

Mines-Ponts Mathématiques 1 MP 2021 : un corrigé

Théorème de De Moivre - Laplace

Jérémy Larochette (avec la contribution de Rémi Souveton) – Lycée Carnot – Dijon

Avril 2021

Résultats préliminaires

1 ▷ La formule de Stirling dit que $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$ et donc, par définition d'un équivalent (le quotient tend vers 1), on a une suite (ϵ_n) tendant vers 0 telle que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n (1 + \epsilon_n)$.

2 ▷ Soit $\lambda \in \mathbf{R}_*^+$ et $\mu \in \mathbf{R}$. Des inégalités successives découlant de la définition

$$\lambda x + \mu - 1 < \lfloor \lambda x + \mu \rfloor \leq \lambda x + \mu \leq \lceil \lambda x + \mu \rceil < \lambda x + \mu + 1$$

on tire, en faisant l'hypothèse que $x > 0$ (ce qui ne pose pas de problème car on veut $x \rightarrow +\infty$)

$$1 + \frac{\mu - 1}{\lambda x} < \frac{\lfloor \lambda x + \mu \rfloor}{\lambda x} \leq 1 + \frac{\mu}{\lambda x} \leq \frac{\lceil \lambda x + \mu \rceil}{\lambda x} < 1 + \frac{\mu + 1}{\lambda x}$$

donc par encadrement $\frac{\lfloor \lambda x + \mu \rfloor}{\lambda x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$ et $\frac{\lceil \lambda x + \mu \rceil}{\lambda x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$ donc $\lfloor \lambda x + \mu \rfloor \sim \lambda x$ et $\lceil \lambda x + \mu \rceil \sim \lambda x$.

3 ▷ Soit $\varphi : \begin{cases} \mathbf{R} & \rightarrow \mathbf{R} \\ t & \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} \end{cases}$: il s'agit d'une fonction continue et positive sur \mathbf{R} .

Comme $\varphi(t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ lorsque $t \rightarrow +\infty$ par croissances comparées, et comme $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ (intégrale de Riemann, $2 > 1$), φ est intégrable sur $[1, +\infty[$ donc sur $[0, +\infty[$ également.

De même, ou par un argument de parité, φ est intégrable sur $] -\infty, 0]$.

Donc φ est intégrable sur \mathbf{R} et donc $\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(t) dt$ converge.

4 ▷ Avec les développements limités usuels au voisinage de 0,

$$\zeta(x) = (1+x) \ln(1+x) = (1+x) \left(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \right)$$

donc $\zeta(x) = x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ après développement.

Étude asymptotique d'une suite

5 ▷ Pour montrer que p_n est le plus grands des $P(X_n = k)$ pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, il suffit de montrer que pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $P(X_n = k) \leq P(X_n = x_n) = p_n$.

Ayant en tête l'allure en cloche de la loi binomiale, nous montrons $(P(X_n = k))_k$ est croissant jusqu'à x_n puis décroissant ce qui permet bien de conclure.

Or, les probabilités avec la loi binomiale étant strictement positive, si $1 \leq k \leq n$,

$$\frac{P(X_n = k)}{P(X_n = k-1)} = \frac{\binom{n}{k} p^k q^{n-k}}{\binom{n}{k-1} p^{k-1} q^{n-k+1}} = \frac{(k-1)!(n-k+1)!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{p}{q} = \frac{n-k+1}{k} \cdot \frac{p}{q} = \left(\frac{n+1}{k} - 1\right) \frac{p}{q}$$

et

$$\left(\frac{n+1}{k} - 1\right) \frac{p}{q} \geq 1 \iff \frac{n+1}{k} - 1 \geq \frac{q}{p} \iff \frac{n+1}{k} \geq \frac{1}{p} \iff k \leq (n+1)p$$

Or $x_n = \lceil np - q \rceil \leq np - q + 1 = np + p = (n+1)p$ (l'inégalité est même stricte), donc, pour $1 \leq k \leq x_n$,

$$P(X_n = k-1) \leq P(X_n = k).$$

Et $x_n + 1 = \lceil np - q \rceil + 1 \geq np - q + 1 = (n+1)p$, donc pour $x_n + 1 \leq k \leq n$,

$$P(X_n = k-1) \geq P(X_n = k).$$

On a donc bien que le maximum des $P(X_n = k)$ est atteint pour $k = x_n$ et vaut p_n .

