CONCOURS COMMUN SUP 2002

DES ÉCOLES DES MINES D'ALBI, ALÈS, DOUAI, NANTES

Épreuve de Mathématiques

(toutes filières)

Mardi 21 mai 2002 de 14h00 à 18h00

Instructions générales :

Les candidats :

- doivent vérifier que le sujet comprend 4 pages numérotées 1/4, 2/4, 3/4 et 4/4,
- sont invités à porter une attention particulière à la rédaction : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées,
- colleront sur leur première feuille de composition l'étiquette à code à barres correspondante.

Problème d'Analyse

1. Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(0)=1$ *et* $\forall t \neq 0,\ f(t)=\dfrac{Arctan(t)}{t}$.

1.1 Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$ et paire.

1.2 Donner le développement limité à l'ordre 1 de f(t) au voisinage de 0. En déduire que f est dérivable en 0, et donner $f'(0)$.

1.3 Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et calculer $f'(t)$, pour $t \in \mathbb{R}^*$.

1.4 A l'aide d'une intégration par parties, montrer que : $\forall t \in \mathbb{R}^*,\ \displaystyle\int_0^t \frac{w^2}{(1+w^2)^2}\,dw = -\frac{1}{2}\,t^2\,f'(t)$.

En déduire le sens de variation de f.

1.5 Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (unité : 2 cm).

(On ne demande pas l'étude des points d'inflexion)

2. Soit ϕ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $\phi(0)=1$ *et* $\forall x \neq 0,\ \phi(x)=\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)dt$.

2.1 Montrer que ϕ est continue sur $\mathbb{R}$ et paire.

2.2 Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leq \phi(x) \leq 1$. *(on pourra commencer par supposer $x > 0$)*

2.3 Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \phi'(x) = \dfrac{1}{x}\big(f(x)-\phi(x)\big)$.

Montrer que ϕ est dérivable en 0, avec $\phi'(0)=0$. Donner les variations de ϕ.

2.4 Montrer que : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_1^x f(t)dt = 0$. *En déduire que* $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \phi(x) = 0$.

2.5 Tracer la courbe représentative de ϕ dans le même repère que celle de f.

(On ne demande pas l'étude des points d'inflexions)

3. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_{n+1}=\phi(u_n)$, où ϕ est l'application du 2).

3.1 Montrer que : $\forall t \geq 0,\ 0 \leq \dfrac{t}{1+t^2} \leq \dfrac{1}{2}$.

3.2 Montrer que, pour tout x strictement positif : $|\,\phi'(x)\,| \leq \dfrac{1}{x}\big(1-f(x)\big) = \dfrac{1}{x^2}\displaystyle\int_0^x \frac{t^2}{1+t^2}\,dt$. *(On pourra utiliser 2.2 et 2.3). En déduire que, pour tout x strictement positif :* $|\,\phi'(x)\,| \leq \dfrac{1}{4}$, *et que cette inégalité reste vérifiée pour tout x de $\mathbb{R}$.*

3.3 Montrer que l'équation : $x \in \mathbb{R},\ \phi(x)=x$ *admet une unique solution. On note α cette solution. Montrer que* $\alpha \in]0;1]$.

3.4 Prouver que : $\forall n \in \mathbb{N}, \mid u_{n+1} - \alpha \mid \leq \frac{1}{4} \mid u_n - \alpha \mid$.

En déduire que (u_n) *est convergente, et préciser sa limite.*

4. *On considère l'équation différentielle :* $x^2 y' + xy = Arctan(x)$.

   4.1 Résoudre cette équation différentielle sur $]-\infty, 0[$ *et sur* $]0, +\infty[$.

   4.2 Montrer que ϕ *est l'unique solution sur* $\mathbb{R}$ *de cette équation différentielle.*

Problème d'Algèbre

Dans ce problème, E *désigne un espace vectoriel euclidien de dimension trois,* $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ *une base orthonormée de* E*. La norme de* E *est notée* $\| \, . \, \|$*. On note* $\mathcal{L}(E)$ *l'ensemble des endomorphismes de* E*,* $GL(E)$ *l'ensemble des automorphismes de* E*,* Id_E *l'application identique de* E*,* o_E *le vecteur nul de* E*.*

$\mathcal{E}$ *désigne un espace affine euclidien associé à* E*,* $\mathcal{R} = (O, e_1, e_2, e_3)$ *un repère orthonormé de* $\mathcal{E}$*.*

1. *Soit* ψ *l'endomorphisme de* E *dont la matrice relativement à* $\mathcal{B}$ *est* $A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

