CONCOURS COMMUN SUP 2002

DES ÉCOLES DES MINES D’ALBI, ALÈS, DOUAI, NANTES

Épreuve de Mathématiques
(toutes filières)

Proposition de correction

CORRIGE DU PROBLEME D'ANALYSE

1.1. $\lim_{t\to 0} \frac{Arctant}{t} = 1$, *et* $f(0) = 1$, *donc* f *est continue en 0. Par ailleurs,* f *est continue en tout point de* R^* *comme quotient de fonctions continues. Donc* f *est continue.*

$\forall t \in R^*,\ -t \in R^*$ *et* $f(-t) = f(t)$. f *est donc paire.*

1.2. $\forall t \neq 0,\ f(t) = \frac{1}{t}\left(t + o(t^2)\right) = 1 + o(t)$, *valable même en* 0. f *admet donc un développement limité à l'ordre* 1 *au voisinage de* 0. f *est donc dérivable en 0, et* $f'(0) = 0$.

1.3. f *est dérivable en chaque point de* R^* *comme quotient de fonctions dérivables, et en* 0 *d'après 1.2.*

De plus : $\forall t \in R^*,\ f'(t) = \frac{1}{t}\frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{t^2}$ *Arctant.*

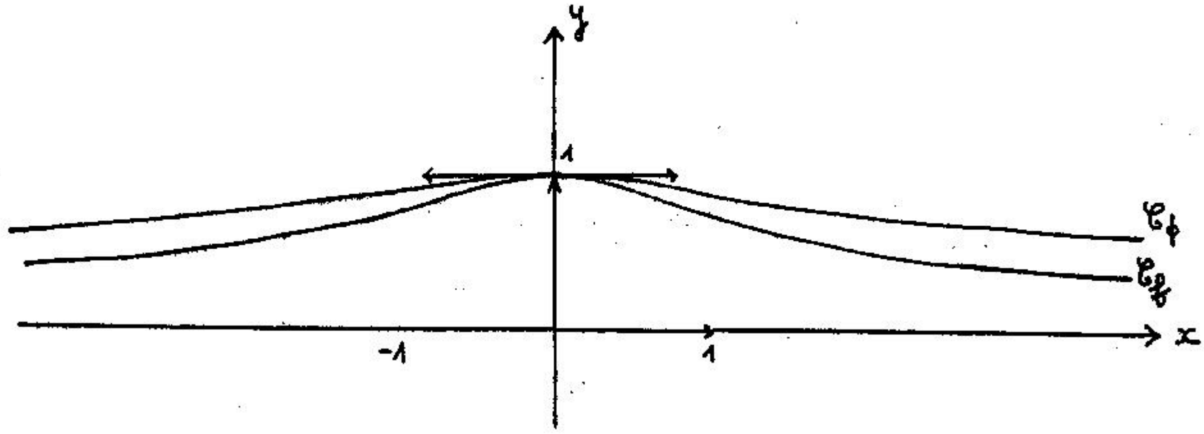
1.4. Soit $t \in R^*$.

$$\begin{aligned}\int_0^t \frac{w^2}{(1+w^2)^2}\,dw &= -\frac{1}{2}\int_0^t w\left(-2w(1+w^2)^{-2}\right)\,dw \\ &= -\frac{1}{2}\left([w(1+w^2)^{-1}]_0^t - \int_0^t (1+w^2)^{-1}\,dw\right) \\ &= -\frac{1}{2}\left(t(1+t^2)^{-1} - Arctant\right). \\ &= -\frac{1}{2}t^2 f'(t).\end{aligned}$$

$f'(t)$ *est donc du signe contraire de* $\int_0^t \frac{w^2}{(1+w^2)^2}\,dw$, *donc* $\forall t < 0,\ f'(t) \geq 0$ *et* $\forall t > 0,\ f'(t) \leq 0$.

f *est donc croissante sur* $]-\infty, 0]$, *et décroissante sur* $[0, +\infty[$.

