) Démontrer que, pour $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$ et $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$, la série $\sum x_n y_n$ converge.
   On pose alors $(x|y) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_n$.
   (b) Démontrer que ℓ^2 est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites de nombres réels.

   Dans la suite de l'exercice, on admet que $(\,|\,)$ est un produit scalaire dans ℓ^2.
   On suppose que ℓ^2 est muni de ce produit scalaire et de la norme euclidienne associée.
2. Soit $p \in \mathbb{N}$. Pour tout $x = (x_n) \in \ell^2$, on pose $\varphi(x) = x_p$.
   Démontrer que φ est une application linéaire ~~et continue~~ de ℓ^2 dans $\mathbb{R}$.
3. On considère l'ensemble F des suites réelles presque nulles c'est-à-dire l'ensemble des suites réelles dont tous les termes sont nuls sauf peut-être un nombre fini de termes.
   Déterminer $F^\perp$ (au sens de $(\,|\,)$).
   Comparer F et $\left(F^\perp\right)^\perp$.

40 CCINP 77

Soit E un espace euclidien.

1. Soit A un sous-espace vectoriel de E.
   Démontrer que $\left(A^\perp\right)^\perp = A$.
2. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
   (a) Démontrer que $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.
   (b) Démontrer que $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

41 CCINP 92

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n.
On pose : $\forall (A,B) \in E^2$, $\langle A, B \rangle = \operatorname{tr}(A^\intercal B)$ où tr désigne la trace et $A^\intercal$ désigne la transposée de la matrice A.

1. Prouver que $\langle , \rangle$ est un produit scalaire sur E.
2. On note $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de E.
   Une matrice A de E est dite antisymétrique lorsque $A^\intercal = -A$.
   On note $A_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de E.
   On admet que $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de E.

(a) Prouver que $E = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$.
(b) Prouver que $A_n(\mathbb{R})^{\perp} = S_n(\mathbb{R})$.

3. Soit F l'ensemble des matrices diagonales de E. Déterminer $F^{\perp}$.

42 **CCINP 80** Soit E l'espace vectoriel des applications continues et 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que
$$(f \mid g) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$
définit un produit scalaire sur E.
2. Soit F le sous-espace vectoriel engendré par $f : x \mapsto \cos x$ et $g : x \mapsto \cos(2x)$.

 Déterminer le projeté orthogonal sur F de la fonction $u : x \mapsto \sin^2 x$.

43 **CCINP 81** On définit dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ l'application φ par : $\varphi(A, A') = \operatorname{tr}(A^{\mathsf{T}}A')$, où $\operatorname{tr}(A^{\mathsf{T}}A')$ désigne la trace du produit de la matrice ${}^tA$ par la matrice A'.
On admet que φ est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
On note $\mathscr{F} = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix},\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\}$.

1. Démontrer que $\mathscr{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer une base de $\mathscr{F}^{\perp}$.
3. Déterminer la projection orthogonale de $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur $\mathscr{F}^{\perp}$.
4. Calculer la distance de J à $\mathscr{F}$.

44 **CCINP 82** Soit E un espace préhilbertien et F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie $n > 0$.

On admet que, pour tout $x \in E$, il existe un élément unique y_0 de F tel que $x - y_0$ soit orthogonal à F et que la distance de x à F soit égale à $\|x - y_0\|$.

Pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$, on pose $(A \mid A') = aa' + bb' + cc' + dd'$.

1. Démontrer que $(.|.)$ est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Calculer la distance de la matrice $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ au sous-espace vectoriel F des matrices triangulaires supérieures.

45 On munit $\mathbb{R}^4$ de sa structure euclidienne canonique.

Soit $u = (1,1,1,0)$, $v = (1,0,0,-1)$ et $H = \operatorname{Vect}(u, v)$. On note f la projection orthogonale sur H.

1. Déterminer, à l'aide du procédé de Gram-Schmidt, une base orthonormale (u_1, v_1) de H.
2. Soit $a = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$.
Déterminer les coordonnées (x', y', z', t') de $f(a)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.
3. En déduire la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

Nombres réels et suites de nombres réels

Cahier de Calcul : fiche 21.

46 **Théorème du point fixe monotone** Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction croissante telle que $f([0,1]) \subset [0,1]$.

1. Justifier que l'ensemble $A = \{x \in [0,1] \mid f(x) \leqslant x\}$ admet une borne inférieure, que l'on notera α.
2. Démontrer que $f(\alpha)$ est un minorant de A et en déduire une inégalité entre α et $f(\alpha)$.
3. Démontrer que $f(\alpha) \in A$ et en déduire que $f(\alpha) = \alpha$.

47 **Suite entière convergente** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'entiers relatifs, convergeant vers un nombre réel ℓ.

