TD ✻ Suites et Séries numériques

Suites

1 **Oral Centrale** Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\gamma\in]-1,1[$. Montrer $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \iff a_{n+1}-\gamma a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Indication : preuve type Cesàro...

2 **Oral Mines - Centrale - X** Soit, pour $n\geqslant 2$, $P_n=X^n-X-1$.

Démontrer que P_n a une unique racine réelle positive u_n. Démontrer que la suite (u_n) converge, et donner un développement asymptotique à trois termes de u_n (la limite étant le premier de ces trois termes).

3 **Oral Mines - Centrale - X** Soit, pour $n\geqslant 2$, $P_n=X^n-nX+1$.

Démontrer que P_n a une plus grande racine réelle u_n. Démontrer que la suite (u_n) converge, et donner un développement asymptotique à deux termes de u_n (la limite étant le premier de ces deux termes).

4 **Oral Mines - X** Soit, pour $n\geqslant 1$, $f_n\ :\ x\mapsto \sum_{k=1}^{n} x^k -1$.

Montrer qu'il existe un unique réel strictement positif tel que $f_n(x_n)=0$.
Étudier la suite (x_n) et en donner un développement asymptotique à deux termes.

5 **Oral ENS** Caractériser les suites réelles $(u_n)_{n\geqslant 0}$ telles qu'il existe une permutation σ pour laquelle la suite $\left(u_{\sigma(n)}\right)_{n\geqslant 0}$ est monotone à partir d'un certain rang.

6 **Oral X - Suites convexes bornées** On considère une suite de réels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on note pour $n\geqslant 0$, $\Delta u_n=u_n-u_{n+1}$ et $\Delta^2 u_n=\Delta u_n-\Delta u_{n+1}$. On suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\Delta^2 u_n\geqslant 0$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et que $n\Delta u_n$ converge vers 0.
2. Montrer que la série $\sum(n+1)\Delta^2 u_n$ converge.

7 **Oral X** Convergence et limite de $u_n=\dfrac{1}{n^n}\sum_{k=1}^{n}k^n$.

Séries

8 **Pour chauffer** Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un terme général décroissant de série convergente, montrer que $u_n=\mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

9 **Oral Mines – pas difficile** Soit $\alpha\in]1,+\infty[$. Déterminer la nature des séries de terme général donné par les formules

$$u_n=\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k^\alpha},\qquad v_n=\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k^\alpha},\qquad w_n=\frac{\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k^2}}{\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)^\alpha}$$

10 **Oral Centrale** Étudier la suite (u_n) définie par $u_0\in\mathbb{R}$ et, pour tout n, $u_{n+1}=\dfrac{u_n+1}{u_n^2+1}$.

Étudier la nature de la série de terme général $v_n=u_n-1$.

11 **Oral Mines** Discuter, en fonction des réels strictement positifs a et α, la nature de la série de terme général

$$u_n=a^{x_n}\qquad\text{où}\qquad x_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha}$$

12 **Oral X? Pas si difficile!** On définit $u_n=1/n$ si n n'est pas un carré, $u_n=-1/n$ si n est un carré. Nature de la série $\sum u_n$?

13 **Oral X - ENS** Soit $d>0$ et (z_n) une suite de nombres complexes non nuls telle que, si $n\neq m$, $|z_n-z_m|\geqslant d$. Soit $\alpha>2$. Montrer que la série de terme général $\dfrac{1}{|z_n|^\alpha}$ converge.

14 **Oral X** Posons, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n=\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{k}}-2\sqrt{n}$.

1. Montrer que la suite (u_n) converge. On note ℓ sa limite.
2. Préciser le signe de ℓ.
3. Montrer que $\ell=-(1+\sqrt{2})\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$.
4. Montrer que $u_n=\ell+\dfrac{1}{2\sqrt{n}}+\mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right)$.
5. Montrer que $\ell=-\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})^2}$.
6. Étudier les variations de u.
7. Déterminer un développement asymptotique semblable à celui de la question 4 pour la suite de terme général $v_n=\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}-\ln n$.
8. Soit $\alpha\in]0,1[$. Donner un développement asymptotique à trois termes pour $w_n=\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k^\alpha}$.