Concours commun des écoles des mines d'Albi, Alès, Douai, Nantes

Correction de l'épreuve spécifique ; Filière MPSI 1999

Olivier HALGAND

PREMIER PROBLEME

I. Etudes d'endomorphismes donnés par leur matrice

1a. Le déterminant est indépendant de la base choisie, donc :

$$\det(f) = \det(A) = \begin{vmatrix} -u & v & 0 \\ -2 & 0 & 2v \\ 0 & -1 & u \end{vmatrix} = -u \begin{vmatrix} 0 & 2v \\ -1 & u \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} v & 0 \\ -1 & u \end{vmatrix} = -u \times 2v + 2 \times uv,$$

donc :

$$\boxed{\det(f) = 0.}$$

1b. Méthode 1 : D'après **1a.**, on sait que $rg(f) \leqslant 2$. De plus, on observe que les deux premières colonnes $\begin{pmatrix} -u \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} v \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ ne sont pas proportionnelles, et donc : $rg(f) \geqslant 2$. Finalement, on obtient $rg(f) = 2$ et donc, d'après le théorème du rang : $\dim Ker f = 1$.

Il suffit donc de déterminer un vecteur non nul de $Kerf$ pour obtenir une base de $Kerf$. Or, on voit facilement que :

$$v \begin{pmatrix} -u \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 2v \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

et donc : $v + uX + X^2 \in Kerf$.

Méthode 2 : On détermine $Kerf$:

$$x + yX + zX^2 \in Kerf \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -u & v & 0 \\ -2 & 0 & 2v \\ 0 & -1 & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -ux + vy = 0 \\ -2x + 2vz = 0 \\ -y + uz = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} -2x + 2vz = 0 \\ vy - uvz = 0 \\ -y + uz = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x - vz = 0 \\ y - uz = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = vz \\ y = uz \end{cases}$$

Donc, $Kerf = Vect\big(v + uX + X^2\big)$.

On obtient donc :

$$\boxed{\text{Une base de } Kerf \text{ est } \big(X^2 + uX + v\big).}$$

1c. D'après **1b.**, on sait que Imf est de dimension 2 et que les deux premières colonnes de A ne sont pas proportionnelles, donc :

$$\boxed{\text{Une base de } Imf \text{ est } \big(-2X - u, -X^2 + v\big).}$$

2a. Le déterminant étant indépendant de la base choisie, donc :

$$\begin{aligned}\det(g) &= \det(B) = \begin{vmatrix} -3 & w & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 2w & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 3w \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & w & 0 & 0 \\ 0 & -1-w & 2w & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 3w+3 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} \\ &= -3\left(-1-w)\begin{vmatrix} 0 & 3w+3 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2w & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}\right) \\ &= -3\Big((-1-w)(3w+3) + 2(6w)\Big) = -3\big(-3w^2+6w-3\big) = 9(w^2-2w+1),\end{aligned}$$

donc :

$$\boxed{\det(g) = 9(w-1)^2.}$$

2b. Pour $w = w_0 = 1$, on a :

$$(x,y,z,t) \in Kerg \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rl} -3x + y & = 0 \\ -3x - y + 2z & = 0 \\ -2y + z + 3t & = 0 \\ -z + 3t & = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rl} -3x + y & = 0 \\ -2y + 2z & = 0 \\ -z + 3t & = 0 \\ 0 & = 0 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} x = t \\ y = 3t \\ z = 3t \end{array}\right.$$

Ainsi, $Kerg = Vect\big(1 + 3X + 3X^+X^3\big) = Vect\big((X+1)^3\big)$, et donc :

$$\boxed{\text{Une base de } Kerg \text{ est } \big((X+1)^3\big).}$$

II. Définition d'une application linéaire, exemples et propriétés

A Etude de cas particuliers

1. • Montrons que φ est linéaire : $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall P_1, P_2 \in \mathbb{R}_n[X]$,

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda P_1 + \mu P_2) &= 2(\lambda P_1 + \mu P_2)' - n(\lambda P_1 + \mu P_2)Q' \\ &= 2(\lambda P_1' + \mu P_2')Q - n(\lambda P_1 + \mu P_2)Q' \\ &= \lambda(2P_1'Q - nP_1Q' + \mu(2P_2'Q - nP_2Q') \\ &= \lambda\varphi(P_1) + \mu\varphi(P_2).\end{aligned}$$

Donc, φ est bien linéaire.