1. Rappeler la définition de la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers ℓ.
2. Démontrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite stationnaire, c'est-à-dire :
$$\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ u_n = \ell.$$

Indication : on pourra appliquer la définition précédente à une valeur de ε judicieusement choisie.

48 Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites réelles définies par :

- $a_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$a_{n+1} = 5a_n - \frac{8}{3};$$
- $u_0 = 5$, $u_1 = 12$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n;$$
- $v_0 = 1$, $v_1 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$v_{n+2} = 2v_{n+1} - 2v_n;$$
- $w_0 = -3$, $w_1 = 8$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$w_{n+2} = 8w_{n+1} - 16w_n.$$

Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_n, u_n, v_n et w_n en fonction de n.

49 Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$u_n = \frac{n}{n^2+1}\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) \text{ et } v_n = \frac{n}{n+1}\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right).$$

Étudier la nature (convergence ou divergence) des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

50 **Moyenne arithmético-géométrique** Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 \leqslant a \leqslant b$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies par $u_0 = a$, $v_0 = b$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \text{ et } v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

1. Démontrer que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $|xy| \leqslant \dfrac{x^2+y^2}{2}$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$.
3. Étudier le sens de variation des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - u_{n+1} \leqslant \dfrac{v_n - u_n}{2}$.
 b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n - u_n \leqslant \dfrac{b-a}{2^n}$.
5. Démontrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers une limite commune L.
On dit que L est la *moyenne arithmético-géométrique* de a et b.
6. Écrire dans le langage de votre choix une fonction `mag` qui prend en arguments a et b, ainsi qu'un réel e strictement positif, et retourne :
 - le plus petit entier naturel p tel que $v_p - u_p \leqslant e$;
 - les valeurs correspondantes de a_p et b_p.

 Appliquer cette fonction à $a = 1789$, $b = 2024$, $e = 10^{-5}$ et en déduire un encadrement de L.

Fonctions usuelles

Cahier de Calcul : fiches 2, 7, 9, 20.

51 Résoudre l'équation $\operatorname{sh}(x) = 1$.

52 Soit la fonction $f : x \mapsto \operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

1. Soit $y \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$. Quelle relation existe-t-il entre $\tan\left(\dfrac{\pi}{2} - y\right)$ et $\tan(y)$?
2. Démontrer par deux méthodes différentes que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = \dfrac{\pi}{2}$:
 (a) la première méthode utilisant la dérivée de la fonction f ;
 (b) la seconde utilisant la formule énoncée à la question précédente.
3. La fonction f est-elle constante sur $\mathbb{R}^*$? Justifier.

53 Représenter graphiquement
$$f : x \mapsto \operatorname{Arccos}[\cos(x)] + \operatorname{Arcsin}[\sin(x)].$$
Justifier.

54 Soit $n \in \mathbb{N}$ et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Calculer les sommes $C_n(a,b) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \operatorname{ch}(a+kb)$ et $S_n(a,b) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \operatorname{sh}(a+kb)$.

Indication : on pourra déjà calculer $C_n(a,b) + S_n(a,b)$ et $C_n(a,b) - S_n(a,b)$.

55 Soit $p \in \mathbb{N}^*$ fixé et $(u_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{(p-1)n} \mathrm{sh}\left(\frac{1}{n+k}\right)$.

1. Soit $(n,N) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Simplifier la somme $S(n,N) = \displaystyle\sum_{k=0}^{N} \ln\left(1+\frac{1}{n+k}\right)$.
2. a) Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1+x \leqslant e^{\mathrm{sh}(x)}$.
   b) En déduire que pour tout $x \in]0,1[$, $e^{\mathrm{sh}(x)} \leqslant \dfrac{1}{1-x}$.
3. À l'aide des questions précédentes, démontrer que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge et préciser sa limite.

Limite, équivalent et développement limité

Cahier de Calcul : fiche 22.

56 **CCINP 43**

1. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On définit la suite (u_n) par $u_0 = x_0$ et $\forall\, n \in \mathbb{N},\quad u_{n+1} = \mathrm{Arctan}(u_n)$.
   (a) Démontrer que la suit (u_n) est monotone et déterminer, en fonction de la valeur de x_0, le sens de variation de (u_n).
   (b) Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.
2. Déterminer l'ensemble des fonctions h, continues sur $\mathbb{R}$, telles que

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\quad h(x) = h(\mathrm{Arctan}\, x).$$

57 Soit $a \in \mathbb{R}$ fixé. Déterminer la limite de $\left(\left(1+\frac{a}{n}\right)^n\right)_n$.

58 Déterminer un développement limité à l'ordre 3 en 0 de $f : x \mapsto \ln\left(3\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}\right)$.

