Exercice 1

1. **1.a** f est continue sur $\mathbb{R}^*$ en tant que quotient de fonctions continues sur $\mathbb{R}^*$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^*$. D'autre part, il est connu que $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\text{Arctan}\, t}{t} = 1$ et donc,

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} f(t) = 1 = f(0).$$

Ainsi, f est continue en 0 et finalement sur $\mathbb{R}$.

Pour $t \in \mathbb{R}^*$, $f(-t) = \dfrac{\text{Arctan}(-t)}{-t} = \dfrac{-\text{Arctan}\, t}{-t} = \dfrac{\text{Arctan}\, t}{t} = f(t)$, ce qui montre que f est paire.

$$\boxed{\text{f est continue sur } \mathbb{R} \text{ et paire.}}$$

1.b Quand t tend vers 0 ;

$$f(t) = \frac{t + o(t^2)}{t} = 1 + 0.t + o(t).$$

f est continue en 0 et admet en 0 un développement limité d'ordre 1. On en déduit que

$$\boxed{\text{f est dérivable en 0 avec } f'(0) = 0.}$$

1.c Soit $t \in \mathbb{R}^*$. Les deux fonctions $w \mapsto w$ et $w \mapsto \dfrac{-}{2(1+w^2)}$ sont de classe C^1 sur $[0, t]$ si $t > 0$ et $[t, 0]$ si $t < 0$. On peut donc effectuer une intégration par parties qui fournit :

$$\int_0^t \frac{w^2}{(1+w^2)^2}\, dw = \int_0^t w \frac{w}{(1+w^2)^2}\, dw = \left[w\frac{-1}{2(1+w^2)}\right]_0^t + \int_0^t \frac{1}{2(1+w^2)}\, dw) = \frac{1}{2}\left(-\frac{t}{1+t^2} + \text{Arctan}\, t\right) = -\frac{1}{2}t^2 f'(t).$$

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}^*,\ \int_0^t \frac{w^2}{(1+w^2)^2}\, dw = -\frac{1}{2}t^2 f'(t).}$$

Donc, si $t \neq 0$, $f'(t) = \dfrac{-2}{t^2}\displaystyle\int_0^t \frac{w^2}{(1+w^2)^2}\, dw$.

• Si $t > 0$, la fonction $w \mapsto \dfrac{w^2}{(1+w^2)^2}$ dw est continue sur $[0, t]$, positive et non nulle sur $[0, t]$. On en déduit que $\displaystyle\int_0^t \frac{w^2}{(1+w^2)^2}\, dw > 0$ et donc que $f'(t) < 0$.

• Si $t < 0$, la fonction $w \mapsto \dfrac{w^2}{(1+w^2)^2}$ dw est continue sur $[t, 0]$, positive et non nulle sur $[t, 0]$. On en déduit que $\displaystyle\int_t^0 \frac{w^2}{(1+w^2)^2}\, dw > 0$ ou encore que $\displaystyle\int_0^t \frac{w^2}{(1+w^2)^2}\, dw < 0$ et donc que $f'(t) > 0$.

Ainsi, f' est strictement positive sur $]-\infty, 0[$, strictement négative sur $]0, +\infty[$ (et s'annule en 0). Donc

$$\boxed{\text{f est donc strictement croissante sur }]-\infty, 0] \text{ et strictement décroissante sur } [0, +\infty[.}$$

2. **2.a** f est continue sur $\mathbb{R}$. Donc la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\, dt$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et en particulier, continue sur $\mathbb{R}$. On en déduit que ϕ est continue sur $\mathbb{R}^*$ en tant que quotient de fonctions continues sur $\mathbb{R}^*$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^*$.