1.5.



2.1. Soit F la primitive de f qui s'annule en 0 (f est continue).

$\forall x \in R^*,\ \phi(x) = \frac{1}{x}F(x) = \frac{1}{x}\big(F(x) - F(0)\big)$. *Or* $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\big(F(x) - F(0)\big) = F'(0) = f(0) = 1 = \phi(0)$,

donc ϕ est continue en 0. Or ϕ est continue en tout point de R^* comme quotient de fonctions continues (F est C^1). Donc ϕ est continue.

$\forall x \in R,\ -x \in R$ *et* $\phi(-x) = -\frac{1}{x}\int_0^{-x} f(t)dt = \frac{1}{x}\int_0^{x} f(-u)du = \phi(x)$. *$\phi$ est donc paire.*

2.2. Soit $x > 0$. $\forall t \in [0,x],\ f(x) \leq f(t) \leq 1$ car f est décroissante sur $[0,x]$.

Donc : $\int_0^x f(x)\,dt \leq \int_0^x f(t)dt \leq \int_0^x dt$. *Donc* $xf(x) \leq x\phi(x) \leq x$. *Donc* $f(x) \leq \phi(x) \leq 1$.

Soit $x < 0$. $f(-x) \leq \phi(-x) \leq 1$. Or f et ϕ sont paires. Donc $f(x) \leq \phi(x) \leq 1$.

Enfin $f(0) = \phi(0) = 1$.

2.3. ϕ est dérivable en tout point de R^* comme quotient de fonctions dérivables (F est C^1).

$\forall x \in R^*,\ \phi'(x) = \frac{1}{x}f(x) - \frac{1}{x^2}F(x) = \frac{1}{x}f(x) - \frac{1}{x}\phi(x) = \frac{1}{x}\big(f(x) - \phi(x)\big)$.

L'intégration du développement limité de f en 0 donne, au voisinage de 0 : $x\phi(x) = x + o(x^2)$.

Donc : $\forall x \neq 0,\quad \phi(x) = 1 + o(x)$, valable même en 0. ϕ admet donc un développement limité à l'ordre 1 au voisinage de 0. ϕ est donc dérivable en 0, et $\phi'(0) = 0$.

En utilisant la question 2.2, on obtient le signe de $\phi'(x)$. ϕ est croissante sur $]-\infty, 0]$, et décroissante sur $[0, +\infty[$.

2.4. $\forall x \geq 1,\ \int_1^x \frac{Arctant}{t}\,dt \leq \int_1^x \frac{\pi}{2t}\,dt = \frac{\pi}{2}lnx$. *Donc* $\forall x \geq 1,\ 0 \leq \frac{1}{x}\int_1^x f(t)dt \leq \frac{\pi}{2}\frac{lnx}{x}$.

On en déduit : $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_1^x f(t)dt$ *existe et vaut* 0.

Mais : $\forall x \geq 1,\ \phi(x) = \frac{1}{x}\int_0^1 f(t)dt + \frac{1}{x}\int_1^x f(t)dt$. *Donc* $\lim_{x\to+\infty} \phi(x)$ *existe et vaut* 0.

2.5. Cf 1.5.

3.1. Soit $t \geq 0$. $\frac{1}{2} - \frac{t}{1+t^2} = \frac{1 + t^2 - 2t}{2(1+t^2)} = \frac{(1-t)^2}{2(1+t^2)}$. *D'où le résultat demandé.*

3.2. Soit $x \in R_+^*$. $| \phi'(x) | = \frac{1}{x}(\phi(x) - f(x)) \leq \frac{1}{x}(1 - f(x))$ en utilisant 2.2.

Mais : $1 - f(x) = \frac{1}{x}(x - Arctanx) = \frac{1}{x}\int_0^x \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right) dt = \frac{1}{x}\int_0^x \frac{t^2}{1+t^2}\, dt$.