• Montrons maintenant que $Im(\varphi) \subset \mathbb{R}_n[X]$: posons pour cela $Q = aX^2 + bX + c$, donc $Q' = 2aX + b$.

On a : $\varphi(1) = -nQ' = (-2an)X + (-bn)$, et : $\forall k \in [\![1, n]\!]$,

$$\varphi(X^k) = 2(X^{k-1})(aX^2 + bX + c) - n(X^k)(2aX + b) = 2a(k-n)X^{k+1} + b(2k-n)X^k + 2ckX^{k-1}.$$

On en déduit donc que : $\forall k \in [\![0, n-1]\!], \deg \varphi(X^k) = k+1$ et $\deg \varphi(X^n) = n$. Donc, dans tous les cas, $\deg \varphi(X^k) \leqslant n$.

Par linéarité, on en déduit que : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \deg P \leqslant n$.

• Finalement,

$$\boxed{\varphi \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_n[X].}$$

2a. D'après **II.1.** appliqué avec $a = 1$, $b = u$ et $c = v$, on a :

$$\varphi(1) = -2u - 4X, \quad \varphi(X) = 2v - 2X^2, \quad \varphi(X^2) = 4vX + 2uX^2.$$

Donc,

$$\boxed{\text{la matrice de } \varphi \text{ dans la base canonique de } \mathbb{R}_2[X] \text{ est : } \begin{pmatrix} -2u & 2v & 0 \\ -4 & 0 & 4v \\ 0 & -2 & 2v \end{pmatrix} = 2A.}$$

2b. D'après **II.A2a.**, on a $\varphi = 2f$, donc : $Ker\varphi = Kerf$, c'est-à-dire :

$$\boxed{Ker\varphi = Vect\big(X^2 + uX + v\big) = Vect(Q).}$$

3a. D'après **II.1.** appliqué avec $a = 1$, $b = 2$ et $c = w$, on a :

$$\varphi(1) = -6 - 6X, \quad \varphi(X) = 2w - 2X - 4X^2, \quad \varphi(X^2) = 4wX + 2X^2 - 2X^3, \quad \varphi(X^3) = 6wX^2 + 6X^3.$$

Donc,

$$\boxed{\text{la matrice de } \varphi \text{ dans la base canonique de } \mathbb{R}_3[X] \text{ est : } \begin{pmatrix} -6 & 2w & 0 & 0 \\ -6 & -2 & 4w & 0 \\ 0 & -4 & 2 & 6w \\ 0 & 0 & -2 & 6 \end{pmatrix} = 2B.}$$

3b. D'après **II.A3a.**, on a $\varphi = 2g$, donc : $Ker\varphi = Kerg$. Nous avons déterminé le noyau de g pour $w = 1$, et si $w \neq 1$, alors $\det g \neq 0$ et on en déduit que g est inversible. Donc :

$$\boxed{\text{Si } w = 1, \text{ alors : } Ker\varphi = Vect\big((X+1)^3\big)\,; \text{ si } w \neq 1, \text{ alors } Ker\varphi = \{0\}.}$$

B Etude du cas général

1a. Puisque Q n'admet pas de racine double :

• soit il admet deux racines réelles distinctes x_1 et x_2 : les diviseurs de Q sont alors les polynômes de l'une des formes suivantes : λ, $\lambda(X - x_1)$, $\lambda(X - x_2)$, $\lambda(X - x_1)(X - x_2)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Or, Q' est de degré 1 et s'annule en $x_0 = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$, donc les diviseurs de Q' sont de l'une des formes suivantes : λ, $\lambda(X - x_0)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

Les diviseurs communs à Q et Q' sont donc les polynômes constants : $PGCD(Q, Q') = 1$.