6 ▷ Avec la question 2 (et $p > 0$), on a directement $x_n = \lceil np - q \rceil \sim np \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$ donc $x_n \rightarrow +\infty$.

Et comme $np - q \leq x_n < np - q + 1$,

$$n - np + q - 1 = (n+1)q - 1 < n - x_n \leq n - np + q = (n+1)q$$

donc, toujours avec la question 2 (et cette fois $q > 0$), $n - x_n = \lfloor (n+1)q \rfloor \sim (n+1)q \sim nq$ donc $n - x_n \rightarrow +\infty$.

Ainsi, en utilisant trois fois la formule de Stirling,

$$\begin{aligned} \sqrt{npq} p_n &= \sqrt{npq} \frac{n!}{x_n! (n-x_n)!} p^{x_n} q^{n-x_n} \\ &\sim \sqrt{npq} \frac{\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n}{\sqrt{2\pi x_n} \left(\frac{x_n}{e}\right)^{x_n} \sqrt{2\pi(n-x_n)} \left(\frac{n-x_n}{e}\right)^{n-x_n}} p^{x_n} q^{n-x_n} = \sqrt{\frac{n^2 pq}{x_n(n-x_n)}} \frac{n^n p^{x_n} q^{n-x_n}}{\sqrt{2\pi x_n^{x_n} (n-x_n)^{n-x_n}}} \\ &\sim \sqrt{\frac{n^2 pq}{np \cdot nq}} \frac{n^n p^{x_n} q^{n-x_n}}{\sqrt{2\pi x_n^{x_n} (n-x_n)^{n-x_n}}} \end{aligned}$$

donc $\sqrt{npq} p_n \sim \frac{n^n p^{x_n} q^{n-x_n}}{\sqrt{2\pi x_n^{x_n} (n-x_n)^{n-x_n}}}$.

7 ▷ On suppose que $n > \max\left(\frac{p}{q}, \frac{q}{p}\right)$. Alors $np - q > 0$ donc $x_n = \lceil np - q \rceil \geq 1$ et $0 < nq - p = nq + q - 1 = (n+1)q - 1$ donc $n - x_n = \lfloor (n+1)q \rfloor \geq 1$. On peut donc écrire, d'une part,

$$\frac{n^n p^{x_n} q^{n-x_n}}{x_n^{x_n} (n-x_n)^{n-x_n}} = e^{n \ln n + x_n \ln p + (n-x_n) \ln q - x_n \ln x_n - (n-x_n) \ln(n-x_n)}.$$

D'autre part, (le fait que $0 < x_n < n$ légitime l'utilisation de ζ)

$$np \zeta\left(\frac{x_n - np}{np}\right) = x_n \ln\left(\frac{x_n}{np}\right) = x_n \ln x_n - x_n \ln n - x_n \ln p$$

et

$$nq \zeta\left(\frac{np - x_n}{nq}\right) = (n-x_n) \ln\left(\frac{n-x_n}{nq}\right) = (n-x_n) \ln(n-x_n) - (n-x_n) \ln n - (n-x_n) \ln q$$

ce qui permet finalement d'aboutir à l'égalité voulue

$$\frac{n^n p^{x_n} q^{n-x_n}}{x_n^{x_n} (n-x_n)^{n-x_n}} = e^{-np \zeta\left(\frac{x_n - np}{np}\right) - nq \zeta\left(\frac{np - x_n}{nq}\right)}.$$

8 ▷ Pour utiliser le développement limité de la question 4 dans l'expression de la question précédente, on vérifie que $\frac{x_n - np}{np} \rightarrow 0$ et $\frac{np - x_n}{nq} \rightarrow 0$. Comme $n \rightarrow +\infty$, on peut supposer que $n > \max\left(\frac{p}{q}, \frac{q}{p}\right)$. On a par définition

$$np - q \leq x_n \leq np - q + 1 = (n+1)p$$

donc

$$-\frac{q}{np} \leq \frac{x_n - np}{np} \leq \frac{p}{np} = \frac{1}{n}$$

donc, par encadrement, $\frac{x_n - np}{np} \rightarrow 0$. Puis

$$-\frac{p}{nq} \leq \frac{np - x_n}{nq} \leq \frac{q}{nq} = \frac{1}{n}$$

donc, par encadrement, $\frac{np - x_n}{nq} \rightarrow 0$.