Donc $| \phi'(x) | \leq \frac{1}{x^2}\int_0^x \frac{t^2}{1+t^2}\, dt \leq \frac{1}{2x^2}\int_0^x t\, dt$ d'après 3.1.

Finalement : $\forall x \in R_+^*$, $| \phi'(x) | \leq \frac{1}{4}$. Or ϕ est paire, donc ϕ' est impaire.

Donc : $\forall x \in R$, $| \phi'(x) | \leq \frac{1}{4}$ (même en 0).

3.3. $\forall x < 0, \phi(x) - x > 0$. Sur $[0, +\infty[$, $x \to \phi(x) - x$ est strictement décroissante et continue. $x \to \phi(x) - x$ induit donc une bijection de $[0, +\infty[$ sur $]\lim_{x \to +\infty}(\phi(x) - x), \phi(0)] =]-\infty, 1]$.

L'équation : $x \in R$, $\phi(x) = x$ admet donc une unique solution α dans $]0, +\infty[$.
D'après 2.2, $\phi(1) \leq 1$, donc $\phi(1) - 1 \leq 0$. Donc $\alpha \in]0, 1]$.

3.4. Soit $n \in N$. On applique l'inégalité des accroissements finis à ϕ entre u_n et α (si $u_n \neq \alpha$). En effet, ϕ est continue sur R, dérivable sur R, de dérivée vérifiant : $\forall x \in R$, $| \phi'(x) | \leq \frac{1}{4}$.

Donc $| \phi(u_n) - \phi(\alpha) | \leq \frac{1}{4} | u_n - \alpha |$, i.e. $| u_{n+1} - \alpha | \leq \frac{1}{4} | u_n - \alpha |$.

Par récurrence sur $n \in N$, on montre que : $\forall n \in N$, $| u_n - \alpha | \leq (\frac{1}{4})^n | u_0 - \alpha |$.

(u_n) est donc convergente, de limite α.

4.1. Sur $I =]-\infty, 0[$ ou $I =]0, +\infty[$, l'équation différentielle : $x^2y' + xy = Arctanx$ est équivalente à $xy' + y = \frac{Arctanx}{x}$, i.e. $(xy)' = f(x)$, i.e. $\exists k \in R$, $\forall x \in I$, $xy = F(x) + k$ (F désigne encore la primitive de f qui s'annule en 0), ou encore : $\exists k \in R$, $\forall x \in I$, $y = \phi(x) + \frac{k}{x}$.

4.2. Une solution éventuelle sur R de l'équation différentielle : $x^2y' + xy = Arctanx$ est nécéssairement de la forme : $x \to \phi(x) + \frac{k_1}{x}$ sur $]-\infty, 0[$, et $x \to \phi(x) + \frac{k_2}{x}$ sur $]0, +\infty[$. La continuité d'une telle solution en 0 exige $k_1 = k_2 = 0$. ϕ est donc la seule solution possible sur R.
Or, pour tout x de R, $x^2\phi'(x) + x\phi(x) = Arctanx$ (même en 0). ϕ est donc l'unique solution sur R de l'équation différentielle : $x^2y' + xy = Arctanx$.

CORRIGE DU PROBLEME D'ALGEBRE

1.1. Soit $B = \frac{4}{3}A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. $\varphi = \frac{4}{3}\psi$ *a pour matrice* B *dans la base* $\mathcal{B}$.

$\| \varphi(e_1) \| = \| \varphi(e_2) \| = 1$; $(\varphi(e_1) \mid \varphi(e_2)) = 0$; $\varphi(e_1) \wedge \varphi(e_2) = \varphi(e_3)$ *((. | .)désigne le produit scalaire de* E *et on oriente* E *en convenant que* $\mathcal{B}$ *est directe). Donc* φ *est une rotation distincte de* Id_E.

$Mat(\varphi - Id_E, \mathcal{B}) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$. $\quad (\varphi - Id_E)(e_1 + e_2 + e_3) = o_E$.