• soit il n'admet pas de racine réelle : Q est alors irréductible (sur $\mathbb{R}[X]$) et ses diviseurs sont donc de l'une des formes suivantes : λ, λQ avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Or, Q' est de degré 1, il est donc aussi irréductible, et ses diviseurs sont donc de l'une des formes : λ, $\lambda Q'$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

Là aussi, les diviseurs communs à Q et Q' sont les polynômes constants : $PGCD(Q, Q') = 1$.

Dans tous les cas, on a donc :

$$\boxed{PGCD(Q, Q') = 1.}$$

1b. Soit $P \neq 0$ un polynôme de $Ker\varphi$. On a donc : $\varphi(P) = 2P'Q - nPQ' = 0$. Or, Q divise $2P'Q$, donc Q divise aussi nPQ'. Comme Q et Q' sont premiers entre eux d'après **II.B1a**, on en déuit que :

$$\boxed{P \text{ divise } Q.}$$

1c. D'après **II.B1b**, Q divise P. Notons $D = \{d \in \mathbb{N}, Q^d | P\}$, de sorte que $1 \in D$ qui n'est donc pas vide. De plus, $\deg Q = 2$ donc $\deg Q^d = 2d$. Or $\deg P = n$, donc, si $d \in D$ alors on a nécessairement $2d \leqslant n$. Ainsi, D est non vide et majoré : il possède donc un plus grand élément k. On a alors : Q^k divise P, c'est-à-dire qu'il existe un polynôme (non nul) R tel que : $P = Q^k R$. De plus, si Q divise R, alors il existe un polynôme R_1 tel que $R = QR_1$ et alors $P = Q^{k+1}R_1$ de sorte que P est divisible par Q^{k+1}, ce qui contredit la maximalité de k. Ainsi :

$$\boxed{\text{il existe un polynôme } R \text{ non nul et } k \in \mathbb{N}^* \text{ tels que : } P = RQ^k, \text{ où } Q \text{ ne divise par } R.}$$

1d. Supposons donc que $Ker\varphi \neq \{0\}$. Soit alors $P \neq 0$ tel que $\varphi(P) = 0$. D'après **II.B1c.**, il existe un polynôme non nul R et $k \in \mathbb{N}^*$ tels que : $P = RQ^k$, où Q ne divise pas R. On a donc : $P' = R'Q^k + kRQ^{k-1} = Q^{k-1}\big(R'Q + kR\big)$. On obtient donc :

$$0 = \varphi(P) = 2P'Q - nPQ' = 2Q^{k-1}\big(R'Q + kR\big)Q - nRQ^kQ' = Q^k\Big[2R'Q + (2k-n)RQ'\Big].$$

Comme $Q \neq 0$, on a donc : $2R'Q + (2k-n)RQ' = 0$. Or, Q divise 2R'Q, donc Q divise $(2k-n)RQ'$. Mais, d'après **II.B1a.**, Q et Q' sont premiers entre eux et, par hypothèse, Q ne divise par R. On en déduit donc que $n - 2k = 0$, autrement dit :

$$\boxed{\text{si } Ker\varphi \neq \{0\}, \text{ alors } n \text{ est pair.}}$$

1e. Si n est pair, d'après **I.B1d.**, $n = 2k$ où k est la plus grande puissance de Q divisant $P \in Ker\varphi$, $P \neq 0$. Mais on a : $P = RQ^k$, donc : $\deg P = \deg R + \deg Q^k = \deg R + 2k$. Or, on a vu en **II.A1.** que pour tout $j \in [\![0, n-1]\!]$, $\deg \varphi(X^j) = j+1$ et $\deg \varphi(X^n) = n$. Donc, si $P \neq 0$ appartient au noyau de φ, P est nécessairement de degré n et donc : $\deg R = n - 2k = 0$, c'est-à-dire que R est constant et donc que P est de la forme λQ^k, avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Donc :

$$\boxed{Ker\varphi = Vect(Q^k) \text{ si } n \text{ est pair} \quad ; \quad Ker\varphi = \{0\} \text{ si } n \text{ est impair.}}$$

