Devoir en Temps Limité n°1

À lire attentivement

- Les copies mal présentées, illisibles ou dans lesquelles les réponses aux questions ne seraient pas $\boxed{\text{encadrées}}$, et dans lesquelles il n'y aurait pas de trait tiré entre chaque question (ou sous-question) sur la largeur de la feuille seront **fortement sanctionnées, voire non corrigées**.
- Présentation et rédaction (concise, mais complète) sont une part importante de la notation.
- Il est IMPÉRATIF de respecter l'ordre des questions (quitte à laisser des blancs pour « plus tard ».)
- Il est conseillé d'utiliser un brouillon. Seules les questions abouties figurent sur la copie.
- Aucun départ avant la fin des 4 heures n'est autorisé.
- LA CALCULATRICE N'EST PAS AUTORISÉE.

Exercice 1 : Analyse

1. Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(0)=1$ et

$$\forall\, t\neq 0,\quad f(t)=\frac{\operatorname{Arctan} t}{t}.$$

1.a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$ et paire.

1.b) Donner le développement limité à l'ordre 1 de $f(t)$ au voisinage de 0. En déduire que f est dérivable en 0 et donner $f'(0)$.

1.c) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$\forall\, t\in\mathbb{R},\quad \int_0^t \frac{w^2}{(1+w^2)^2}\,\mathrm{d}w=-\frac{1}{2}t^2f'(t).$$

En déduire le sens de variation de f.

2. Soit ϕ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\forall\, x\neq 0,\quad \phi(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\phi(0)=1$.

2.a) Montrer que ϕ est continue sur $\mathbb{R}$ et paire.

2.b) Montrer que $\forall\, x\in\mathbb{R},\quad f(x)\leqslant\phi(x)\leqslant 1$.
On pourra commencer par supposer $x>0$.

2.c) Montrer que $\forall\, x\in\mathbb{R}^*,\quad \phi'(x)=\frac{1}{x}\big(f(x)-\phi(x)\big)$.
Montrer que ϕ est dérivable en 0, avec $\phi'(0)=0$. Donner les variations de ϕ.

2.d) Montrer que $\frac{1}{x}\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$. En déduire que $\phi(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$.

2.e)

(i) Montrer que $\forall\, t\geqslant 0,\quad 0\leqslant\frac{t}{1+t^2}\leqslant\frac{1}{2}$.

(ii) Montrer que $\forall\, x>0,\quad \left|\phi'(x)\right|\leqslant\frac{1}{x}(1-f(x))=\frac{1}{x^2}\int_0^x\frac{t^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.
On pourra utiliser 2.b et 2.c.

(iii) Montrer que ϕ est $\frac{1}{4}$-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.

2.f) On admet que ϕ admet un unique point fixe α, et, pour $u_0\in\mathbb{R}$, on se donne la suite $(u_n)_n$ définie par pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=\phi(u_n)$.

(i) Montrer que pour tout entier naturel n, $|u_{n+1}-\alpha|\leqslant\frac{1}{4}|u_n-\alpha|$.

(ii) En déduire que (u_n) converge et donner sa limite.

Exercice 2 : Algèbre

I – Étude d'endomorphismes donnés par leur matrice

Soit u et v deux réels. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ ayant pour matrice sur la base canonique $(1,X,X^2)$ la matrice $A=\begin{pmatrix}-u & v & 0\\ -2 & 0 & 2v\\ 0 & -1 & u\end{pmatrix}$.

1. Calculer le déterminant de f en justifiant votre réponse.
2. Déterminer une base du noyau de f.
3. Déterminer une base de l'image de f.

II – Définition d'une application linéaire, exemples et propriétés

Soit n un entier supérieur ou égal à 2, Q un polynôme de degré 2 et φ l'application définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par $\varphi(P)=2P'Q-nPQ'$.

4. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
5. Soit u et v deux réels. On suppose dans cette question que $n=2$ et que $Q=X^2+uX+v$.
   (a) Déterminer la matrice de φ sur la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
   (b) Déterminer le noyau de φ en fonction de Q.
6. On suppose que Q n'admet pas de racine double.
   (a) Que peut-on dire du PGCD de Q et de Q' ?
   (b) Déduire de la question précédente que si P est un polynôme non nul appartenant au noyau de φ alors Q divise P.
   (c) Montrer que si P est un polynôme non nul appartenant au noyau de φ il existe un entier k non nul et un polynôme R non nul, tels que $P=RQ^k$ et tels que Q ne divise pas R.
   (d) Déduire de la question précédente que si le noyau de φ n'est pas réduit au polynôme nul alors n est pair.
   (e) Déterminer suivant les valeurs de n le noyau de φ.
7. On suppose que Q possède une racine double α.
   (a) Montrer que si P est un polynôme non nul appartenant au noyau de φ alors α est racine de P.
   (b) Donner le noyau de φ.
   (*On pourra utiliser l'ordre de multiplicité de α.*)

FIN DE L'ÉNONCÉ