59 Déterminer un développement limité à l'ordre 3 en 2π de $f : x \mapsto \sin\left(\sqrt{x^2-3\pi^2}\right)$.

60 Calculer la limite lorsque $x \to 0$ de $\dfrac{2\tan(x)-\tan(2x)}{x\,[1-\cos(3x)]}$ et la limite lorsque $x \to 1$ de $\dfrac{x^x - x}{1-x+\ln(x)}$.

61 Soit, pour tout entier $n \geqslant 2$, $u_n = \cos\left[n^2\pi\ln\left(\dfrac{n}{n-1}\right)\right]$.

Déterminer deux nombres réels a et b tels que $u_n = (-1)^{n+1}\left[\dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right]$.

62 Déterminer un équivalent simple en $+\infty$ de $f : x \mapsto (x+1)^{\frac{1}{x}} - x^{\frac{1}{x}}$.

63 Déterminer le signe, au voisinage de l'infini, de $u_n = \mathrm{sh}\left(\dfrac{1}{n}\right) - \tan\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Continuité

64 Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ une fonction croissante.

On suppose que la fonction $g : x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Indication : on pourra se donner a dans $\mathbb{R}_+^*$ puis étudier séparément les limites en a^+ et a^- de $f(x)$ à l'aide du théorème de limites par encadrement.

65 Soit $\mathscr{S}$ l'ensemble des fonctions f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, continues sur $\mathbb{R}$ et vérifiant :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) = f(x) + f(y).$$

1. Soit $f \in \mathscr{S}$. On pose $\alpha = f(1)$.
   a) Calculer $f(0)$.
   b) Démontrer que f est une fonction impaire.
   c) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $f(nx) = nf(x)$.
   d) Démontrer que pour tout $r \in \mathbb{Q}$, $f(r) = \alpha r$.
   e) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \alpha x$.
2. Déterminer l'ensemble $\mathscr{S}$.

66 **Un théorème de point fixe** Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$.

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$ vérifiant $f([a,b]) \subset [a,b]$.

Démontrer qu'il existe $x_0 \in [a,b]$ tel que $f(x_0) = x_0$.

67 Soit $(p,q) \in (\mathbb{R}_+)^2$ et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$.

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$.

Démontrer qu'il existe $x_0 \in [a,b]$ tel que $pf(a) + qf(b) = (p+q)f(x_0)$.

Indication : on pourra appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à une fonction g bien choisie.

68 Soit P un polynôme non nul, à coefficients réels et de degré impair.

Démontrer que P admet au moins une racine réelle.

69 Déterminer le nombre de solutions réelles de l'équation $(E) : \mathrm{e}^x = 2(x+1)^2$.

70 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue vérifiant $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $f(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

a) Rappeler la définition de $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
b) Démontrer qu'il existe $b \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout $x \in [b,+\infty[$, $f(x) \geqslant f(0)$.
c) Démontrer que f admet un minimum sur $\mathbb{R}$.

71 **Suite implicite** Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $g_n : x \mapsto \cos\left(\dfrac{\pi x}{2}\right) - x^n$.

a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer qu'il existe un unique $a_n \in [0,1]$ tel que $g_n(a_n) = 0$.
b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le signe de $g_{n+1}(a_n)$.
c) Démontrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
d) Déterminer la limite de $(a_n)_n$.

Dérivation et étude de fonctions

Cahier de Calcul : fiche 9.

72 **CCINP 3**

1. On pose $g(x) = \mathrm{e}^{2x}$ et $h(x) = \dfrac{1}{1+x}$.
   Calculer, pour tout entier naturel k, la dérivée d'ordre k des fonctions g et h sur leurs ensembles de définitions respectifs.
2. On pose $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{1+x}$.
   En utilisant la formule de Leibniz concernant la dérivée $n^{\text{ième}}$ d'un produit de fonctions, déterminer, pour tout entier naturel n et pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$, la valeur de $f^{(n)}(x)$.
3. Démontrer, dans le cas général, la formule de Leibniz, utilisée dans la question précédente.

73 **CCINP 4**

1. Énoncer le théorème des accroissements finis.
2. Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in]a,b[$.
   On suppose que f est continue sur $[a,b]$ et que f est dérivable sur $]a,x_0[$ et sur $]x_0,b[$.
   Démontrer que, si f' admet une limite finie en x_0, alors f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = \displaystyle\lim_{x\to x_0} f'(x)$.
3. Prouver que l'implication : (f est dérivable en x_0) $\Longrightarrow$ (f' admet une limite finie en x_0) est fausse.
   Indication : on pourra considérer la fonction g définie par : $g(x) = x^2\sin\dfrac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 0$.

74 **Inégalité de Bernoulli**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $x^n - 1 \geqslant n(x-1)$.

