# Suites (révisions)

**1** Si $A$ et $B$ sont deux parties non vides majorées de $\mathbb{R}$, étudier les bornes supérieures de $A\cup B$, $A+B$ et $\lambda A$ pour $\lambda\in\mathbb{R}$.

**2** Étudier la convergence de la suite de terme général $u_n=\left(1+\frac{a}{n}\right)^n$ avec $a\in\mathbb{R}$.
Lorsqu'il y a une limite finie $\ell$, donner un équivalent de $u_n-\ell$.

**3** Montrer qu'une suite d'entiers convergente est stationnaire.

**4** Soit $u$ une suite telle que $(u_{2n})$, $(u_{2n+1})$ et $(u_{3n})$ convergent. Prouver que $u$ converge.

**5** **Théorème de Césáro – lemme de l'escalier**

1. Prouver le théorème de Césáro : si $u\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}^*}$ telle que $u_n\longrightarrow\ell\in\mathbb{C}$, alors $v_n=\dfrac{u_1+\cdots+u_n}{n}\longrightarrow\ell$, et le résultat est toujours valable si $u\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$ et $\ell=\pm\infty$. La réciproque est-elle vrai ?
2. En déduire le lemme de l'escalier : si $u_{n+1}-u_n\longrightarrow\ell$ alors $\dfrac{u_n}{n}\longrightarrow\ell$.
3. Montrer que si $u\in{\mathbb{R}_+^*}^{\mathbb{N}}$ telle que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\longrightarrow\ell$, alors $\sqrt[n]{u_n}\longrightarrow\ell$.
4. Déterminer les limites des suites de terme général $\binom{2n}{n}^{\frac{1}{n}}$ ; $\dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}$ ; $\dfrac{\sqrt[n]{n(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}}{n}$ ; $\dfrac{\sqrt[n]{1\times3\times\cdots\times(2n-1)}}{n}$ ; $\dfrac{1}{n^2}\sqrt[n]{\dfrac{(3n)!}{n!}}$.

**6** **Irrationalité de e**

On pose $u_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$ et $v_n=u_n+\dfrac{1}{n\,n!}$. Montrer que les deux suites convergent vers une même limite : on admettra qu'elle vaut e. En déduire que e est irrationnel.
*On pourra remarquer que si $e=\frac{p}{q}$, $u_q<\mathrm{e}<v_q$...*

**7** **Moyennes et suites de Schwob**

1. Les moyennes harmonique, géométrique et arithmétique de deux réels strictement positifs $a,b$ sont respectivement $\frac{2}{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)}$, $\sqrt{ab}$, $\frac{a+b}{2}$. Montrer que ces nombres sont ainsi rangés dans l'ordre croissant.
2. Soient $a$ et $b$ des nombres réels strictement positifs. On définit les suites $u$ et $v$ par $u_0=a$, $v_0=b$ et si $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=\dfrac{u_n+v_n}{2}$ et $v_{n+1}=\sqrt{u_nv_n}$.
Montrer que ces deux suites convergent vers une même limite appelée moyenne arithmético-géométrique de $a$ et $b$. On ne peut pas l'exprimer simplement avec les fonctions usuelles.
3. Soient $a$ et $b$ des nombres réels strictement positifs. On définit les suites $u$ et $v$ par $u_0=a$, $v_0=b$ et si $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=\dfrac{u_n+v_n}{2}$ et $v_{n+1}=\frac{2}{\left(\frac{1}{u_n}+\frac{1}{v_n}\right)}$.
Montrer que ces deux suites convergent vers une même limite que l'on déterminera.



**8** Soit $u$ une suite de réels strictement positifs.

1. On suppose $\sqrt[n]{u_n}\longrightarrow\ell$.
   (a) Montrer que si $\ell<1$ alors $u_n\to0$.
   (b) Montrer que si $\ell>1$ alors $u_n\to+\infty$.
   (c) Montrer que si $\ell=1$, on ne peut pas conclure.
2. Mêmes questions si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\longrightarrow\ell$.