Pour $x \in \mathbb{R}$, posons $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\, dt$. F est la primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0 (F est en particulier dérivable sur $\mathbb{R}$ et $F' = f$). Pour $x \neq 0$, on a

$$\phi(x) = \frac{F(x)}{x} = \frac{F(x) - F(0)}{x - 0}.$$

Quand x tend vers 0, cette dernière expression tend vers

$$F'(0) = f(0) = 1 = \Phi(0).$$

Ainsi, ϕ est donc continue en 0 et donc sur $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}^*$. En posant $u = -t$, on obtient (f étant paire)

$$\phi(-x) = \frac{1}{-x}\int_0^{-x} f(t)\, dt = -\frac{1}{x}\int_0^x f(-u). - du = \frac{1}{x}\int_0^x f(u)\, du = \phi(x).$$

ϕ est donc paire.

$$\boxed{\phi \text{ est continue sur } \mathbb{R} \text{ et paire.}}$$

2.b • Le résultat est clair pour $x = 0$ ($f(0) = \phi(0) = 1$).

• Soit $x > 0$. D'après la question 1.4, f est décroissante sur $[0, x]$. Par suite, pour tout réel $t \in [0, x]$, $f(x) \leq f(t) \leq f(0) = 1$. Par croissance de l'intégrale, on a alors

$$f(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(x)\, dt \leq \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\, dt = \phi(x) \leq \frac{1}{x}\int_0^x dt = 1.$$

Ainsi, si $x > 0$, $f(x) \leq \Phi(x) \leq 1$.

• Si $x < 0$, alors $-x > 0$ et donc $f(-x) \leq \Phi(-x) \leq 1$. Mais f et Φ sont paires, et donc de nouveau, $f(x) \leq \Phi(x) \leq 1$.

Finalement,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leq \Phi(x) \leq 1.}$$

2.c ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^*$ et pour x réel non nul on a,

$$\phi'(x) = \frac{1}{x}f(x) - \frac{1}{x^2}\int_0^x f(t)\, dt = \frac{1}{x}\left(f(x) - \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\, dt\right) = \frac{1}{x}(f(x) - \Phi(x)).$$

D'après la question 1.2., f admet un développement limité d'ordre 1 en 0 à savoir

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + o(x).$$

F admet donc en 0 un développement limité d'ordre 2 obtenu par intégration, à savoir

$$F(x) \underset{x\to 0}{=} F(0) + x + o(x^2) = x + o(x^2).$$

Finalement,

$$\phi(x) = \frac{1}{x}F(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + o(x).$$

Ainsi, en tenant compte de $\phi(0) = 1$, ϕ admet un développement limité d'ordre 1 en 0 . On en déduit que

$$\boxed{\phi \text{ est dérivable en 0 et } \phi'(0) = 0.}$$

D'après la question 2.2, pour $x > 0$, on a $f(x) \leq \phi(x)$. Par suite, $\phi'(x) = \dfrac{1}{x}(f(x) - \phi(x)) \leq 0$. ϕ' est négative sur $]0, +\infty[$ et par parité, ϕ' est positive sur $]-\infty, 0[$. Donc

$$\boxed{\phi \text{ est donc décroissante sur } [0, +\infty[\text{ et croissante sur }]-\infty, 0].}$$

2.d Soit $x > 1$.

$$0 \leq \int_1^x \frac{\operatorname{Arctan} t}{t}\,dt \leq \int_1^x \frac{\pi/2}{t}\,dt = \frac{\pi \ln x}{2}.$$

Par suite, pour $x > 1$,

$$0 \leq \frac{1}{x}\int_1^x f(t)\,dt \leq \frac{\pi \ln x}{2x}.$$

D'après un théorème de croissances comparées, $\lim_{x\to+\infty} \frac{\pi \ln x}{2x} = 0$, et donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_1^x f(t)\,dt = 0$.

D'autre part, $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^1 f(t)\,dt = 0$ et finalement, $\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt = \frac{1}{x}\int_0^1 f(t)\,dt + \frac{1}{x}\int_1^x f(t)\,dt$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$. Finalement,

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \Phi(x) = 0.}$$

3.