Alors, avec 4,

$$np \zeta\left(\frac{x_n - np}{np}\right) = x_n - np + \frac{(x_n - np)^2}{2np} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

(avec $(x_n - np)_n$ borné, intégré au o) et de même

$$nq \zeta\left(\frac{np - x_n}{nq}\right) = np - x_n + \frac{(x_n - np)^2}{2nq} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

et donc,

$$-np \zeta\left(\frac{x_n - np}{np}\right) - nq \zeta\left(\frac{np - x_n}{nq}\right) = -\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) \frac{(x_n - np)^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

car $(x_n - np)_n$ borné et $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ donc $o\left(\frac{1}{n}\right) \rightarrow 0$.

Ainsi, en utilisant les question 6 et 7 et la continuité de l'exponentielle en 0, $\sqrt{npq} p_n \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

Convergence en loi

9 ▷ Comme X_n suit une loi binomiale de paramètre (n, p) , les valeurs prises par les Y_n sont les $\tau_{n,k}$ pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$,

et pour un tel k , $P(Y_n = \tau_{n,k}) = P(X_n = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$.

De plus, np est l'espérance de X_n et npq sa variance donc Y_n est la variable aléatoire centrée réduite associée à X_n : on a directement que $E(Y_n) = 0$ et $V(Y_n) = 1$.

10 ▷ Comme $\frac{1}{\sqrt{npq}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, on a un rang $N_1 \in \mathbf{N}^*$ à partir duquel $\frac{1}{\sqrt{npq}} \leq b - a$.

Comme $\tau_{n,0} = -\sqrt{\frac{np}{q}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$, on a un rang $N_2 \in \mathbf{N}^*$ à partir duquel $\tau_{n,0} \leq a$.

Comme $\tau_{n,n} = \sqrt{\frac{nq}{p}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, on a un rang $N_3 \in \mathbf{N}^*$ à partir duquel $\tau_{n,n} \geq b$.

Soit $N = \max(N_1, N_2, N_3) \in \mathbf{N}^*$. Alors pour tout $n \geq N$, $[a, b] \subset [\tau_{n,0}, \tau_{n,n}]$ et $\frac{1}{\sqrt{npq}} \leq b - a$.

11 ▷ Par définition et croissance de la partie entière, k_n est une fonction croissante en escalier de subdivision adaptée

$$\left(\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\right)_{k \in \mathbf{Z}} = (\tau_{n,k})_{k \in \mathbf{Z}}. \quad \text{C'est donc aussi le cas de } e_n : t \mapsto \frac{k_n(t) - np}{\sqrt{npq}}.$$

De plus, par définition de la partie entière, , pour tout $t \in \mathbf{R}$, $k_n(t) \leq \sqrt{npq}t + np < k_n(t) + 1$ donc

$$e_n(t) \leq t < e_n(t) + \frac{1}{\sqrt{npq}}.$$

Ainsi, pour $t \in \mathbf{R}$ fixé, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $t - \frac{1}{\sqrt{npq}} < e_n(t) \leq t$, donc par encadrement, $e_n(t) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} t$:

$(e_n)_n$ converge simplement vers $\text{id}_{\mathbf{R}}$ (et même uniformément, avec l'encadrement précédent).

12 ▷ Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On remarque que $\tau_{n,k_n(a)} = e_n(a)$ et $\tau_{n,k_n(b)+1} = \frac{k_n(b) + 1 - np}{\sqrt{npq}} = e_n(b) + \frac{1}{\sqrt{npq}}$. On a alors

$$\int_{\tau_{n,k_n(a)}}^{\tau_{n,k_n(b)+1}} \Phi(t) dt = \int_{e_n(a)}^{e_n(b) + \frac{1}{\sqrt{npq}}} \Phi(t) dt = \int_0^{e_n(b) + \frac{1}{\sqrt{npq}}} \Phi(t) dt - \int_0^{e_n(a)} \Phi(t) dt$$

Or $e_n(a) \rightarrow a$, $e_n(b) + \frac{1}{\sqrt{npq}} \rightarrow b$ et Φ est continue sur \mathbf{R} donc $x \mapsto \int_0^x \Phi(t) dt$ qui en est une primitive l'est aussi et

$$\int_{\tau_{n,k_n(a)}}^{\tau_{n,k_n(b)+1}} \Phi(t) dt \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \int_0^b \Phi(t) dt - \int_0^a \Phi(t) dt = \int_a^b \Phi(t) dt.$$