2a. On suppose maintenant que Q possède une racine double α. Or, Q est de degré 2 donc Q est de la forme : $Q = a(X-\alpha)^2$, $a \in \mathbb{R}^*$. Alors, $Q' = 2a(X-\alpha)$ et donc :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \varphi(P) = 2P'.a(X-\alpha)^2 - nP.2a(X-\alpha) = 2a(X-\alpha)\Big[(X-\alpha)P' - nP\Big].$$

Donc : $\varphi(P) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (X-\alpha)P' - nP = 0$. Donc, si $P \neq 0$ appartient au noyau de φ, alors $X - \alpha$ divisant $(X-\alpha)P'$, il divise aussi nP et donc P. On en déduit donc que :

$$\boxed{\alpha \text{ est racine de } P.}$$

2b. D'après **II.B.2a.**, on a : $\varphi(P) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (X-\alpha)P' = nP$. Donc P' divise P.

- **Analyse** : Déterminons les polynômes P tels que P' divise P.
  Soit m la multiplicité de α pour P (donc $m \geqslant 1$). Alors, il existe un polynôme non nul P_1 tel que : $P = (X-\alpha)^m P_1$ avec $P_1(\alpha) \neq 0$. Alors :

$$P' = m(X-\alpha)^{m-1}P_1 + (X-\alpha)^m P_1' = (X-\alpha)^{m-1}\Big[mP_1 + (X-\alpha)P_1'\Big].$$

Donc, si P' divise P, alors il existe un polynôme non nul R tel que : $P'R = P$, c'est-à-dire tel que :

$$(X-\alpha)^{m-1}\Big[mP_1 + (X-\alpha)P_1'\Big]R = (X-\alpha)^m P_1, \quad \text{d'où :} \quad \Big[mP_1 + (X-\alpha)P_1'\Big]R = (X-\alpha)P_1.$$

Si on évalue cette dernière égalité en α, on obtient : $mP_1(\alpha)R(\alpha) = 0$. Comme $m \geqslant 1$ et que $P_1(\alpha) \neq 0$, on en déduit que $R(\alpha) = 0$, et donc que R est divisible par $X - \alpha$. De plus, puisque $\deg P' = \deg P - 1$ on en déduit que $\deg R = 1$, et donc que : $R = \lambda(X-\alpha)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$. On obtient donc :

$$\Big[mP_1 + (X-\alpha)P_1'\Big]\lambda(X-\alpha) = (X-\alpha)P_1, \quad \text{d'où :} \quad \lambda\Big[mP_1 + (X-\alpha)P_1'\Big] = P_1,$$

et ainsi :

$$(X-\alpha)P_1' = (1-\lambda m)P_1.$$

En évaluant en α, on obtient donc : $0 = (1-\lambda m)P_1(\alpha)$ avec $P_1(\alpha) \neq 0$. On a donc : $\lambda = \dfrac{1}{m}$ et donc $P_1' = 0$, donc P_1 est constant. Finalement, on doit avoir $P = a(X-\alpha)^m$.