3.1 Soit $t \geq 0$. De l'inégalité $(t-1)^2 \geq 0$, on déduit $2t \leq 1+t^2$ et donc, puisque $1+t^2 > 0$, $\frac{t}{1+t^2} \leq \frac{1}{2}$. Finalement,

$$\boxed{\forall t \geq 0,\ 0 \leq \frac{t}{1+t^2} \leq \frac{1}{2}.}$$

3.2 Soit $x > 0$.

$$\frac{1}{x^2}\int_0^x \frac{t^2}{1+t^2}\,dt = \frac{1}{x^2}\int_0^x \frac{1+t^2-1}{1+t^2}\,dt = \frac{1}{x^2}\int_0^x \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right)\,dt = \frac{1}{x^2}(x - \operatorname{Arctan} x) = \frac{x - xf(x)}{x^2} = \frac{1-f(x)}{x}.$$

Mais alors, d'après les questions 2.2 et 2.3,

$$|\phi'(x)| = \frac{1}{x}|f(x) - \phi(x)| = \frac{1}{x}(\phi(x) - f(x)) \leq \frac{1}{x}(1 - f(x)) = \frac{1}{x^2}\int_0^x \frac{t^2}{1+t^2}\,dt.$$

Avec la question 3.1, on en déduit que

$$|\phi'(x)| \leq \frac{1}{x^2}\int_0^x \frac{1}{2}t\,dt = \frac{1}{x^2}\frac{x^2}{4} = \frac{1}{4}.$$

Ainsi, $\forall x > 0,\ |\phi'(x)| \leq \frac{1}{4}$.

Maintenant, ϕ est paire et donc ϕ' est impaire, et l'inégalité proposée reste vraie pour $x < 0$ par parité. Enfin, pour $x = 0$, d'après la question 2.3, $|\phi'(0)| = 0 \leq \frac{1}{4}$.

Finalement,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ |\phi'(x)| \leq \frac{1}{4}.}$$

3.4 ϕ est définie sur $\mathbb{R}$ et donc, par récurrence, pour tout choix de u_0, u_n existe pour tout entier naturel n.

Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question 3.2 et l'inégalité des accroissements finis, pour tous réels a et b, on a

$$|\phi(b) - \phi(a)| \leq \frac{1}{4}|b - a|.$$

Par suite,

$$|u_{n+1} - \alpha| = |\phi(u_n) - \phi(\alpha)| \leq \frac{1}{4}|u_n - \alpha|.$$

Mais alors, par récurrence, on a immédiatement $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{4^n}|u_0 - \alpha|$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{4^n}|u_0 - \alpha|.}$$

Comme $\frac{1}{4^n}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, on en déduit que la suite (u_n) converge et que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \alpha.}$$

Exercice 2

I – Étude d'endomorphismes donnés par leur matrice

1. Comme $A = Mat_{(1,X,X^2)}(f)$, $\det f = \det A = \begin{vmatrix} -u & v & 0 \\ -2 & 0 & 2v \\ 0 & -1 & u \end{vmatrix}$.

   On remarque, si C_1, C_2 et C_3 désignent les colonnes de la matrice, que $vC_1 + uC_2 + C_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

   Ainsi, $\boxed{\det f = 0.}$

2. Comme C_1 et C_2 ne sont pas colinéaires, on a $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} f = 2$. Par théorème du rang, $\dim(\operatorname{Ker} f) = 1$.
   Mais comme $vC_1 + uC_2 + C_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix} v \\ u \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et donc $v + uX + X^2 \in \operatorname{Ker} f$.
   Comme ce n'est pas le polynôme nul et comme $\dim(\operatorname{Ker} f) = 1$, on a donc que $(v + uX + X^2)$ est une base de $\operatorname{Ker} f$.

3. On a vu que $\dim \operatorname{Im} f = \operatorname{rg} f = 2$ et les colonnes C_1 et C_2 n'étant pas colinéaires, $(-f(1), f(X))$ est une base de $\operatorname{Im} f$.
   Ainsi, $(u + 2X, v - X^2)$ est une base de $\operatorname{Im} f$.