**9** **CCINP 43 (suite récurrente ; équation fonctionnelle)**

# Analyse asymptotique (révisions)

- Ne pas oublier qu'on ne peut pas en général additionner ou composer avec une fonction (même continue) des équivalents. Obtenir un équivalent nul ne doit (quasiment) jamais arriver ! Bien retenir que $u\sim v$ si et seulement si $u=v+o(v)$. Il faut connaître l'échelle de comparaison des suites usuelles.
- Pour déterminer un équivalent (pour calculer une limite par exemple) en $a\neq0$, on fait en général un changement de variable $x=a+h$ pour se ramener au voisinage de $0$, et utiliser les équivalents usuels.
- Lorsque l'on demande un DL :
  - La première chose à faire est de se ramener au voisinage de 0 en posant $h=x-a$ ou $h=\frac{1}{x}$. Et, bien sûr, connaître PARFAITEMENT les développements limités usuels (il y a des moyens mnémotechniques (ou logiques) pour les retenir !).
  - Ensuite, voir si des propriétés de parité peuvent simplifier les calculs.
  - Il est souvent difficile de savoir à quel ordre on doit développer chaque terme : prendre le temps d'y réfléchir, et se dire que plus on développe loin, plus on a des chances de faire des erreurs de calcul.
  - Attention à aller assez loin dans le développement d'une composée pour ne pas oublier de terme non négligé.
  - Lorsque l'on a un quotient, on fait en général apparaître du $\dfrac{1}{1\pm u}$.
  - TOUJOURS mettre les termes d'un DL par ordre croissant de négligeabilité. Cela évite bien des erreurs.
- L'une des principales applications des DL est la recherche d'équivalent (et donc de limite). C'est facile, c'est le terme le plus fort (le premier) qui est l'équivalent le plus simple.
- L'autre utilisation classique est celle en géométrie, cela simplifie beaucoup les calculs d'asymptote (et de position de la courbe par rapport à celle-ci).
- Les développements asymptotiques sont en général difficiles. On retiendra que si on note $f_k$ le $k^e$ terme, on a alors $f_{k+1}\sim f-f_1-\cdots-f_k$.
- Si vous avez une calculatrice qui fait du calcul formel, elle sait calculer des développements limités. Sinon, aller sur `http://www.xcasenligne.fr` ou installer l'application `xcas` et utiliser l'instruction `series(f(x), x=a, n)` ou demander gentiment à `Wolfram alpha` pour obtenir un $\mathrm{DL}_n(a)$ de $f$ pour vérifier vos calculs.

**10** **ex CCINP 1**

1. On considère deux suites numériques $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non nulle à partir d'un certain rang et $u_n\underset{+\infty}{\sim}v_n$.
Démontrer que $u_n$ et $v_n$ sont de même signe à partir d'un certain rang.
2. Déterminer le signe, au voisinage de l'infini, de : $u_n=\mathrm{sh}\left(\dfrac{1}{n}\right)-\tan\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

**11** Classer par ordre de prédominance (avec la relation $\ll$) les suites de termes généraux

$$(\ln n)^3,\quad \ln\left(n^3\right),\quad \frac{3^n}{n^3},\quad 2^n,\quad \mathrm{e}^{n/2},\quad (\ln(\ln n))^n,\quad n\ln(\ln n),\quad n\ln n.$$

**12** Classer par ordre de prédominance (avec la relation $\ll$) les suites de termes généraux

$$\frac{1}{n^4},\quad \frac{\ln n}{n^5},\quad \frac{2^n}{1+3^n},\quad 2^{-\ln(\ln n)},\quad \frac{\ln(\ln n)}{\ln n+n},\quad \frac{\ln n}{2^n+n^2},\quad \frac{\tan(1/n)}{1+\cos^3(1/n)},\quad (\cos(1/n))^{\sin(1/n)}-1.$$

**13** Donner un équivalent simple de $\cos\left(\pi n^2\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$.

**14** On pose pour $n\in\mathbb{N}$, $u_n$ l'unique solution de $\tan x=x$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}+n\pi,\frac{\pi}{2}+n\pi\right[$.