75 Soit $a \in \mathbb{R}$ et f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(0)=a \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}^*,\ f(x)=x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

1. Justifier brièvement que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$.
2. Déterminer a afin que f soit continue sur $\mathbb{R}$. Dans la suite, on suppose que a est la valeur ainsi obtenue.
3. Étudier la dérivabilité de f en 0.
4. La fonction f est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$? Justifier.

76 **Inégalité de convexité** Établir que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}_*^+$,

$$1+\left(\prod_{k=1}^n x_k\right)^{1/n} \leqslant \left(\prod_{k=1}^n (1+x_k)\right)^{1/n}.$$

Indication : utiliser le $\ln$.

En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et tout $a_1, a_2, \dots, a_n,\ b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{R}_*^+$,

$$\left(\prod_{k=1}^n a_k\right)^{1/n} + \left(\prod_{k=1}^n b_k\right)^{1/n} \leqslant \left(\prod_{k=1}^n (a_k+b_k)\right)^{1/n}.$$

77 Soit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$.

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}}.$$
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\deg(P_n)=n$.
3. Déterminer $(\alpha,\beta) \in \mathbb{C}^2$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\alpha}{x+i} + \dfrac{\beta}{x-i}$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer les racines complexes du polynôme P_n.

78 Soit I un intervalle ouvert non vide et f, g deux fonctions de I vers $\mathbb{R}$.

On suppose que f, g sont dérivables sur I et que g' ne s'annule pas sur I.

1. Énoncer et démontrer le théorème de Rolle. En donner une interprétation géométrique.
2. Soit $(a,b) \in I^2$. Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

   Indication : on pourra appliquer le théorème de Rolle à la fonction $h : x \mapsto f(x)-f(a)-\lambda(g(x)-g(a))$, *où* λ *est un réel bien choisi.*
3. Soit $a \in I$ et $\ell \in \mathbb{R}$. Démontrer que si $\frac{f'(x)}{g'(x)} \underset{x\to a^+}{\longrightarrow} \ell$, alors $\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} \underset{x\to a^+}{\longrightarrow} \ell$.
4. Calculer la limite en 0^+ de $\dfrac{\cos(x)-e^x}{(x+1)e^x-1}$ par deux méthodes, la première utilisant la question précédente, la seconde utilisant des développements limités.

79 **Extension du théorème de Rolle** Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f : [a,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction.

On suppose f continue sur $[a,+\infty[$, dérivable sur $]a,+\infty[$ et $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} f(a)$.

1. Dans cette question, on suppose qu'il existe $b \in]a,+\infty[$ tel que $f(b)>f(a)$. On pose $m = \dfrac{f(a)+f(b)}{2}$.
   a) Justifier l'existence de $\alpha \in]a,b[$ tel que $f(\alpha)=m$.
   b) En utilisant la définition de $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} f(a)$, montrer qu'il existe $c>b$ tel que :
   $$\forall x \in [c,+\infty[,\ f(x) \leqslant m.$$
   c) Montrer qu'il existe $\gamma \in]a,+\infty[$ tel que $f'(\gamma)=0$.
2. Démontrer, dans tous les cas, qu'il existe $\gamma \in]a,+\infty[$ tel que $f'(\gamma)=0$.

80

1. Énoncer et démontrer le théorème des accroissements finis. En donner une interprétation géométrique.
2. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Démontrer que
$$\frac{1}{a+1} \leqslant \ln(a+1)-\ln(a) \leqslant \frac{1}{a}.$$
3. Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}.$$
   a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
   $$\ln(n+1) \leqslant H_n \leqslant 1+\ln(n).$$
   b) En déduire que $H_n \sim \ln(n)$.
4. Quelle est la nature de la série $\sum_{n\geqslant1} \frac{1}{n}$? Justifier.

Calcul intégral

Cahier de Calcul : fiches 10, 11, 12, 13, 14.

81 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}.$$

1. Déterminer la limite de (u_n).

   Indication : on reconnaîtra une suite de sommes de Riemann.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.
   a) Calculer la limite de $S_{2n}-S_n$.
   b) Démontrer que la suite $(S_n)_{n\geqslant1}$ diverge. On pourra raisonner par l'absurde.
3. Que peut-on en déduire sur la nature de la série $\sum_{n\geqslant1} \frac{1}{n}$?

82 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \ln\left(1+\frac{k}{n}\right) \text{ et } v_n = \left[\frac{(2n)!}{n!\,n^n}\right]^{\frac{1}{n}}.$$

1. Justifier que la suite $(u_n)_{n\geqslant1}$ converge et déterminer sa limite.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer v_n en fonction de u_n.
3. En déduire que la suite $(v_n)_{n\geqslant1}$ converge et préciser sa limite.

