Convergence de série au sens de Cesàro et suites récurrentes [1]

A. Convergence au sens de Cesàro

1. Soit u et v deux suites à termes réels strictement positifs tel que $u_n = o(v_n)$. On note S_n et S'_n les sommes partielles des séries de terme général u_n et v_n respectivement.
   Montrer que si la série $\sum v_n$ diverge, alors $S_n = o(S'_n)$.
2. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n > 0$, $\sum u_n$ diverge et $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in \mathbb{R}$. Montrer que $w_n = \dfrac{\sum_{p=0}^{n} u_p v_p}{\sum_{p=0}^{n} u_p} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.
3. La convergence de $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ entraîne-ele celle de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
4. Calculer la limite pour $n\to+\infty$ de $\sqrt[n]{\prod_{p=1}^{n}\left(1+\frac{1}{p}\right)}$.
5. En reprenant les notations de la première question, montrer que si les séries u et v à termes strictement positifs vérifient $u_n \sim v_n$ et sont termes généraux de séries divergentes, alors $S_n \sim S'_n$.
6. **En déduire** que $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln n$. *Indication : chercher un équivalent de* $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.
7. Montrer plus précisément que $H_n - \ln n$ tend vers une limite γ lorsque $n\to+\infty$.
   (*On ne cherchera pas à calculer* γ.)
8. (a) Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_*^+)^{\mathbb{N}}$ tel que pour tout $n\geqslant 1$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\lambda}{n} + v_n$ où v_n est le terme général d'une série absolument convergente, alors on a $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ terme général de série absolument convergente tel que
   $$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad \ln\frac{u_{n+1}}{u_n} = -\frac{\lambda}{n} + w_n.$$
   Indication : on pourra utiliser en le justifiant le fait que si $a, b\in\mathbb{R}$, $ab \leqslant \frac{a^2+b^2}{2}$.
   (b) En déduire qu'il existe $A > 0$ tel que $u_n \sim \frac{A}{n^\lambda}$.
   (c) Étudier la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)(2n+2)}$.
9. (a) On dit que la série de terme général u_n converge au sens de Cesàro si la suite $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge lorsque pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\sigma_n = \dfrac{S_0+S_1+\cdots+S_n}{n+1}$ et $S_n = u_0+u_1+\cdots+u_n$.
   Dire rapidement pourquoi, si la série de terme général u_n est convergente, alors elle converge au sens de Cesàro.
   (b) Soit la série de terme général u_n. On suppose que cette série converge au sens de Cesàro et que $n u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
   Montrer que la série de terme général u_n est convergente.

1. Vieux voire très vieux sujets ESTP et Navale.

B. Autour d'une suite récurrente

On considère la suite définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n + u_n^2$.

1. On suppose que $u_0 \in]-1, 0[$.
   (a) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite.
   (b) On pose $v_n = -u_n$. Quelle est la relation de récurrence vérifiée par v_n ?
   (c) Montrer que $v_n \sim v_{n+1}$.
   (d) On pose $a_n = \frac{1}{v_n} - \frac{1}{v_{n-1}}$. Trouver un équivalent de a_n et en déduire un équivalent de v_n.
   (e) Quelle est la nature de la série de terme général v_n ?
   Celle de la série de terme général $\sin v_n^2$?
   Celle de la série de terme général $\frac{v_n}{\sqrt{n}}$?
   (f) On pose $b_n = a_n - 1$. Montrer que $b_n \to 0$ et trouver un équivalent de b_n.
   (g) En déduire la nature de la série de terme général $t_n = v_n - \frac{1}{n}$.
2. Préciser le comportement de la suite pour $u_0 = -1$ puis pour $u_0 = 0$.
3. Montrer que l'étude de la suite dans le cas où $u_0 < -1$ se ramène à l'étude du cas où $u_0 > 0$.

On suppose désormais que $u_0 > 0$.

4. Que peut-on dire de u_n lorsque $n\to+\infty$?
   Montrer que $u_{n+1} \sim u_n^2$.
5. Prouver que la suite définie par $P_n = \frac{\ln u_n}{2^n}$ a une limite λ qu'on ne cherchera pas à calculer.
6. Cette limite λ est fonction de u_0 seulement. Montrer que c'est une fonction croissante de u_0, que $\lambda > 0$ et que pour tout $n\in\mathbb{N}$,
   $$\lambda - \frac{\ln u_n}{2^n} < \frac{1}{2^n u_n}.$$
7. Quelle est la nature de la série de terme général $\frac{1}{u_n}$?
   Celle de terme général $\frac{(-1)^n n}{u_n}$?

C. Une autre suite récurrente

Soit la suite récurrente définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ fixé et pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{1+u_{n-1}}{\sqrt{1+u_{n-1}^2}} - 1$.

1. Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Étudier la série de terme général u_n^2.
3. Étudier la série de terme général u_n.