Puis, d'une part,

$$P(e_n(a) \leq Y_n \leq e_n(b)) = \sum_{\substack{k \in \llbracket 0, n \rrbracket \\ e_n(a) \leq \tau_{n,k} = \frac{k-np}{\sqrt{npq}} \leq e_n(b)}} P(X_n = k) = \sum_{k=k_n(a)}^{k_n(b)} P(X_n = k)$$

et d'autre part, avec le changement de variable $u = \sqrt{npq}t + np$,

$$\begin{aligned} \int_{\tau_{n,k_n(a)}}^{\tau_{n,k_n(b)+1}} f_n(t) dt &= \sqrt{npq} \int_{\tau_{n,k_n(a)}}^{\tau_{n,k_n(b)+1}} P(Y_n = e_n(t)) dt = \sqrt{npq} \int_{\tau_{n,k_n(a)}}^{\tau_{n,k_n(b)+1}} P(X_n = k_n(t)) dt \\ &= \int_{k_n(a)}^{k_n(b)+1} P(X_n = \lfloor u \rfloor) du \quad (\text{fonction en escalier}) \\ &= \sum_{k=k_n(a)}^{k_n(b)} 1 \cdot P(X_n = k) \end{aligned}$$

et donc finalement,
$$P(e_n(a) \leq Y_n \leq e_n(b)) = \int_{\tau_{n,k_n(a)}}^{\tau_{n,k_n(b)+1}} f_n(t) dt.$$

13 ▷ Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ (**erreur d'énoncé**). On remarque que $e_n(\tau_{n,k}) = \tau_{n,k_n(\tau_{n,k})} = \tau_{n,k}$ car $k \in \mathbf{Z}$. Alors, en utilisant la question 1,

$$\begin{aligned} f_n(\tau_{n,k}) &= \sqrt{npq} P(Y_n = \tau_{n,k}) = \sqrt{npq} P(X_n = k) = \sqrt{npq} \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} \\ &= \sqrt{npq} \frac{\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n}{\sqrt{2\pi k} \left(\frac{k}{e}\right)^k \sqrt{2\pi(n-k)} \left(\frac{n-k}{e}\right)^{n-k}} p^k q^{n-k} \frac{1 + \epsilon_n}{(1 + \epsilon_k)(1 + \epsilon_{n-k})} \end{aligned}$$

et, après simplifications,
$$f_n(\tau_{n,k}) = \sqrt{npq} \sqrt{\frac{pqn^2}{k(n-k)}} \frac{p^k q^{n-k}}{\left(\frac{k}{n}\right)^k \left(\frac{n-k}{n}\right)^{n-k}} \frac{1 + \epsilon_n}{(1 + \epsilon_k)(1 + \epsilon_{n-k})}.$$

14 ▷ Soit $t \in [a, b]$. On a

$$np + \sqrt{npqt} - 1 \leq k_n(t) \leq np + \sqrt{npqt},$$

donc par encadrement $k_n(t) \sim np$ et

$$nq - \sqrt{npqt} \leq n - k_n(t) \leq nq - \sqrt{npqt} + 1,$$

donc par encadrement $n - k_n(t) \sim nq$.

Donc $k_n(t)(n - k_n(t)) \sim n^2pq$ et $\sqrt{\frac{pqn^2}{k_n(t)(n - k_n(t))}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.

Puis, comme $\epsilon_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, $k_n(t) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ et $n - k_n(t) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ (par exemple avec les équivalents

ci-dessus), $\frac{1 + \epsilon_n}{(1 + \epsilon_k)(1 + \epsilon_{n-k})} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.

15 ▷ Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ tel que $\max\left(\sqrt{\frac{q}{np}}, \sqrt{\frac{p}{nq}}\right) \cdot |\tau_{n,k}| < 1$, alors on peut reprendre les calculs fait en question 7 en remplaçant x_n par k , la condition imposée à k permettant d'avoir des quantités strictement positives dans tous les ln, avec $\frac{k-np}{np} = \sqrt{\frac{q}{np}}\tau_{n,k}$ et $\frac{np-k}{np} = -\sqrt{\frac{p}{nq}}\tau_{n,k}$:

$$\frac{p^k q^{n-k}}{\left(\frac{k}{n}\right)^k \left(\frac{n-k}{n}\right)^{n-k}} = \frac{n^n p^k q^{n-k}}{k^k (n-k)^{n-k}} = e^{-np\zeta\left(\frac{k-np}{np}\right) - nq\zeta\left(\frac{np-k}{nq}\right)}$$

donc $\frac{p^k q^{n-k}}{\left(\frac{k}{n}\right)^k \left(\frac{n-k}{n}\right)^{n-k}} = e^{-np\zeta\left(\sqrt{\frac{q}{np}}\tau_{n,k}\right) - nq\zeta\left(\sqrt{\frac{p}{nq}}\tau_{n,k}\right)}$.