   1.1 Montrer que $\frac{4}{3}\psi$ *est un demi-tour dont on précisera l'axe* D*.*

   1.2 En déduire que ψ *est la composée commutative de deux endomorphismes simples de* E *que l'on précisera.*

2. *On note* $\mathcal{S}$ *l'ensemble des endomorphismes* φ *de* E *pour lesquels :*

$$\exists k \in [0; 1[, \ \forall x \in E, \| \varphi(x) \| \leq k \| x \|$$

   2.1 Montrer que ψ *appartient à* $\mathcal{S} \cap GL(E)$*.*

   2.2 Id_E *appartient-il à* $\mathcal{S}$ *?*

   2.3 Montrer que $\mathcal{S}$ *est stable pour* $\circ$*.* $\mathcal{S} \cap GL(E)$ *est-il un sous-groupe de* $(GL(E), \circ)$ *?*

   2.4 Soit φ *un élément de* $\mathcal{S}$*. Montrer que* $Ker(\varphi - Id_E) = \{o_E\}$*. En déduire que* $(\varphi - Id_E)$ *appartient à* $GL(E)$*.*

   2.5 Montrer que $\varphi \in \mathcal{S}$ *si et seulement si* $\exists k \in [0; 1[, \ \forall x \in E, \ \Big(\| x \| = 1 \Longrightarrow \| \varphi(x) \| \leq k\Big)$.

   2.6 Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$*. On suppose qu'il existe une base orthonormée de* E *dans laquelle la matrice de* φ *est diagonale, à éléments diagonaux strictement inférieurs à 1 en valeur absolue. Montrer que* $\varphi \in \mathcal{S}$*.*

3. *Soit μ l'endomorphisme de E dont la matrice relativement à $\mathcal{B}$ est* $M = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

   3.1 *On définit :* $e'_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(e_1 - e_2 - e_3)$, $e'_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_2)$ *et* $e'_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(e_1 - e_2 + 2e_3)$.

   Vérifier que (e'_1, e'_2, e'_3) *est une base orthonormée* $\mathcal{B}'$ *de* E.

   3.2 *Déterminer la matrice de* μ *dans la base* $\mathcal{B}'$. *En déduire que* $\mu \in \mathcal{S}$.

4. *Soit φ_α l'endomorphisme de E dont la matrice relativement à $\mathcal{B}$ est* $M_\alpha = \alpha\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

   On se propose de prouver que $\varphi_\alpha \in \mathcal{S}$ *si et seulement si* $|\alpha| < \frac{1}{2}$.

   Soit $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$ *un vecteur de E de norme 1.*

   4.1 *Montrer que :* $\| \varphi_\alpha(x) \|^2 = \alpha^2\big(1 + (x_1 - x_2 - x_3)^2\big)$.

   4.2 *Le vecteur x s'écrit, dans la base $\mathcal{B}'$ du 3.1 :* $x = x'_1e'_1 + x'_2e'_2 + x'_3e'_3$.

   Montrer que : $\| \varphi_\alpha(x) \|^2 = \alpha^2\big(1 + 3{x'_1}^2\big)$. *En déduire que :* $\| \varphi_\alpha(x) \| \leq 2\,|\alpha|$.

   Déterminer l'ensemble des x de E de norme 1 pour lesquels l'inégalité précédente est une égalité.

   4.3 *Montrer que* $\varphi_\alpha \in \mathcal{S}$ *si et seulement si* $|\alpha| < \frac{1}{2}$.

5. *Soit f une application affine de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ dont l'endomorphisme associé φ appartient à $\mathcal{S}$.*

   5.1 *Soit M un point de $\mathcal{E}$. Montrer que M est invariant par f si et seulement si*

   $(\varphi - Id_E)(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{f(O)O}$.

   5.2 *En déduire que f admet un point invariant et un seul, que l'on note Ω.*

   5.3 *Justifier l'égalité :* $\forall M \in \mathcal{E}$, $\overrightarrow{\Omega f(M)} = \varphi(\overrightarrow{\Omega M})$.

   5.4 *On définit la suite (M_n) de points de $\mathcal{E}$ par* $M_0 \in \mathcal{E}$ *et* $\forall n \in \mathbb{N}$, $M_{n+1} = f(M_n)$.

   5.4.1 *Montrer que* $\lim\limits_{n\to+\infty} \| \overrightarrow{\Omega M_n} \| = 0$.

   5.4.2 *Soient (x_n), (y_n) et (z_n) les suites réelles définies par : x_0, y_0 et z_0 sont des réels, et :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left\{\begin{array}{lllll} x_{n+1} = \frac{1}{4}x_n & - & \frac{1}{4}y_n & + & 1 \\ y_{n+1} = \frac{1}{4}y_n & + & \frac{1}{4}z_n & + & \frac{1}{2} \\ z_{n+1} = \frac{1}{4}x_n & - & \frac{1}{4}z_n & + & 1 \end{array}\right. .$$

   Montrer que (x_n), (y_n) et (z_n) sont convergentes, et préciser leurs limites respectives.