Réciproquement, il est clair que si $P = a(X-\alpha)^m$, alors $P' = am(X-\alpha)^{m-1}$ divise P. Donc :

$$P' \text{ divise } P \quad \Leftrightarrow \quad P \text{ est de la forme } P = a(X-\alpha)^m.$$

- **Synthèse** : Vérifions si les polynômes de cette forme appartiennent bien au noyau de φ. On doit avoir :

$$(X-\alpha)P' = nP \quad \text{soit :} \quad am(X-\alpha)^m = na(X-\alpha)^m, \quad \text{donc :} \quad m = n.$$

Finalement :

$$\boxed{Ker\varphi = Vect\Big((X-\alpha)^n\Big).}$$

3. Dans cette question n est impair et $Q = \dfrac{1}{2}(X^2+1)$, donc Q n'admet pas de racine double. D'après **II.B1e.**, on en déduit que $Ker\varphi = \{0\}$ et donc que φ est injective. Ainsi, φ est un endomorphisme injectif de l'espace vectoriel de dimension finie $\mathbb{R}_n[X]$: donc, φ est aussi bijectif. On en déduit donc que :

$$\boxed{\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \exists ! R \in \mathbb{R}_n[X], \quad P = (X^2+1)R' - nXR.}$$

Ainsi, on peut définir l'application $\psi : P \mapsto R$, qui est la bijection réciproque de φ et est donc linéaire :

$$\boxed{\psi = \varphi^{-1} \in \mathcal{GL}(R_n[X]).}$$

DEUXIEME PROBLEME

I. 1. La fonction ln est définie sur $]0,+\infty[$, donc $x \mapsto \ln(1+x)$ est définie sur $]-1,+\infty[$. De plus, la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est définie sur $\mathbb{R}^*$. On en déduit que :

$$\boxed{f \text{ est définie sur } \mathfrak{D}_f =]-1,0[\cup]0,+\infty[.}$$

2. Les fonctions ln et inverse sont dérivables sur leur domaine de définition, donc, par produit, il en est de même de φ, et :

$$\forall x \in \mathfrak{D}_f, \quad \varphi'(x) = \frac{\frac{1}{1+x} \times x + 1 \times \ln(1+x)}{x^2} = \frac{\frac{x}{1+x} - \ln(1+x)}{x^2}.$$

3. Le dénominateur étant strictement positif sur $\mathfrak{D}_f$, on étudie le signe du numérateur. On pose $u : x \mapsto \dfrac{x}{1+x} - \ln(1+x)$; u est définie et dérivable sur $]-1,+\infty[$ et :

$$\forall x \in]-1,+\infty[, \quad u'(x) = \frac{1 \times (1+x) - 1 \times x}{(1+x)^2} - \frac{1}{1+x} = \frac{1}{(1+x)^2} - \frac{1}{1+x} = \frac{-x}{(1+x)^2}.$$

On en déduit le tableau suivant, sachant que $u(0) = 0$:

x	-1		0		$+\infty$
$u'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
u	‖	$\nearrow$	0	$\searrow$	
φ'	‖	$-$	‖	$-$	

4. On sait que $\lim\limits_{x\to -1} \ln(1+x) = -\infty$, donc : $\boxed{\lim\limits_{x\to -1} \varphi(x) = +\infty.}$

De plus, $\dfrac{\ln(1+x)}{x} = \dfrac{\ln(1+x)}{1+x} \times \dfrac{1+x}{x}$ avec : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(1+x)}{1+x} = 0$ par croissances comparées et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1+x}{x} = 1$. Donc, par produit : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = 0.}$

Enfin, on sait que $\ln(1+x) \underset{0}{=} x$, donc : $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} \varphi(x) = 1.}$

5. Puisque φ admet une limite finie en 0, on peut prolonger φ par continuité en 0 en posant : $\varphi(0) = \lim\limits_{x \to 0} \varphi(x) = 1$.