1. Montrer que $u_n$ est bien défini.
2. Étudier la monotonie et la limite de $(u_n)$.
3. Trouver un équivalent de $u_n$.
4. Donner un développement asymptotique à deux termes de $u_n$ en exprimant $v_n=u_n-n\pi$ à l'aide d'une arctangente.
5. Donner un développement asymptotique à 4 termes de $u_n$ en réutilisant $v_n$.

**15** Soit la suite $(u_n)$ définie par $u_0\in\mathbb{R}$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=u_n+\mathrm{e}^{-u_n}$.

On pose, pour $n\in\mathbb{N}$, $v_n=\mathrm{e}^{-u_n}$.

1. Déterminer la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Déterminer la limite de $\left(\frac{1}{v_{n+1}}-\frac{1}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. À l'aide du théorème de Cesàro, donner un équivalent de $v_n$.
4. Donner un équivalent de $u_n$.

**16** Déterminer un équivalent en $\frac{\pi}{4}$ de $\left(\tan 2x+\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right)\sin^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$.

**17** Déterminer un équivalent en 1 de $\operatorname{Arccos}$.

**18** Déterminer les développements limités

**1.** $\mathrm{DL}_4(0)$ de $\dfrac{x}{\mathrm{e}^x-1}$

**2.** $\mathrm{DL}_4(0)$ de $\dfrac{x}{\tan x}$

**3.** $\mathrm{DL}_4(0)$ de $(1+x+x^2)^{\frac{1}{x}}$

**4.** $\mathrm{DL}_4(0)$ de $\ln(1+x+\sqrt{1+x})$

**5.** $\mathrm{DL}_4(0)$ de $\ln\dfrac{\ln(1+x)}{x}$

**6.** $\mathrm{DL}_4(0)$ de $(\cos x)^{1+\sin x}$

**7.** $\mathrm{DL}_4(0)$ de $\sqrt{1+\tan x}$

**8.** $\mathrm{DL}_5(0)$ de $\dfrac{x}{\sin x}$

**9.** $\mathrm{DL}_6(0)$ de $\operatorname{ch} x\sin x$

**10.** $\mathrm{DL}_3(1)$ de $\sqrt{x}$

**11.** $\mathrm{DL}_2(0)$ de $\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{\cos x-1}}$

**12.** $\mathrm{DL}_{1000}(0)$ de $\ln\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{999}\frac{x^k}{k!}\right)$



**19** Déterminer un équivalent simple en 0 de

**1.** $\sqrt{\sin x}-\sqrt{\operatorname{sh} x}$

**2.** $\dfrac{\sin x+\operatorname{sh} x-2x}{x(\cos x+\operatorname{ch} x-2)}$

**3.** $\sin x+a\tan x+b\sin^3 x$ où $a,b$ réels

**20** Montrer que l'application $f:\left|\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & x\mathrm{e}^{x^2}\end{array}\right.$ admet une application réciproque définie sur $\mathbb{R}$ et en donner un $\mathrm{DL}_5(0)$.

**21** Déterminer le $\mathrm{DL}_6$ en $+\infty$ de $\ln\left(x\tan\left(\frac{1}{x}\right)\right)$.

**22** Étudier les limites

**1.** $\dfrac{\cos x-\sqrt{\cos x}}{x^2}$ en 0

**2.** $\dfrac{\ln x}{x^2+x-2}$ en 1

**3.** $x^{\frac{1}{1-x}}$ en 1

**4.** $(\pi-2x)\tan x$ en $\dfrac{\pi}{2}$

**5.** $\dfrac{(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}-\mathrm{e}^{1-\frac{x}{2}}}{(1+\tan x)^{\frac{1}{x}}-\mathrm{e}^{\cos\sqrt{x}}}$ en 0