16 ▷ Comme dans la question 8 avec $k_n(t)$ à la place de x_n , on a bien $\sqrt{\frac{q}{np}}\tau_{n,k_n(t)} = \sqrt{\frac{q}{np}}e_n(t) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \cdot t = 0$ et $-\sqrt{\frac{p}{nq}}\tau_{n,k_n(t)} = -\sqrt{\frac{p}{nq}}e_n(t) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et donc à partir d'un certain rang, la condition de la question précédente est bien assurée, ce qui permet d'écrire

$$\begin{aligned} & -np\zeta\left(\sqrt{\frac{q}{np}}\tau_{n,k_n(t)}\right) - nq\zeta\left(\sqrt{\frac{p}{nq}}\tau_{n,k_n(t)}\right) \\ &= -np\left(\sqrt{\frac{q}{np}}e_n(t) + \frac{qe_n^2(t)}{2np} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) - nq\left(-\sqrt{\frac{p}{nq}}e_n(t) + \frac{pe_n^2(t)}{2nq} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= -\frac{1}{2}(p+q)e_n^2(t) + o(1) \\ &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\frac{t^2}{2} \end{aligned}$$

donc, par continuité de l'exponentielle et avec la question précédente,

$$\frac{p^{k_n(t)} q^{n-k_n(t)}}{\left(\frac{k_n(t)}{n}\right)^{k_n(t)} \left(\frac{n-k_n(t)}{n}\right)^{n-k_n(t)}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-t^2/2}.$$

17 ▷ Soit $t \in [a, b]$. On a déjà remarqué que pour $k \in \mathbf{Z}$, $e_n(\tau_{n,k}) = \tau_{n,k}$. Ainsi, e_n est idempotente :

$$e_n(e_n(t)) = e_n(\tau_{n,k_n(t)}) = \tau_{n,k_n(t)} = e_n(t)$$

Donc $f_n(t) = \sqrt{npq}P(Y_n = e_n(t)) = \sqrt{npq}P(Y_n = e_n(e_n(t))) = f_n(e_n(t)) = f_n(\tau_{n,k_n(t)})$.

Mais on ne peut utiliser la question 13 qu'à condition que $k_n(t) \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$.

Or comme $\tau_{n,1} \rightarrow -\infty$ et $\tau_{n,n} \rightarrow +\infty$, on a un rang $N' \in \mathbf{N}^*$ à partir duquel $\tau_{n,1} < t < \tau_{n,n}$, donc $1 < \sqrt{npqt} + np < n$ et $k_n(t) \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$.

Alors, avec les questions 13, 14 et 16, $f_n(t) = f_n(\tau_{n,k_n(t)}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2} = \Phi(t)$.

On cherche ensuite à appliquer le théorème de convergence dominée :

- Pour tout $n \in \mathbf{N}$, f_n est continue par morceaux sur $[a, b]$ (fonction en escalier).
- $(f_n)_n$ converge simplement vers Φ qui est continue sur $[a, b]$.
- Pour tout $t \in [a, b]$ et $n \in \mathbf{N}^*$, en utilisant la question 5,

$$|f_n(t)| = f_n(t) = \sqrt{npq}P(Y_n = e_n(t)) = \sqrt{npq}P(X_n = k_n(t)) \leq \sqrt{npq}p_n$$

Or d'après la question 8, $(\sqrt{npq}p_n)_n$ converge donc est majorée par un réel M donc pour tout $t \in [a, b]$ et $n \in \mathbf{N}^*$, $|f_n(t)| \leq \varphi(t) = M$ où φ est une fonction positive, continue, indépendante de n intégrable sur $[a, b]$.

D'après le théorème de convergence dominée, $\int_a^b f_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b \Phi(t) dt$.