φ *est donc une rotation d'axe* $D = R(e_1 + e_2 + e_3)$. *Enfin* $e_1 - e_2$ *est orthogonal à* $e_1 + e_2 + e_3$ *et* $\varphi(e_1 - e_2) = e_2 - e_1$. *Donc* φ *est le demi-tour d'axe* D.

1.2. $\psi = \frac{3}{4}\varphi = \left(\frac{3}{4}Id_E\right) \circ \varphi = \varphi \circ \left(\frac{3}{4}Id_E\right)$. ψ *est donc la composée commutative du demi-tour* φ *et de l'homothétie vectorielle de rapport* $\frac{3}{4}$.

2.1. ψ, *composée de deux bijections, est bijective . De plus :* $\forall x \in E, \| \psi(x) \| = \frac{3}{4} \| \varphi(x) \| = \frac{3}{4} \| x \|$.
Donc $\psi \in \mathcal{S}$ *(*$k = \frac{3}{4}$ *convient). Finalement,* $\psi \in \mathcal{S} \cap GL(E)$.

2.2. Si $Id_E \in \mathcal{S}$: $\exists k \in [0;1[, \ \forall x \in E, \| Id_E(x) \| \leq k \| x \|$. *Pour un tel* k : $\forall x \in E, \| x \| \leq k \| x \|$.
Pour $x \neq o_E$, *on obtient* $k \geq 1$ *: contradiction.*

2.3. Soient φ_1 *et* φ_2 *deux éléments de* $\mathcal{S}$. *Soient* k_1 *et* k_2 *dans* $[0;1[$, *tels que :* $\forall x \in E, \ \| \varphi_1(x) \| \leq k_1 \| x \|$, *et* $\forall x \in E, \ \| \varphi_2(x) \| \leq k_2 \| x \|$.
$\forall x \in E, \ \| \varphi_2 \circ \varphi_1(x) \| = \| \phi_2(\varphi_1(x)) \| \leq k_2 \| \varphi_1(x) \| \leq k_2 k_1 \| x \|$. *Or* $k_1 k_2 \in [0;1[$, *donc* $\varphi_2 \circ \varphi_1 \in \mathcal{S}$.
$\mathcal{S}$ *est donc stable pour* $\circ$.
Cependant, $\mathcal{S} \cap GL(E)$ *n'est pas un sous-groupe de* $(GL(E), \circ)$, *car* $Id_E \notin \mathcal{S}$ *(d'après 2.2).*

2.4. Soient $\varphi \in \mathcal{S}$, *et* $x \in Ker(\varphi - Id_E)$. $\varphi(x) = x$ *donc* $\| \varphi(x) \| = \| x \|$, *donc* $\| x \| \leq k \| x \|$ *(où* $k \in [0;1[$ *est tel que* $\forall x \in E, \ \| \varphi(x) \| \leq k \| x \|$*). Donc* $(1-k) \| x \| \leq 0$, *puis* $\| x \| = 0$ *et enfin* $x = o_E$. *Donc* $Ker(\varphi - Id_E)$ *est réduit au seul* o_E. $(\varphi - Id_E)$ *est un endomorphisme injectif en dimension finie, donc un automorphisme de* E.

2.5. Soit $\varphi \in \mathcal{S}$. $\exists k \in [0;1[, \ \forall x \in E, \ \| \varphi(x) \| \leq k \| x \|$. *Pour un tel* k *et* $x \in E$ *de norme 1,* $\| \varphi(x) \| \leq k$.
Inversement, soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ *tel que :* $\exists k \in [0;1[, \ \forall x \in E, \ \left(\| x \| = 1 \Longrightarrow \| \varphi(x) \| \leq k\right)$. *pour un tel* k *: soit* $x \in E - \{o_E\}$. $\left\| \varphi\left(\frac{x}{\| x \|}\right) \right\| \leq k$, *donc* $\| \varphi(x) \| \leq k \| x \|$. *Cette inégalité restant vérifiée pour* $x = o_E$, *on peut conclure que* $\varphi \in \mathcal{S}$.