83 Soit $(u_n)_{n\geqslant1}$ et $(v_n)_{n\geqslant1}$ les suites définies par

$$\forall n \geqslant 1,\ u_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2}\sin\left(\frac{k}{n}\right)$$

et

$$v_n = \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{k}{n^2}\right)\sin\left(\frac{k}{n}\right).$$

1. Déterminer, si elle existe, la limite de (u_n).
2. Démontrer que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,
$$0 \leqslant t-\sin(t) \leqslant \frac{t^3}{6}.$$
   Indication : on pourra étudier les fonctions $f : t \mapsto t-\sin(t)$ *et* $g : t \mapsto \sin(t)-t+\dfrac{t^3}{6}$.
3. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant u_n - v_n \leqslant \dfrac{1}{6n^6}\displaystyle\sum_{k=1}^n k^3$.
4. Déterminer, si elles existent, les limites de u_n-v_n puis v_n.

84 Soit $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$. Pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, on note $I(p,q) = \displaystyle\int_\alpha^\beta (t-\alpha)^p (t-\beta)^q \,\mathrm{d}t$.

1. Calculer $I(p,0)$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.
2. Soit $(p,q) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}^*$. Exprimer $I(p,q)$ en fonction de $I(p+1,q-1)$.
3. Calculer $I(p,q)$ pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}^2$.

85 Calculer $I = \displaystyle\int_{1/2}^2 \left(1+\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{Arctan}(t)\ \mathrm{d}t$ en effectuant le changement de variable $t = \dfrac{1}{u}$.

86 Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue vérifiant : $\forall x \in [a,b],\ f(a+b-x) = f(x)$.

1. À l'aide d'un changment de variable, démontrer que
$$\int_a^b t f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

2. Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x}{1+\sin(x)}\,\mathrm{d}x$.

87 Lemme de Riemann-Lebesgue (version facile)

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$, et $f \in \mathscr{C}^1([a,b],\mathbb{R})$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \displaystyle\int_a^b f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t$.

Démontrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. *Indication : on pourra utiliser une intégration par parties.*

88 Intégrales de Wallis

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier que I_n existe puis que $I_n > 0$.
2. Déterminer pour tout entier $n \geqslant 2$ une relation de récurrence entre I_n et I_{n-2}.
3. Exprimer I_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$. On distinguera le cas n pair du cas n impair et on donnera des expressions simples à l'aide de factorielles.
4. Étudier le sens de variation de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
5. Déduire des questions 2) et 4) que $I_n \sim I_{n-1}$.
6. Démontrer que la suite $(nI_nI_{n-1})_{n\geqslant 1}$ est constante.
7. En déduire que $I_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

89

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $I(x) = \displaystyle\int_{1/x}^{x} \frac{t\ln(t)}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t$.

1. Justifier que la fonction I est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.
2. Calculer $I'(x)$ pour tout $x > 0$.
3. En déduire la valeur de $I(x)$ pour tout $x > 0$.

90 CCINP 56

On considère la fonction H définie sur $]1,+\infty[$ par :

$$\forall x \in]1,+\infty[,\ H(x) = \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)}.$$

1. Montrer que H est $\mathscr{C}^1$ sur $]1,+\infty[$ et calculer sa dérivée.
2. Montrer que la fonction $u : x \mapsto \dfrac{1}{\ln(x)} - \dfrac{1}{x-1}$ admet une limite finie ℓ en $x=1$.
3. Donner la définition de $u(x) \underset{x\to 1^+}{\longrightarrow} \ell$. En déduire qu'il existe $a \in]1,+\infty[$ tel que u est bornée sur $]1,a]$.
4. En utilisant la fonction u de la question 2), calculer la limite en 1^+ de la fonction H.

91 Théorème de la moyenne

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. Soit f une fonction continue de $[a,b]$ vers $\mathbb{R}$.

Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = (b-a)f(c).$$

Indication : appliquer le théorème des accroissements finis à une fonction convenablement choisie.

Équations différentielles

Cahier de Calcul : fiche 28.

92 CCINP 31

1. Déterminer une primitive de $x \mapsto \cos^4 x$.
2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y'' + y = \cos^3 x$ ~~en utilisant la méthode de variation des constantes~~ [en linéarisant le membre de droite].

93 CCINP 42

On considère les deux équations différentielles suivantes :

$$2xy' - 3y = 0 \quad (H)$$

$$2xy' - 3y = \sqrt{x} \quad (E)$$

1. Résoudre (H) sur l'intervalle $]0,+\infty[$.
2. Résoudre (E) sur l'intervalle $]0,+\infty[$.
3. L'équation (E) admet-elle des solutions sur l'intervalle $[0,+\infty[$?