18 ▷ D'après la question 12,

$$\begin{aligned} P(e_n(a) \leq Y_n \leq e_n(b)) &= \int_{\tau_{n, k_n(a)}}^{\tau_{n, k_n(b)+1}} f_n(t) dt = \int_{e_n(a)}^{e_n(b) + \frac{1}{\sqrt{npq}}} f_n(t) dt \\ &= \int_{e_n(a)}^a f_n(t) dt + \int_a^b f_n(t) dt + \int_b^{e_n(b) + \frac{1}{\sqrt{npq}}} f_n(t) dt. \end{aligned}$$

Or on a déjà $\int_a^b f_n(t) dt \rightarrow \int_a^b \Phi(t) dt$ d'après la question précédente puis, pour tout $t \in \mathbf{R}$,

$$0 \leq f_n(t) = \sqrt{npq}P(Y_n = e_n(t)) = \sqrt{npq}P(X_n = k_n(t)) \leq \sqrt{npq}p_n \leq M$$

comme dans la question précédente, d'où, les bornes étant dans le bon ordre vu la question 11,

$$0 \leq \int_{e_n(a)}^a f_n(t) dt \leq M(a - e_n(a)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

donc $\int_{e_n(a)}^a f_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et, de même,

$$0 \leq \int_b^{e_n(b) + \frac{1}{\sqrt{npq}}} f_n(t) dt \leq M \left(e_n(b) + \frac{1}{\sqrt{npq}} - b \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

donc $\int_b^{e_n(b) + \frac{1}{\sqrt{npq}}} f_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Finalement, $P(e_n(a) \leq Y_n \leq e_n(b)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b \Phi(t) dt$.

Ensuite, on a $e_n(a) \leq a$ et $e_n(b) \leq b$ et comme $e_n(b) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} b > a$, on a un rang N_0 à partir duquel $e_n(b) > a$, ce qui donne $e_n(a) \leq a < e_n(b) \leq b$. Donc si $n \geq N_0$,

$$P(a \leq Y_n \leq b) = P(e_n(a) \leq Y_n \leq e_n(b)) - P(e_n(a) \leq Y_n < a) + P(e_n(b) < Y_n \leq b).$$

Mais avec 11,

$$\begin{aligned} 0 \leq P(e_n(a) \leq Y_n < a) &\leq P \left(e_n(a) \leq Y_n < e_n(a) + \frac{1}{\sqrt{npq}} \right) = P(k_n(a) \leq X_n < k_n(a) + 1) \\ &= P(X_n = k_n(a)) \quad \text{car } X_n \text{ à valeurs entières} \\ &= P(Y_n = e_n(a)) = \frac{f_n(a)}{\sqrt{npq}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \cdot \Phi(a) = 0 \end{aligned}$$

donc $P(e_n(a) \leq Y_n < a) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et de la même manière, $P(e_n(b) < Y_n \leq b) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Ainsi, $P(a \leq Y_n \leq b) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b \Phi(t) dt$.

Applications

19 ▷ Soit $T > 0$. On applique l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à Y_n qui est centrée et réduite, et qui dit que $P(|Y_n| \geq T) \leq \frac{V(Y_n)}{T^2} = \frac{1}{T^2}$ donc

$$P(-T \leq Y_n \leq T) \geq P(-T < Y_n < T) = P(|Y_n| < T) \geq 1 - \frac{1}{T^2}$$

puis avec la question précédente en faisant $n \rightarrow +\infty$ avec la question **18**, $\int_{-T}^T \Phi(t) dt \geq 1 - \frac{1}{T^2}$.

Comme par ailleurs $P(-T \leq Y_n \leq T) \leq 1$, en faisant $n \rightarrow +\infty$, $\int_{-T}^T \Phi(t) dt \leq 1$.

Enfin, en faisant tendre T vers $+\infty$ dans l'encadrement $1 - \frac{1}{T^2} \leq \int_{-T}^T \Phi(t) dt \leq 1$ ce qui est licite d'après **3**,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(t) dt = 1.$$

20 ▷ On montre que $P(Y_n \leq b) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^b \Phi(t) dt$. Soit $\varepsilon > 0$. On a pour tout $a < b$, et tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$\begin{aligned} \left| P(Y_n \leq b) - \int_{-\infty}^b \Phi(t) dt \right| &= \left| P(a \leq Y_n \leq b) - \int_a^b \Phi(t) dt - P(Y_n < a) - \int_{-\infty}^a \Phi(t) dt \right| \\ &\leq \left| P(a \leq Y_n \leq b) - \int_a^b \Phi(t) dt \right| + P(Y_n < a) + \int_{-\infty}^a \Phi(t) dt \end{aligned}$$

Comme $\int_{-\infty}^a \Phi(t) dt \xrightarrow{a \rightarrow -\infty} 0$, on a $A \in \mathbf{R}$ tel que si $a \leq A$, $\int_{-\infty}^a \Phi(t) dt \leq \frac{\varepsilon}{3}$.