II – Définition d'une application linéaire, exemples et propriétés

4. - La linéarité de φ provient de la distributivité de $\times$ sur $+$ dans $\mathbb{R}[X]$ et de la linéarité de la dérivation sur $\mathbb{R}[X]$.
   - Montrons que $\varphi(\mathbb{R}_n[X]) \subset \mathbb{R}_n[X]$.
     Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Alors $\varphi(P) = 2P'Q - nPQ' \in \mathbb{R}[X]$. On veut montrer que $\deg(2P'Q - nPQ') \leqslant n$. Remarquons que $\deg P' \leqslant \deg P - 1$ dans $\overline{\mathbb{R}}$, c'est-à-dire $\deg P' \leqslant n - 1$. Ainsi,
     $$\begin{cases} \deg(2P'Q) \leqslant \deg P - 1 + 2 = \deg P + 1 \leqslant n + 1 \\ \deg(-nPQ') = \deg P + 1 \leqslant n + 1 \end{cases} \quad \text{donc} \quad \deg(\varphi(P)) \leqslant n + 1.$$
     Montrons que le terme de degré $n+1$ est nul : soient a le cœfficient de degré n dans P (éventuellement nul) et b le cœfficient dominant de Q.
     Alors le cœfficient de degré $n+1$ dans $2P'Q$ est $2(na)b$, celui dans nPQ' est $na(2b)$. Ainsi, le cœfficient de degré $n+1$ dans $\varphi(P) = 2P'Q - nPQ'$ est nul.
     On a alors $\deg(\varphi(P)) \leqslant n$ et donc $\varphi(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.
   - Finalement, φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

5. (a) Soit $\mathscr{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
   On a, pour $P \in \mathbb{R}_2[X]$, $\varphi(P) = 2P'(X^2 + uX + v) - 2P(2X + u)$. On calcule :
   $$\begin{aligned} \varphi(1) &= -2(2X+u) = -2u - 4X \\ \varphi(X) &= 2(X^2 + uX + v) - 2X(2X+u) = 2v - 2X^2 \\ \varphi(X^2) &= 2(2X)(X^2+uX+v) - 2X^2(2X+u) = 4vX + 2uX^2 \end{aligned} \quad \text{Donc} \quad \boxed{Mat_{\mathscr{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} -2u & 2v & 0 \\ -4 & 0 & 4v \\ 0 & -2 & 2u \end{pmatrix} = 2A.}$$

   (b) Avec les notations de la partie **I**, on a donc $\varphi = 2f$ et $\boxed{\operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect} Q}$ d'après **2**.

6. (a) Soit $R = Q \wedge Q'$. Alors $R \mid Q$ et $R \mid Q'$: les racines éventuelles de R sont communes à Q et Q'. Or on a supposé que Q n'admet pas de racine double. Ainsi, R n'a pas de racine réelle.
   Mais comme $\deg R \leqslant \deg Q' = 1$, et comme il n'a pas de racine réelle, R est constant. Ainsi, le plus grand diviseur commun à Q et Q' est 1.

   (b) Si $P \in \operatorname{Ker}\varphi \setminus \{0\}$, $\varphi(P) = 0$ donc $2P'Q = nPQ'$ et ainsi $Q \mid PQ'$. Or, d'après la question précédente, Q et Q' sont premiers entre eux. Ainsi, d'après le théorème de Gauss, $\boxed{Q \mid P.}$

   (c) Soit $P \in \operatorname{Ker}\varphi \setminus \{0\}$ et $E_P = \{p \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } Q^p \mid P\}$.
   E_P est non vide, car, d'après la question précédente, $1 \in E_P$, et E_p est majoré par $\left\lfloor \frac{\deg P}{\deg Q} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\deg P}{n} \right\rfloor$ (car si $p \in E_P$, alors $\deg Q^p \leqslant \deg P$ donc $p \deg Q \leqslant \deg P$).
   Donc E_P admet un plus grand élément $k \in \mathbb{N}^*$. Ainsi, $Q^k \mid P$ et on a donc $R \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = Q^k R$.
   De plus, $Q \nmid R$, sinon $Q^{k+1} \mid P$ et k n'est pas le plus grand élément de E_p.
   Ainsi, pour $P \in \operatorname{Ker}\varphi \setminus \{0\}$, on a $R \in \mathbb{R}[X]$ et $p \in \mathbb{N}^*$ tels que $P = RQ^k$ et Q ne divise pas R.