En utilisant les développements limités , on peut écrire, au voisinage de 0 :

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{1}{x}\Big(x - \frac{x^2}{2} + \mathrm{o}(x^2)\Big) = 1 - \frac{x}{2} + \mathrm{o}(x).$$

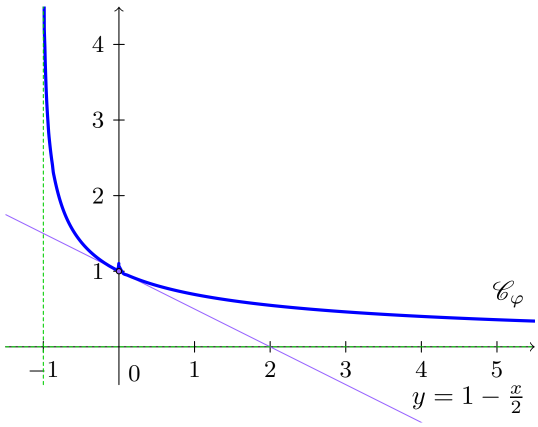
Ainsi, en identifiant les coefficients avec la formule de Taylor-Young, on en déduit que

$$\boxed{\varphi \text{ ("version prolongée") est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur }]-1,+\infty[\text{ avec } \varphi'(0) = -\frac{1}{2}.}$$

6. Le tableau de variations de φ est donc :

x	-1		0		$+\infty$
φ	$\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	1	$\searrow$	0

et sa courbe représentative est :



II. 1. Soit $x \in]-1,+\infty[$. Alors : $\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\quad 1 + x\sin t = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \sin t = -1$.

Or,

- si $x = 0$, alors $x \sin t = 0 \neq -1$;
- si $x \in]-1,0[$, alors $-\frac{1}{x} \in]1,+\infty[$ et donc on ne peut avoir $\sin t = -\frac{1}{x}$;
- si $x > 0$, alors $x \sin t \geqslant 0$ et on ne peut avoir $x \sin t = -1$.

On en déduit que, pour tout $x \in]-1,+\infty[$, la fonction : $t \mapsto \dfrac{f(t)}{1 + x\sin t}$ est bien définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, et est continue comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas. Cette fonction est donc intégrable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, et donc :

$$\boxed{g \text{ est définie sur }]-1,+\infty[.}$$

2. Pour $f = \cos$, on obtient :

- Pour $x = 0$:

$$g(0) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \,\mathrm{d}t = \Big[\sin t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

- Pour $x \neq 0$:

$$g(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{1 + x\sin t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\cos t}{1 + x \sin t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\Big[\ln|1 + x\sin t|\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\ln(1+x)}{x}.$$

Donc :

$$\boxed{\text{Pour } f = \cos, \text{ on obtient : } g = \varphi.}$$

3. Pour $f : t \mapsto \sin(2t)$, on obtient : $g(x) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2t)}{1+x\sin t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin t\cos t}{1+x\sin t}\,\mathrm{d}t$. On effectue le changement da variable : $u = \sin t$, et donc : $\mathrm{d}u = \cos t\,\mathrm{d}t$, et alors : $g(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{2u\,\mathrm{d}u}{1+xu}$.

- Pour $x = 0$, on obtient donc : $g(0) = \displaystyle\int_0^1 2u\,\mathrm{d}u = \Big[u^2\Big]_0^1 = 1$.
- Pour $x \neq 0$, on a :

$$g(x) = \frac{2}{x}\int_0^1 \frac{xu}{1+xu}\,\mathrm{d}u = \frac{2}{x}\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+xu}\right)\mathrm{d}u = \frac{2}{x}\Big[u - \frac{1}{x}\ln|1+xu|\Big]_0^1 = \frac{2}{x} - \frac{2\ln(1+x)}{x^2}.$$

Remarque : en tant qu'intégrale d'une fonction continue, g est continue sur $]-1,+\infty[$.
Finalement,

$$\boxed{\text{Pour } f : t \mapsto \sin(2t), \text{ on obtient : } g : x \mapsto \begin{cases} \frac{2}{x} - \frac{2\ln(1+x)}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}.}$$