Puis, avec $a < 0$,

$$P(Y_n < a) \leq P(Y_n \leq a) = P(|Y_n| \geq -a) = P(Y_n^2 \geq a^2) \leq \frac{E(Y_n^2)}{a^2}$$

d'après l'inégalité de Markov. Or Y_n est centrée et réduite donc $1 = V(Y_n) = E(Y_n^2) - E(Y_n)^2 = E(Y_n^2)$ donc

$$P(Y_n < a) \leq \frac{1}{a^2}.$$

Comme $\frac{1}{a^2} \xrightarrow{a \rightarrow -\infty} 0$, on a $A' \in \mathbf{R}_*^-$ tel que si $a \leq A'$, $P(Y_n < a) \leq \frac{\varepsilon}{3}$.

On fixe alors $a \leq \min(A, A')$. Pour ce a , on a d'après la question 18, un rang N à partir duquel

$$\left| P(a \leq Y_n \leq b) - \int_a^b \Phi(t) dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

et alors pour tout $n \geq N$, $\left| P(Y_n \leq b) - \int_{-\infty}^b \Phi(t) dt \right| \leq \varepsilon$.

On a montré que $P(Y_n \leq b) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^b \Phi(t) dt$.

On obtient de manière analogue $P(Y_n \geq a) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^{+\infty} \Phi(t) dt$.

Généralisation

21 ▷ On a $\varphi : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ de classe \mathcal{C}^1 telle que φ' ne s'annule pas, donc par continuité de φ' , celle-ci garde un signe constant et φ étant strictement monotone et continue, elle induit une bijection bicontinue (homéomorphisme) de \mathbf{R} sur l'intervalle $\varphi(\mathbf{R})$.

Si de plus $\varphi(\mathbf{R}) = \mathbf{R}$ et, par exemple, φ est croissante, alors avec $-\infty \leq \alpha \leq \beta \leq +\infty$, en notant $-\infty = \varphi(-\infty)$ et $+\infty = \varphi(+\infty)$,

$$P(\alpha \leq Z_n \leq \beta) = P(\varphi^{-1}(\alpha) \leq Y_n \leq \varphi^{-1}(\beta)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{\varphi^{-1}(\alpha)}^{\varphi^{-1}(\beta)} \Phi(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} \Psi(u) du$$

avec $\Psi = \Phi \circ \varphi^{-1} \times (\varphi^{-1})' = \frac{\Phi \circ \varphi^{-1}}{\varphi' \circ \varphi^{-1}}$ continue sur \mathbf{R} , via le changement de variable (\mathcal{C}^1 , bijectif) $u = \varphi(t)$.

- Le cas où α et β sont finis distincts vient de la question **18**,
- celui où ils sont distincts et éventuellement infinis vient de **20**,
- celui où ils sont égaux finis vient aussi de **20** en remarquant que

$$P(Y_n = a) = P((Y_n \leq a) \cap (Y_n \geq a)) = P(Y_n \leq a) + P(Y_n \geq a) - P(\Omega) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^a \Phi(t) dt + \int_a^{+\infty} \Phi(t) dt - 1 = 0$$

- et dans le dernier cas où α et β sont égaux et infinis, les probabilités et l'intégrale sont nulles donc le résultat reste valable.

Dans le cas où φ est décroissante, on a $P(\alpha \leq Z_n \leq \beta) = P(\varphi^{-1}(\beta) \leq Y_n \leq \varphi^{-1}(\alpha))$, ce qui permet d'aboutir

au résultat avec $\Psi = -\Phi \circ \varphi^{-1} \times (\varphi^{-1})' = \frac{\Phi \circ \varphi^{-1}}{|\varphi' \circ \varphi^{-1}|}$.

Enfin, si $\varphi(\mathbf{R}) \neq \mathbf{R}$, alors le reste reste valable seulement si α, β sont dans l'intervalle $\varphi(\mathbf{R})$ ou une de ses éventuelles bornes éventuellement infinies.

Fin du corrigé