   (d) On suppose que $\operatorname{Ker}\varphi \neq \{0\}$. *But* : n est pair.
   Soit $P \in \operatorname{Ker}\varphi \setminus \{0\}$, on a, d'après la question précédente, $R \in \mathbb{R}[X]$ et $p \in \mathbb{N}^*$ tels que $P = RQ^k$ et Q ne divise pas R.
   Mais comme $P \in \operatorname{Ker}\varphi$, $2P'Q = nPQ'$. Donc
   $$2(R'Q^k + kRQ'Q^{k-1})Q = nRQ^kQ' \qquad \text{d'où} \qquad (2R'Q + 2kRQ')Q^k = nRQ'Q^k.$$
   Mais comme Q n'est pas le polynôme nul (de degré 2), $Q^k \neq 0$ et
   $$2R'Q + 2kRQ' = nRQ', \qquad \text{puis} \qquad 2R'Q = (n-2k)RQ'.$$
   Ainsi, $Q \mid (n-2k)RQ'$ et pourtant $Q \wedge Q' = 1$ et $Q \nmid R$.
   C'est donc que $n = 2k$. En particulier, n est pair.

   (e) - D'après la question précédente, si n est impair, $\operatorname{Ker}\varphi = \{0\}$.
   - Sinon, en reprenant le calcul de la question précédente, on a, pour $P \in \operatorname{Ker}\varphi \setminus \{0\}$, $P = Q^k R$ avec $k \in \mathbb{N}^*$, Q ne divise pas R, $2R'Q = (n-2k)RQ'$ et $n = 2k$. Donc $R'Q = 0$ et donc R est constant car $Q \neq 0$. D'où $P = \lambda Q^{\frac{n}{2}}$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$.
     Ainsi, si n est pair, $\operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{Vect}\left(Q^{\frac{n}{2}}\right)$.

   *Remarque : on retrouve le résultat de la question **2** lorsque $u^2 \neq 4v$.*

7. (a) Comme α est racine double de Q qui est de degré 2, on a $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $Q = \lambda(X-\alpha)^2$ et donc $Q' = 2\lambda(X-\alpha)$.
   Mais si $P \in \operatorname{Ker}\varphi$, $2P'Q = nPQ'$ donc $2\lambda(X-\alpha)^2 P' = 2\lambda n(X-\alpha)P$ donc, comme $2n\lambda(X-\alpha) \neq 0$, $\frac{1}{n}(X-\alpha)P' = P$.
   Ainsi $(X-\alpha) \mid P$ et α est racine de P.

   (b) - Soit $P \in \operatorname{Ker}\varphi \setminus \{0\}$. D'après la question précédente, α est racine de P. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ la multiplicité de cette racine. On a alors un $R \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = (X-\alpha)^k R$ et $\widetilde{R}(\alpha) \neq 0$.
     Alors $P' = k(X-\alpha)^{k-1}R + (X-\alpha)^k R'$. Mais, d'après la question précédente, $(X-\alpha)P' = nP$. Donc
     $$k(X-\alpha)^k R + (X-\alpha)^{k+1} R' = n(X-\alpha)^k R.$$
     Ainsi, comme $(X-\alpha)^k \neq 0$, on en déduit que $(n-k)R = (X-\alpha)R'$. Et comme α n'est pas racine de R, on a nécessairement $k = n$.
     Finalement, comme $P \in \mathbb{R}_n[X]$, P s'écrit donc $\mu(X-\alpha)^n$ avec $\mu \in \mathbb{R}$.
   - Réciproquement, si $P = \mu(X-\alpha)^n$,
     $$\varphi(P) = 2P'Q - nPQ' = \mu\lambda\Big(2n(X-\alpha)^{n-1}(X-\alpha)^2 - 2n(X-\alpha)^n(X-\alpha)\Big) = 0$$
     où on a noté $Q = \lambda(X-\alpha)^2$. Et donc $P \in \operatorname{Ker}\varphi$.
   - En conclusion, $\operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{Vect}((X-\alpha)^n)$.

   *Remarque : on retrouve le résultat de la question **3** lorsque $u^2 = 4v$.*