4. Soient $a > -1$ et $x, y \in \,]a,+\infty[$. Alors :

$$\begin{aligned}
\big|g(x) - g(y)\big| &= \left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{f(t)}{1+x\sin t} - \frac{f(t)}{1+y\sin t}\right)\mathrm{d}t\right| \\
&= \left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(t)}{(1+x\sin t)(1+y\sin t)}\Big((1+y\sin t) - (1+x\sin t)\Big)\,\mathrm{d}t\right| \\
&= \left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(t)}{(1+x\sin t)(1+y\sin t)}\Big(y\sin t - x\sin t\Big)\,\mathrm{d}t\right| \\
&= \left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(t)\,\sin t}{(1+x\sin t)(1+y\sin t)}\,\mathrm{d}t\right| |y-x|
\end{aligned}$$

Or, d'après l'inégalité triangulaire :

$$\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(t)\,\sin t}{(1+x\sin t)(1+y\sin t)}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(t)\,|\sin t|}{|1+x\sin t|\,|1+y\sin t|}\,\mathrm{d}t,$$

avec, la fonction sin étant strictement positive sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$:

$$-1 < a < x \quad \text{donc :} \quad -\sin t < a\sin t < x\sin t \quad \text{et donc :} \quad 0 \leqslant 1 - \sin t < 1 + a\sin t < 1 + x\sin t,$$

d'où :

$$\frac{1}{|1+x\sin t|} \leqslant \frac{1}{1+a\sin t}.$$

Il en est bien sûr de même avec y, et on obtient donc :

$$\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(t)\,\sin t}{(1+x\sin t)(1+y\sin t)}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(t)\,|\sin t|}{(1+a\sin t)^2}\,\mathrm{d}t = K,$$

où K est une constante (positive) indépendante de x et y. On obtient donc :

$$\boxed{\exists K \in \mathbb{R}_+, \forall (x,y) \in \big(]-1,+\infty[\big)^2, \quad \big|g(x) - g(y)\big| \leqslant K|x-y|.}$$

On en déduit donc que :

$$\forall x \in \,]-1,+\infty[, \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha = \frac{\varepsilon}{K} > 0, \forall y \in \,]-1,+\infty[, |x-y| < \alpha \Rightarrow \big|f(x) - f(y)\big| < K\alpha = \varepsilon,$$

ce qui signifie que f est continue en x. Donc :

$$\boxed{f \text{ est continue sur }]-1,+\infty[.}$$

5. Soient $x, y \in]1, +\infty[$ tels que $x < y$. Alors, puisque sin et f sont positives sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, on peut écrire :

$$0 < 1 + x\sin t \leqslant 1 + y\sin t \quad \text{donc :} \quad \frac{1}{1+x\sin t} \geqslant \frac{1}{1+y\sin t} \quad \text{et donc :} \quad \frac{f(t)}{1+x\sin t} \geqslant \frac{f(t)}{1+y\sin t}.$$

Par croissance de l'intégrale, on en déduit donc que :

$$g(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(t)}{1+x\sin t}\,\mathrm{d}t \geqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(t)}{1+y\sin t}\,\mathrm{d}t = g(y).$$

On a donc démontré que :

$$\forall (x,y) \in \big(]-1, +\infty[\big)^2, \quad x < y \Rightarrow g(x) \geqslant g(y),$$

ce qui signifie que

$$\boxed{g \text{ est décroissante sur }]-1, +\infty[.}$$

6a. La fonction f étant continue sur le segment $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, f est bornée (et atteint ses bornes). En particulier ;

$$\boxed{f \text{ est majorée sur } \left[0, \frac{\pi}{2}\right].}$$

6b. Soient $x > 0$, $b \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ et M un majorant de f sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Alors : $\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,

$$1 + x\sin t > 0 \quad \text{donc :} \quad \frac{f(t)}{1+x\sin t} \leqslant \frac{M}{1+x\sin t},$$

et par croissance de l'intégrale, on en déduit que :

$$g(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(t)}{1+x\sin t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M}{1+x\sin t}\,\mathrm{d}t = M\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{1+x\sin t}.$$