Séries numériques

Cahier de Calcul : fiche 29.

94 CCINP 5 : Série de Bertrand particulière

1. On considère la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n(\ln n)^{\alpha}}$ où $n \geqslant 2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

   (a) **Cas** $\alpha \leqslant 0$

   En utilisant une minoration très simple de u_n, démontrer que la série diverge.

   (b) **Cas** $\alpha > 0$

   Étudier la nature de la série.
   Indication : On pourra utiliser la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{x(\ln x)^{\alpha}}$.
2. Déterminer la nature de la série

$$\sum_{n\geqslant 3} \frac{\left(\mathrm{e} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}}{(\ln(n^2+n))^2}.$$

95 CCINP 6 : Critère de d'Alembert

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs et ℓ un réel positif strictement inférieur à 1.

1. Démontrer que si $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$, alors la série $\sum u_n$ converge.
   Indication : écrire, judicieusement, la définition de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$, puis majorer, pour n assez grand, u_n par le terme général d'une suite géométrique.
2. Quelle est la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{n!}{n^n}$?

96 CCINP 7

1. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non nulle à partir d'un certain rang.

   (a) Prouver que si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ alors u_n et v_n sont de même signe à partir d'un certain rang.

   (b) Dans cette question, on suppose que (v_n) est positive. Prouver que

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \Longrightarrow \sum u_n \text{ et } \sum v_n \text{ sont de même nature.}$$

2. Étudier la convergence de la série

$$\sum_{n\geqslant 2} \frac{(\mathrm{i}-1)\sin\left(\frac{1}{n}\right)\ln n}{\left(\sqrt{n+3}-1\right)}.$$

   (i est ici le nombre complexe de carré égal à -1)

97 CCINP 8 : Séries alternées

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante positive de limite nulle.

1. (a) Démontrer que la série $\sum(-1)^k u_k$ est convergente.
   Indication : on pourra considérer $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ avec $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_k$.

   (b) Donner une majoration de la valeur absolue du reste de la série $\sum(-1)^k u_k$.
2. (a) Étudier la convergence ~~simple~~ [pour $x \in \mathbb{R}$ fixé] de la série ~~de fonctions~~ $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n e^{-nx}}{n}$.

   (b) ~~Étudier la convergence uniforme sur $[0,+\infty[$ de la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n e^{-nx}}{n}$.~~

98 CCINP 46 : Séries alternées

On considère la série

$$\sum_{n\geqslant 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right).$$

1. Prouver que, au voisinage de $+\infty$,
$$\pi\sqrt{n^2+n+1} = n\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha\frac{\pi}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
où α est un réel que l'on déterminera.
2. En déduire que $\sum\limits_{n\geqslant 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$ converge.
3. $\sum\limits_{n\geqslant 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$ converge-t-elle absolument ?

Dénombrement et Probabilités

Cahier de Calcul : fiche 19.

99 CCINP 112

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble possédant n éléments.
On désigne par $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.

1. Déterminer le nombre a de couples $(A,B) \in (\mathscr{P}(E))^2$ tels que $A \subset B$.
2. Déterminer le nombre b de couples $(A,B) \in (\mathscr{P}(E))^2$ tels que $A \cap B = \varnothing$.
3. Déterminer le nombre c de triplets $(A,B,C) \in (\mathscr{P}(E))^3$ tels que A, B et C soient deux à deux disjoints et vérifient $A \cup B \cup C = E$.

100 CCINP 105

1. Énoncer et démontrer la formule de Bayes pour un système complet d'événements.
2. On dispose de 100 dés dont 25 sont pipés.
Pour chaque dé pipé, la probabilité d'obtenir le chiffre 6 lors d'un lancer vaut $\frac{1}{2}$.
   (a) On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé et on obtient le chiffre 6.
   Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé ?
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé n fois et on obtient n fois le chiffre 6.
   Quelle est la probabilité p_n que ce dé soit pipé ?
   (c) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$. Interpréter ce résultat.

101 CCINP 101

Dans une zone désertique, un animal erre entre trois points d'eau A,B et C.
A l'instant $t = 0$, il se trouve au point A.
Quand il a épuisé l'eau du point où il se trouve, il part avec équiprobabilité rejoindre l'un des deux autres points d'eau.
L'eau du point qu'il vient de quitter se régénère alors.

Soit $n \in \mathbb{N}$.
On note A_n l'événement" l'animal est en A après son $n^{\text{ième}}$ trajet".
On note B_n l'événement" l'animal est en B après son $n^{\text{ième}}$ trajet".
On note C_n l'événement" l'animal est en C après son $n^{\text{ième}}$ trajet". On pose $\mathbb{P}(A_n) = a_n$, $\mathbb{P}(B_n) = b_n$ et $\mathbb{P}(C_n) = c_n$.

