

Convergence de série au sens de Cesàro et suites récurrentes¹

A. Convergence au sens de Cesàro

1. Soit u et v deux suites à termes réels strictement positifs tel que $u_n = o(v_n)$. On note S_n et S'_n les sommes partielles des séries de terme général u_n et v_n respectivement. Montrer que si la série $\sum v_n$ diverge, alors $S_n = o(S'_n)$.

2. Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}, (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$, $\sum u_n$ diverge et

$$v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \in \mathbb{R}. \text{ Montrer que } w_n = \frac{\sum_{p=0}^n u_p v_p}{\sum_{p=0}^n u_p} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell.$$

3. La convergence de $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ entraîne-t-elle celle de $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

4. Calculer la limite pour $n \rightarrow +\infty$ de $\sqrt[n]{\prod_{p=1}^n \left(1 + \frac{1}{p}\right)}$.

5. En reprenant les notations de la première question, montrer que si les séries u et v à termes strictement positifs vérifient $u_n \sim v_n$ et sont termes généraux de séries divergentes, alors $S_n \sim S'_n$.

6. **En déduire** que $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim \ln n$. *Indication : chercher un équivalent de $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.*

7. Montrer plus précisément que $H_n - \ln n$ tend vers une limite γ lorsque $n \rightarrow +\infty$.
(On ne cherchera pas à calculer γ .)

8. (a) Montrer que si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_*^+)^{\mathbb{N}}$ tel que pour tout $n \geq 1$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\lambda}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, alors on a $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ terme général de série absolument convergente tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln \frac{u_{n+1}}{u_n} = -\frac{\lambda}{n} + w_n.$$

(b) En déduire qu'il existe $A > 0$ tel que $u_n \sim \frac{A}{n^\lambda}$.

(c) Étudier la nature de la série de terme général $u_n = \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)(2n+2)}$.

9. (a) On dit que la série de terme général u_n converge au sens de Cesàro si la suite $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge lorsque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sigma_n = \frac{S_0 + S_1 + \cdots + S_n}{n+1}$ et $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

Dire rapidement pourquoi, si la série de terme général u_n est convergente, alors elle converge au sens de Cesàro.

(b) Soit la série de terme général u_n . On suppose que cette série converge au sens de Cesàro et que $nu_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Montrer que la série de terme général u_n est convergente.

1. Vieux voire très vieux sujets ESTP et Navale.

B. Autour d'une suite récurrente

On considère la suite définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n + u_n^2$.

1. On suppose que $u_0 \in]-1, 0[$.

(a) Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite.

(b) On pose $v_n = -u_n$. Quelle est la relation de récurrence vérifiée par v_n ?

(c) Montrer que $v_n \sim v_{n+1}$.

(d) On pose $a_n = \frac{1}{v_n} - \frac{1}{v_{n-1}}$. Trouver un équivalent de a_n et en déduire un équivalent de v_n .

(e) Quelle est la nature de la série de terme général v_n ?

Celle de la série de terme général $\sin v_n^2$?

Celle de la série de terme général $\frac{v_n}{\sqrt{n}}$?

(f) On pose $b_n = a_n - 1$. Montrer que $b_n \rightarrow 0$ et trouver un équivalent de b_n .

(g) En déduire la nature de la série de terme général $t_n = v_n - \frac{1}{n}$.

2. Préciser le comportement de la suite pour $u_0 = -1$ puis pour $u_0 = 0$.

3. Montrer que l'étude de la suite dans le cas où $u_0 < -1$ se ramène à l'étude du cas où $u_0 > 0$.

On suppose désormais que $u_0 > 0$.

4. Que peut-on dire de u_n lorsque $n \rightarrow +\infty$?

Montrer que $u_{n+1} \sim u_n^2$.

5. Prouver que la suite définie par $P_n = \frac{\ln u_n}{2^n}$ a une limite λ qu'on ne cherchera pas à calculer.

6. Cette limite λ est fonction de u_0 seulement. Montrer que c'est une fonction croissante de u_0 , que $\lambda > 0$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\lambda - \frac{\ln u_n}{2^n} < \frac{1}{2^n u_n}.$$

7. Quelle est la nature de la série de terme général $\frac{1}{u_n}$?

Celle de terme général $\frac{(-1)^n n}{u_n}$?

C. Une autre suite récurrente

Soit la suite récurrente définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ fixé et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1 + u_{n-1}}{\sqrt{1 + u_{n-1}^2}} - 1$.

1. Étudier la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

2. Étudier la série de terme général u_n^2 .

3. Étudier la série de terme général u_n .