Or, d'après la relation de Chasles, on peut écrire :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{1+x\sin t} = \int_0^{b} \frac{\mathrm{d}t}{1+x\sin t} + \int_b^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{1+x\sin t}.$$

Majorons la première intégrale : $1 + x\sin t \geqslant 1$ donc : $\dfrac{1}{1+x\sin t} \leqslant 1$ et on en déduit :

$$\int_0^{b} \frac{\mathrm{d}t}{1+x\sin t} \leqslant \int_0^{b} 1\,\mathrm{d}t = b.$$

Majorons la seconde intégrale : pour $t \in \left[b, \frac{\pi}{2}\right]$ on a : $\sin t \geqslant \sin b$ et donc : $\dfrac{1}{1+x\sin t} \leqslant \dfrac{1}{1+x\sin b}$, ce qui nous donne la majoration :

$$\int_b^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{1+x\sin t} \leqslant \int_b^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{1+x\sin b} = \frac{\frac{\pi}{2} - b}{1+x\sin b} < \frac{\pi}{2(1+x\sin b)}.$$

Finalement, on obtient bien l'inégalité :

$$\boxed{g(x) \leqslant Mb + \frac{M\pi}{2(1+x\sin b)}.}$$

6c. On sait que g est décroissante et positive sur $]-1, +\infty[$ (puisqu'on intègre une fonction positive). Donc, d'après le théorème de minoration, g admet une limite finie ℓ en $+\infty$.

De plus : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{M\pi}{2(1+x\sin b)} = 0$ car $b \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$. Ainsi : $0 \leqslant \ell \leqslant Mb$. Ceci étant vrai pour tout $b \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, on en déduit que :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0.}$$

7. La fonction : $t \mapsto \dfrac{\cos t}{1-\sin t}$ est continue sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$: elle est donc intégrable sur tout segment inclus dans $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$. De plus :

$$\cos t = \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) \underset{x\to\frac{\pi}{2}}{\sim} \frac{\pi}{2} - t \qquad \text{et :} \qquad 1 - \sin t = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) \underset{x\to\frac{\pi}{2}}{\sim} \frac{\left(\frac{\pi}{2} - t\right)^2}{2}.$$

On en déduit donc que :

$$\frac{\cos t}{1-\sin t} \underset{x\to\frac{\pi}{2}}{\sim} \frac{2}{\frac{\pi}{2} - t},$$

qui n'est pas intégrable au voisinage de $\dfrac{\pi}{2}$. Donc :

$$\boxed{\text{La fonction : } t \mapsto \frac{\cos t}{1-\sin t} \text{ n'est pas intégrable sur } \left[0, \frac{\pi}{2}\right[.}$$

Remarque : On peut aussi le justifier par le calcul :

$$\int_0^a \frac{\cos t}{1-\sin t}\,\mathrm{d}t = \Big[-\ln|1-\sin t|\Big]_0^a = -\ln|1-\sin a| \underset{a\to\frac{\pi}{2}}{\longrightarrow} +\infty.$$

8a. Puisque g est décroissante sur $]-1, +\infty[$, alors :
- soit g est majorée au voisinage de -1 et alors g admet une limite finie en -1 ;
- soit g n'est pas majorée au voisinage de -1 et alors $\lim\limits_{x\to-1} g(x) = +\infty$.

8b. Dans le cas où $f = \cos$, on a vu en **II.2.** qu'alors : $g(x) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{1 + x\sin t}\,\mathrm{d}t = \varphi(x)$. Or, d'après **I.4.**, $\lim\limits_{x\to-1} \varphi(x) = +\infty$.

Ainsi, d'après la propriété admise :

$$\boxed{\text{la fonction } t \mapsto \frac{\cos t}{1-\sin t} \text{ n'est pas intégrable sur } \left[0, \frac{\pi}{2}\right[.}$$

9. Le tableau de variations de g est :

x	-1	$+\infty$
g	L $\searrow$	0