1. (a) Exprimer, en le justifiant, a_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.
   (b) Exprimer, de même, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.
2. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$.
   (a) ~~Justifier, sans calculs, que la matrice A est diagonalisable.~~
   (b) ~~Prouver que $-\frac{1}{2}$ est valeur propre de A et déterminer le sous-espace propre associé.~~
   (c) ~~Déterminer~~ [On admet qu'il existe] une matrice P inversible et une matrice D diagonale de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $D = P^{-1}AP$.
   Remarque : Le calcul de P^{-1} n'est pas demandé.
3. Montrer comment les résultats de la question 2. peuvent être utilisés pour calculer a_n, b_n et c_n en fonction de n.
Remarque : Aucune expression finalisée de a_n, b_n et c_n n'est demandée.

102 CCINP 107

On dispose de deux urnes U_1 et U_2.
L'urne U_1 contient deux boules blanches et trois boules noires.
L'urne U_2 contient quatre boules blanches et trois boules noires.
On effectue des tirages successifs dans les conditions suivantes : on choisit une urne au hasard et on tire une boule dans l'urne choisie. On note sa couleur et on la remet dans l'urne d'où elle provient.

- Si la boule tirée était blanche, le tirage suivant se fait dans l'urne U_1.
- Sinon le tirage suivant se fait dans l'urne U_2.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n l'événement « la boule tirée au $n^{\text{ième}}$ tirage est blanche » et on pose $p_n = P(B_n)$.

1. Calculer p_1.
2. Prouver que
$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, p_{n+1} = -\frac{6}{35}p_n + \frac{4}{7}.$$
3. En déduire, pour tout entier naturel n non nul, la valeur de p_n.

103 CCINP 95

Une urne contient deux boules blanches et huit boules noires.

1. Un joueur tire successivement, avec remise, cinq boules dans cette urne.
Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 2 points et pour chaque boule noire tirée, il perd 3 points.
On note X la variable aléatoire représentant le nombre de boules blanches tirées.
On note Y le nombre de points obtenus par le joueur sur une partie.
   (a) Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.
   (b) Déterminer la loi de Y, son espérance et sa variance.
2. Dans cette question, on suppose que les cinq tirages successifs se font sans remise.
   (a) Déterminer la loi de X.
   (b) Déterminer la loi de Y.

104 CCINP 98

Une secrétaire effectue, une première fois, un appel téléphonique vers n correspondants distincts.
On admet que les n appels constituent n expériences indépendantes et que pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant demandé est p $(p \in]0,1[)$.
Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de correspondants obtenus.

1. Donner la loi de X. Justifier.
2. La secrétaire rappelle une seconde fois, dans les mêmes conditions, chacun des $n - X$ correspondants qu'elle n'a pas pu joindre au cours de la première série d'appels. On note Y la variable aléatoire représentant le nombre de personnes jointes au cours de la seconde série d'appels.
   (a) Soit $i \in [\![0,n]\!]$. Déterminer, pour $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(Y = k | X = i)$.
   (b) Prouver que $Z = X + Y$ suit une loi binomiale dont on déterminera le paramètre.
   Indication : on pourra utiliser, sans la prouver, l'égalité suivante : $\binom{n-i}{k-i}\binom{n}{i} = \binom{k}{i}\binom{n}{k}$.
   (c) Déterminer l'espérance et la variance de Z.

105 CCINP 99

1. Rappeler l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
2. Soit (Y_n) une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, de même loi et admettant un moment d'ordre 2. On pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} Y_k$.
Prouver que pour tout $a \in]0,+\infty[$,
$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}(Y_1)\right| \geqslant a\right) \leqslant \frac{V(Y_1)}{na^2}.$$

3. **Application** :
On effectue des tirages successifs, avec remise, d'une boule dans une urne contenant 2 boules rouges et 3 boules noires.
Á partir de quel nombre de tirages peut-on garantir à plus de 95% que la proportion de boules rouges obtenues restera comprise entre $0{,}35$ et $0{,}45$?
Indication : Considérer la suite (Y_i) de variables aléatoires de Bernoulli où Y_i mesure l'issue du $i^{\text{ème}}$ tirage.

106 CCINP 104

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.

On dispose de n boules numérotées de 1 à n et d'une boîte formée de trois compartiments identiques également numérotés de 1 à 3.

On lance simultanément les n boules.

Elles viennent se ranger aléatoirement dans les 3 compartiments.

Chaque compartiment peut éventuellement contenir les n boules.

On note X la variable aléatoire qui à chaque expérience aléatoire fait correspondre le nombre de compartiments restés vides.