2.6. Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$. Soit (a_1, a_2, a_3) une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de φ est diagonale, à éléments diagonaux λ_1, λ_2, λ_3 strictement inférieurs à 1 en valeur absolue.

Soit $x = x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3$ un vecteur de E de norme 1 : $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$.

$\varphi(x) = x_1\lambda_1a_1 + x_2\lambda_2a_2 + x_3\lambda_3a_3$, donc $\| \varphi(x) \|^2 = x_1^2\lambda_1^2 + x_2^2\lambda_2^2 + x_3^2\lambda_3^2 \leq Max(\lambda_1^2, \lambda_2^2, \lambda_3^2)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$.

Donc $\| \varphi(x) \|^2 \leq Max(\lambda_1^2, \lambda_2^2, \lambda_3^2)$, et $\| \varphi(x) \| \leq \sqrt{Max(\lambda_1^2, \lambda_2^2, \lambda_3^2)} \in [0; 1[$. Le 2.5. permet de conclure.

3.1. $(e_1' \mid e_2') = (e_1' \mid e_3') = (e_2' \mid e_3') = 0$. De plus, $\| e_1' \|^2 = \| e_2' \|^2 = \| e_3' \|^2 = 1$. Donc (e_1', e_2', e_3') est une base orthonormée $\mathcal{B}'$ de E.

3.2. La matrice de μ dans la base $\mathcal{B}'$ est $M' = P^{-1}MP$, où P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

On a $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = {}^tP$, car P est une matrice orthogonale. Le produit matriciel $P^{-1}MP$ donne $M' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. (On peut aussi obtenir ce résultat en faisant un calcul direct des images par μ des vecteurs de $\mathcal{B}'$). D'après 2.6., $\mu \in \mathcal{S}$.

4.1. $\varphi_\alpha(x) = \alpha\big((x_1 - x_2)e_1 + (x_2 + x_3)e_2 + (x_1 - x_3)e_3\big)$. Donc :

$$\| \varphi_\alpha(x) \|^2 = \alpha^2 \left((x_1 - x_2)^2 + (x_2 + x_3)^2 + (x_1 - x_3)^2\right) = \alpha^2 \left(2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_2x_3 - 2x_1x_3\right)$$
$$= \alpha^2 \left(1 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_2x_3 - 2x_1x_3\right) = \alpha^2\big(1 + (x_1 - x_2 - x_3)^2\big).$$

4.2. On a : $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}$, où P est la matrice du 3.2. On en déduit la relation : $x_1 - x_2 - x_3 = \sqrt{3}x_1'$.

Donc $\| \varphi_\alpha(x) \|^2 = \alpha^2\big(1 + 3{x_1'}^2\big)$. Or : ${x_1'}^2 \leq {x_1'}^2 + {x_3'}^2 + {x_3'}^2 = 1$. Donc $\| \varphi_\alpha(x) \|^2 \leq 4\alpha^2$, puis $\| \varphi_\alpha(x) \| \leq 2\,|\alpha|$. Enfin, les x de E de norme 1 pour lesquels on a égalité dans cette inégalité sont ceux pour lesquels ${x_1'}^2 = 1$ donc $x_2' = x_3' = 0$, puisque ${x_1'}^2 + {x_2'}^2 + {x_3'}^2 = 1$. Ce sont donc les deux vecteurs : e_1' et $-e_1'$.

4.3. Si $\varphi_\alpha \in \mathcal{S}$, alors $\| \varphi_\alpha(e_1') \| = 2\,|\alpha| < 1$, d'après 2.5. Donc $|\alpha| < \dfrac{1}{2}$.

