# Devoir Libre n° 2

# Autour de la transformation d'Abel

## I. Transformation d'Abel

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites complexes. On s'intéresse ici à la convergence de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n b_n$.

Pour tout entier naturel $n$, on pose $B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$.

1. (a) Soit $k\in\mathbb{N}^*$. Exprimer $b_k$ à l'aide deux termes de la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

   (b) Montrer que $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$, $\sum_{k=0}^{n} a_k b_k = a_n B_n + \sum_{k=0}^{n-1}(a_k - a_{k+1})B_k$.

   On parle de **transformation d'Abel**.

2. On suppose que la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $0$ et que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}}(a_n - a_{n+1})$ est absolument convergente. Montrer que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n b_n$ converge.
3. Établir que si la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est réelle, décroissante, de limite nulle et si la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, alors la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n b_n$ converge.
4. Énoncez et démontrer en utilisant une transformation d'Abel un critère garantissant la convergence d'une série alternée.
5. Exemple : dans cette question $\theta$ est un réel différent de $2k\pi$ pour tout $k\in\mathbb{Z}$ et $\alpha\in\mathbb{R}$.

   (a) Calculer pour $n\in\mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{ik\theta}$. On donnera une forme simplifiée dans laquelle il ne reste plus qu'une exponentielle, en facteur.

   (b) Discuter en fonction du réel $\alpha$ la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\mathrm{e}^{in\theta}}{n^\alpha}$.

## II. Application à l'étude d'une série trigonométrique

Pour tout réel $x$ et tout entier $n\geqslant 1$, on pose

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \sin(kx) \quad \text{et} \quad C_n(x) = \sum_{k=1}^{n}\cos(kx).$$

1. Calculer, pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z}$, $C_n(x) + iS_n(x)$ et en déduire que

$$\frac{1}{2} + C_n(x) = \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{2\sin\frac{x}{2}} \quad \text{et} \quad S_n(x) = \frac{\sin\left(n\frac{x}{2}\right)\sin\left((n+1)\frac{x}{2}\right)}{\sin\frac{x}{2}}.$$

2. En déduire que pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z}$, la suite $(S_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et établir la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{\sin(nx)}{n}$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.



Dans la suite, on pose $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(nx)}{n}$ pour $x\in\mathbb{R}$, et on cherche à calculer la valeur de cette somme de série.

3. Vérifier soigneusement que $f$ est impaire et $2\pi$-périodique.
4. Soit $x\in]0,\pi[$. Montrer que $\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(kx)}{k} = \frac{\pi - x}{2} - \frac{1}{2}\int_x^\pi \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t$.
5. Soit $x\in]0,\pi[$. Pour tout $t\in[x,\pi]$, on pose $h(t) = \frac{1}{\sin\frac{t}{2}}$.

   (a) En procédant à un intégration par partie, et en en majorant la valeur absolue, montrer que $\int_x^\pi h(t)\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

   (b) Montrer que pour tout $x\in]0,2\pi[$, $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$.

   (c) Tracer le graphe de $f$ sur $\mathbb{R}$.

## III. Une majoration uniforme des sommes partielles de la série précédente

On conserve les notations de la partie précédente. On note, pour tout $n\geqslant 1$, $R_n(x)$ le reste d'ordre $n$ de la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{\sin(nx)}{n}$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

6. Soit $x\in]0,2\pi[$.

   (a) Montrer, en utilisant une transformation d'Abel, que pour tout couple $(m,n)\in\mathbb{N}^2$ tel que $1\leqslant m<n$, on a $\sum_{p=m+1}^{n}\frac{\sin(px)}{p} = \frac{S_n(x)}{n} + \sum_{p=m+1}^{n-1} S_p(x)\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right) - \frac{S_m(x)}{m+1}$.

   (b) En déduire que $|R_m(x)| \leqslant \frac{2}{(m+1)\sin\frac{x}{2}}$.

7. Soit $x\in]0,\pi]$. On note $k = \left\lfloor\frac{\pi}{x}\right\rfloor$ la partie entière de $\frac{\pi}{x}$.

   (a) Montrer que $0 \leqslant \sum_{p=1}^{k}\frac{\sin px}{p} \leqslant \pi$.

   (b) Montrer que si $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $\sin\theta \geqslant \frac{2}{\pi}\theta$.

   (c) Soit $n\geqslant k+1$. Montrer que $\left|\sum_{p=k+1}^{n}\frac{\sin px}{p}\right| \leqslant 2$.

8. En déduire, pour tout $x\in\mathbb{R}$ et tout entier $n\geqslant 1$, une majoration uniforme (indépendante à la fois de $x$ et de $n$) de la somme partielle d'ordre $n$ de la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{\sin(nx)}{n}$.