1. Préciser les valeurs prises par X.
2. (a) Déterminer la probabilité
$$\mathbb{P}(X=2).$$
(b) Finir de déterminer la loi de probabilité de X.
3. (a) Calculer $\mathbb{E}(X)$.
(b) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X)$. Interpréter ce résultat.

107 CCINP 109

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Une urne contient n boules blanches numérotées de 1 à n et deux boules noires numérotées 1 et 2.

On effectue le tirage une à une, sans remise, de toutes les boules de l'urne.

On suppose que les tirages sont équiprobables.

On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule blanche.

On note Y la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule numérotée 1.

1. Déterminer la loi de X.
2. Déterminer la loi de Y.

108

On dispose de 100 dés dont 25 sont pipés. Pour chaque dé pipé, la probabilité d'obtenir le chiffre 6 lors d'un lancer vaut $\frac{1}{2}$.

1. On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé et on obtient le chiffre 6. Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé ?
2. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé n fois et on obtient n fois le chiffre 6. Quelle est la probabilité p_n que ce dé soit pipé ?
3. Déterminer la limite de p_n. Interpréter ce résultat.

109

Soit $(M_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de menteurs qui délivrent un message codé sur un bit, 0 ou 1. Ces individus mentent avec une probabilité $p\in\,]0,1[$ et délivrent le message reçu avec une probabilité $q=1-p$. Le message initial est transmis à M_1.

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on note u_n la probabilité que M_n délivre le message initial.

1. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
2. Exprimer, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, u_n en fonction de n.
3. Déterminer la limite de u_n. Interpréter le résultat obtenu.

110 Marche aléatoire et retour à l'origine

On étudie la marche aléatoire d'une particule se déplaçant sur les points d'abscisses entières d'un axe gradué d'origine O.

À l'instant $t=0$, la particule est à l'origine, c'est-à-dire au point O. Elle se déplace à chaque unité de temps d'une unité sur la droite (l'abscisse de la particule augmentant d'une unité) avec la probabilité $\frac{1}{2}$ ou d'une unité sur la gauche (l'abscisse de la particule diminuant d'une unité) avec la probabilité $\frac{1}{2}$.

On suppose que les déplacements de la particule sont indépendants les uns des autres.

Pour tout $k\in\mathbb{N}$, on note X_k la variable aléatoire égale à 1 si la particule se trouve à l'origine à l'instant k, égale à 0 sinon.

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on note Z_n la variable aléatoire égale au nombre de fois où la particule se trouve à l'origine (c'est-à-dire au point O) entre les instants 0 et $2n$, avec 0 et $2n$ compris.

On suppose que toutes les variables aléatoires décrites précédemment sont définies sur un espace probabilisé noté $(\Omega,\mathscr{A},P)$.

1. Démontrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{4^k}\binom{2k}{k}=\frac{2n+1}{4^n}\binom{2n}{n}$.
2. Soit $k\in\mathbb{N}$.
a) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X_k, en discutant selon la parité de k.
b) En déduire l'espérance de X_k.
3. a) Soit $n\in\mathbb{N}$. Exprimer Z_n en fonction de $X_0,X_1,\dots,X_{2n}$ puis en déduire $\mathbb{E}(Z_n)$.
b) Démontrer que $\mathbb{E}(Z_n)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}2\sqrt{\dfrac{n}{\pi}}$.
Indication : on pourra utiliser la formule de Stirling.

Fonctions de deux variables

Cahier de Calcul : fiche 33.

111 CCINP 33

On pose :
$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\},\ f(x,y)=\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$
et $f(0,0)=0$.

1. Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Démontrer que f admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$.
3. f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$? Justifier.

112 CCINP 52

Soit $\alpha\in\mathbb{R}$. On considère l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y^4}{x^2+y^2-xy} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ \alpha & \text{si } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

1. Prouver que
$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x^2+y^2-xy\geqslant\frac{1}{2}(x^2+y^2).$$
2. (a) Justifier que le domaine de définition de f est bien $\mathbb{R}^2$.
(b) Déterminer α pour que f soit continue sur $\mathbb{R}^2$.
3. Dans cette question, on suppose que $\alpha=0$.
(a) Justifier l'existence de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ et les calculer.
(b) Justifier l'existence de $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ et donner leur valeur.
(c) f est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

113

Déterminer les extrema locaux des fonctions $f:\mathbb{R}^2\mapsto\mathbb{R}$ suivantes :

1. $f(x,y)=x^2+xy+y^2-3x-6y$
2. $g(x,y)=x^2+2y^2-2xy-2y+5$
3. $h(x,y)=x^3+y^3$
4. $i(x,y)=(x-y)^2+(x+y)^3$
5. $j(x,y)=x^3+y^3-3xy$.