Inversement, si $|\alpha| < \dfrac{1}{2}$, l'inégalité $\| \varphi_\alpha(x) \| \leq 2\,|\alpha|$. est vérifiée pour tout x de E de norme 1. Or $2\,|\alpha| < 1$, et le 2.5. permet de conclure : $\varphi_\alpha \in \mathcal{S}$.

5.1. Soit M un point de $\mathcal{E}$. On a : $\varphi(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{f(O)f(M)}$, puisque f est supposée affine.

Or M est invariant par f ssi $f(M) = M$ donc ssi $\varphi(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{f(O)M}$. Or $\overrightarrow{f(O)M} = \overrightarrow{f(O)O} + \overrightarrow{OM}$.

Donc M est invariant par f ssi $(\varphi - Id_E)(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{f(O)O}$.

5.2. Or $\varphi \in S$ donc, d'après 2.4, $(\varphi - Id_E)$ est bijective. Il existe donc un seul vecteur $\overrightarrow{OM}$ tel que :

$(\varphi - Id_E)(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{f(O)O}$, donc un seul point M invariant par f.

5.3. $\forall M \in \mathcal{E}$, $\overrightarrow{f(\Omega)f(M)} = \varphi(\overrightarrow{\Omega M})$, et $f(\Omega) = \Omega$. D'où le résultat demandé.

5.4.1. Soit $n \in N$. D'après 5.3. : $\overrightarrow{\Omega f(M_n)} = \varphi(\overrightarrow{\Omega M_n})$, i.e. $\overrightarrow{\Omega M_{n+1}} = \varphi(\overrightarrow{\Omega M_n})$, donc :

$\| \overrightarrow{\Omega M_{n+1}} \| = \| \varphi(\overrightarrow{\Omega M_n}) \|$, donc $\| \overrightarrow{\Omega M_{n+1}} \| \leq k \| \overrightarrow{\Omega M_n} \|$, où $k \in [0;1[$ est tel que :

$\forall x \in E, \| \varphi(x) \| \leq k \| x \|$. Par récurrence sur $n \in N$, on déduit de cette dernière inégalité que :

$\forall n \in N$, $\| \overrightarrow{\Omega M_n} \| \leq k^n \| \overrightarrow{\Omega M_0} \|$. Donc $\lim_{n \to +\infty} \| \overrightarrow{\Omega M_n} \|$ existe et vaut 0.

5.4.2. Soit f l'application de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ qui, au point de coordonnées (x, y, z) dans le repère $\mathcal{R}$ associe le point M' de coordonnées $(\frac{1}{4}x - \frac{1}{4}y + 1, \frac{1}{4}y + \frac{1}{4}z + \frac{1}{2}, \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}z + 1)$ dans ce même repère. f est affine, d'endomorphisme associé $\varphi_{\frac{1}{4}}$. Or $\varphi_{\frac{1}{4}} \in S$, d'après 4.3.. On peut donc appliquer le résultat du 5.4.1. à la suite $(M_n)_{n \in N}$ de points de $\mathcal{E}$ définie par M_0, de coordonnées (x_0, y_0, z_0) dans le repère $\mathcal{R}$ et $\forall n \in N$, $M_{n+1} = f(M_n)$: f admet un point invariant et un seul Ω, et $\lim_{n \to +\infty} \| \overrightarrow{\Omega M_n} \|$ existe et vaut 0. En remarquant que le point de coordonnées $(1, 1, 1)$ dans le repère $\mathcal{R}$ est invariant par f, (ou en le déterminant par le calcul), on en déduit que $\lim_{n \to +\infty} \left(\sqrt{(x_n - 1)^2 + (y_n - 1)^2 + (z_n - 1)^2} \right) = 0$.

Or : $\forall n \in N$, $| x_n - 1 | \leq \sqrt{(x_n - 1)^2 + (y_n - 1)^2 + (z_n - 1)^2}$. Donc $(x_n)_n$ est convergente, de limite 1. De même, les suites $(y_n)_n$ et $(z_n)_n$ sont convergentes, de limite 1.