Séries numériques

- Ne jamais parler de la somme d'une série $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$ avant d'avoir démontré la convergence de la série.
- En général, pour étudier la convergence d'une série $\sum u_n$, c'est à la suite u_n que l'on s'intéresse, rarement aux sommes partielles.
- La première des choses à faire est de vérifier si le terme général est de signe constant. Si ce n'est pas le cas, on peut essayer de montrer l'absolue convergence qui implique la convergence.
- On peut utiliser des o ou O : pour des termes généraux réels positifs a priori, mais $u_n = \mathrm{o}(\dots)$ et $\|u_n\| = \mathrm{o}(\dots)$ signifiant la même chose, c'est une technique de démonstration d'absolue convergence. (Pour le moment $\|\cdot\|$ désigne la valeur absolue ou le module).
- Avec un équivalent : attention, cette fois-ci il faut **absolument** que les termes soient réels positifs (ou en tout cas de signe constant) à partir d'un certain rang.
- Pour les séries à termes de signe non constant et non absolument convergentes, on peut utiliser le théorème sur les séries alternées, en vérifiant **toutes** les hypothèses de celui-ci (un $(-1)^n$ ne suffit pas !). Si ce n'est pas possible, il reste la solution du développement asymptotique.
- La comparaison à une intégrale (surtout pour les termes généraux réels positifs) peut servir (parfois) à conclure sur la convergence, trouver des équivalents de sommes partielles, de restes, etc.
- Enfin, pour le calcul de sommes d'une séries, les techniques les plus courantes sont de faire apparaître des sommes télescopiques (parfois via une décomposition en éléments simples), ou se ramener à une somme connue : géométrique, exponentielle (vous aurez un catalogue intéressant dans le chapitre sur les séries entières).
- Attention sur la manipulation des sommes de séries : $\sum_{n=0}^{+\infty}(u_n+v_n)$ peut exister alors que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ ne sont pas définies... Y réfléchir à deux fois avant d'écrire $\sum_{n=0}^{+\infty}(u_n+v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$. Dans le doute, il est souvent préférable de repasser par des sommes partielles.
- Les résultats sur la sommation des relations de comparaison, comme le théorème de Cesàro qui en est une application sont des outils permettant, entre autre, d'obtenir des informations asymptotiques sur des suites récurrentes.

Séries à termes de signe constant

1 Déterminer la nature des séries de terme général

1. $u_n = \sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}$
2. $v_n = \dfrac{\operatorname{ch} n}{\operatorname{ch} 2n}$
3. $w_n = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$
4. $x_n = \mathrm{e} - \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$
5. $y_n = \dfrac{1}{n\cos^2 n}$
6. $z_n = \dfrac{n^n}{(2n)!}$
7. $s_n = \sin(2\operatorname{Arctan} n)$

2 Nature de $\sum \left|\ln\left(\cos\dfrac{1}{n}\right)\right|^{\alpha}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.

3 Nature de $\sum \operatorname{Arccos}\left(\dfrac{n^\alpha}{1+n^\alpha}\right)$ où $\alpha \in \mathbb{R}^+$.

4 Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes strictement positifs convergentes.

Montrer que $\sum \min(u_n, v_n)$, $\sum \max(u_n, v_n)$, $\sum \sqrt{u_n v_n}$ et $\sum \dfrac{u_n v_n}{u_n + v_n}$ sont aussi convergentes.

5
1. Montrer que $\sum \sin\left(\pi(2-\sqrt{3})^n\right)$ converge.
2. Montrer que pour tout n, $(2-\sqrt{3})^n + (2+\sqrt{3})^n \in 2\mathbb{Z}$.
3. Quelle est la nature de $\sum \sin\left(\pi(2+\sqrt{3})^n\right)$?

6 Nature de $\sum a^{\ln n}$ où $a \in \mathbb{R}_+^*$.

7 Convergence de la suite de terme général $\prod_{k=2}^{n}\left(2-\mathrm{e}^{1/k}\right)$.

8 **Règle de Raabe-Duhamel** Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels strictement positifs. On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} = 1 - \dfrac{\alpha}{n} + \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $y_n = \ln(n^\alpha x_n)$.

1. Démontrer que la série $\sum (y_{n+1} - y_n)$ converge.
2. Démontrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $x_n \sim \dfrac{\lambda}{n^\alpha}$.
3. En déduire que la série $\sum x_n$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.
4. Soit $a, b \in R_+^*$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 > 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{n+a}{n+b} u_n$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.
   (a) Démontrer que la série $\sum u_n$ converge si et seulement si $b - a > 1$.
   (b) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(a-b+1)S_n = (n+a)u_n + (1-b)u_0$.
   (c) En déduire la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ lorsque $b - a > 1$.

9 **CCINP 5 et 6 : Série de Bertrand particulière et critère de D'Alembert**

Séries à termes quelconques

10 Déterminer la nature des séries de terme général

1. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$
2. $v_n = \ln\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{n+1}\right)$
3. $w_n = \dfrac{(-1)^n}{n + \sin n}$
4. $x_n = \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$
5. $y_n = \dfrac{(-1)^n}{\ln n + (-1)^n}$
6. $z_n = \sin\left(n\pi + \dfrac{\pi}{n}\right)$

11 Convergence de $\sum \left(\exp\left(\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}\right) - 1\right)$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.

12 Soit $P_n = \prod_{k=2}^{n}\left(1 + \dfrac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\right)$. Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que $P_n \sim \dfrac{C}{\sqrt{n}}$.

13 Nature et somme éventuelle de $\sum \left(\sqrt{n} + a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2}\right)$ où $a, b \in \mathbb{R}$.

14 **CCINP 7 ; 8 et 46 : terme généraux équivalents et séries alternées**

15 Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$.

1. Justifier l'existence de R_n et montrer que $R_n + R_{n+1} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k(k+1)}$.
2. Donner un équivalent de R_n et déterminer la nature de $\sum R_n$.

16 **Transformation d'Abel** Il s'agit de l'analogue discret de l'intégration par parties.

1. Soit u une suite à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie, (S_n) la suite des sommes partielles de $\sum u_n$ et $(v_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Montrer que
$$\sum_{n=0}^{p} v_n u_n = v_p S_p + \sum_{n=0}^{p-1} (v_n - v_{n+1}) S_n.$$
2. Montrer que si l'on suppose la suite (S_n) bornée, la suite (v_n) décroissante et de limite nulle, alors la série $\sum u_n v_n$ converge.
3. Le théorème sur les séries alternées peut-il être considéré comme un cas particulier de ce résultat ?
4. Étudier suivant les valeurs des réels α et θ la nature de $\sum \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$.
5. Obtenir, en revenant sous les hypothèses du 2, une majoration du reste.

Calcul de sommes

17 Justifier leur bonne définition et calculer les sommes
$$\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}.$$

18 Sachant que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e$, calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{n!}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2-2}{n!}$.

19 Convergence et somme de
$$\sum \operatorname{Arctan} \frac{1}{n^2+n+1}.$$
On pourra utiliser que $\frac{1}{n^2+n+1} = \frac{(n+1)-n}{1+(n+1)n}$...

20 Convergence et somme de $\sum \frac{\sin n\alpha}{2^n}$.

Comparaison avec des intégrales

21 Déterminer un équivalent de $\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}$.

22 Déterminer un équivalent de $\ln n!$.

23 Démontrer que si $|x| < 1$, la série $\sum \frac{x^n}{1+x^n}$ converge. Par comparaison à une intégrale, montrer que si l'on note $f(x)$ sa somme, $f(x) \underset{x \to 1^-}{\sim} \frac{\ln 2}{1-x}$.

24 Soit $\alpha > 1$. Déterminer la nature de la série de terme général $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.

Sommation des relations de comparaison

25 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \frac{1}{n^2}$, $v_n = \frac{1}{n(n+1)}$ et $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

1. Déterminer un équivalent simple de R_n.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $w_n = u_n - v_n$. Démontrer que $w_n \sim \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.
3. Déterminer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $R_n = \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

26 Soit u suite définie par $u_0 > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$.

1. Étudier la convergence de u et déterminer sa limite.
2. Déterminer la limite de $\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}$ et en déduire un équivalent de u_n.

27 **Développement asymptotique de la série harmonique et de $n!$**

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Montrer que la suite $(H_n - \ln n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge. On note γ sa limite (constante d'Euler).
2. Si $\alpha > 1$, déterminer un équivalent de $R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.
3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $t_n = H_n - \ln n - \gamma$. Déterminer un équivalent de $t_{n+1} - t_n$ puis de t_n.
4. Raisonner de même pour montrer que $H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
5. En s'inspirant de ce qui précède et en posant $u_n = \ln\left(\frac{n! e^n}{n^n \sqrt{n}}\right)$, montrer que
$$n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right).$$