ÉCOLE POLYTECHNIQUE FILIÈRE **MP**

CONCOURS D'ADMISSION 1999

DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

⋆⋆⋆

On attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

⋆⋆⋆

On se propose de démontrer quelques propriétés des nombres irrationnels et de leurs approximations par des rationnels.

On désigne par

– $\mathcal{E}$ l'ensemble des nombres réels irrationnels,
– $E(x)$ la partie entière d'un nombre réel x,
– G le groupe des matrices $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ où a, b, c, d sont des entiers relatifs et $ad - bc = \pm 1$.

La première partie est indépendante des suivantes.

Indications

4. Pour les 3/2 : admettre qu'il existe un polynôme $P \in \mathbf{Q}[X]$ tel que

$$I_x = \{Q \in \mathbf{Q}[X],\ Q(x) = 0\} = P\mathbb{K}[X].$$

Pour les 5/2 : le justifier !

5.b Un homomorphisme de groupes, c'est tout simplement un morphisme de groupes.

Première partie

Dans cette partie, on fixe un nombre réel $\alpha > 0$ et on définit deux suites de réels > 0 : (p_n), (q_n), $n \geq 0$, par les conditions

$$\begin{array}{llll} p_0 = \alpha & , \quad p_1 = \alpha^2 + 1 & , \quad p_n = \alpha\, p_{n-1} + p_{n-2} \\ q_0 = 1 & , \quad q_1 = \alpha & , \quad q_n = \alpha\, q_{n-1} + q_{n-2} \end{array}$$

pour $n \geq 2$.

1. Expliciter p_n et q_n en fonction de α.

2. Déterminer la limite λ de $r_n = p_n/q_n$ lorsque $n \to +\infty$.

3. Supposant α entier, λ peut-il être rationnel ?

Deuxième partie

On dit qu'un nombre réel irrationnel x est *algébrique* s'il annule un polynôme P de $\mathbf{Q}[X]$ de degré ≥ 2.

4. Montrer que, si x est irrationnel et algébrique, il existe un unique polynôme P de $\mathbf{Q}[X]$ irréductible, de degré ≥ 2, annulé par x et dont le coefficient du terme de plus haut degré est égal à 1.

On notera P_x ce polynôme et d_x son degré.

5.a) Vérifier que, pour tout $g \in G$ et tout $x \in \mathcal{E}$, le nombre $T_g(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ existe et appartient à $\mathcal{E}$.

b) Vérifier que l'application $g \mapsto T_g$ est un homomorphisme de G dans le groupe des permutations de $\mathcal{E}$, et déterminer son noyau.

6. Montrer que, si x est irrationnel et algébrique, $T_g(x)$ l'est aussi, et comparer d_x et $d_{T_g(x)}$.

7. On pose $x = \sqrt{m}$ où m est un entier > 0, mais n'est pas le carré d'un entier. Déterminer les nombres y de la forme $T_g(x)$, $g \in G$, dont le carré est un entier.

Troisième partie

Dans cette partie, pour tout nombre réel x, on note $A(x)$ la matrice $\begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. On fixe une suite $u = (u_n)$, $n \in \mathbf{N}$, avec $u_0 \in \mathbf{N}$ et $u_n \in \mathbf{N}^*$ pour $n > 0$. Enfin, on définit p_n et q_n par

$$\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} = A(u_0)A(u_1)\ldots A(u_n)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

8. Vérifier que l'on a

$$p_n = u_n p_{n-1} + p_{n-2} \quad , \quad q_n = u_n q_{n-1} + q_{n-2}$$

pour $n \geq 2$.

On pose $r_n = p_n/q_n$.

9. Exprimer $r_n - r_{n-1}$ en fonction de q_n et q_{n-1}.

10.a) Montrer que la suite (r_n) admet une limite qu'on notera $\lambda(u)$.

b) Montrer que $\lambda(u)$ est irrationnel.

[On pourra comparer $|\lambda(u) - r_n|$ et $1/q_n q_{n-1}$.]

c) Déterminer $\mathrm{E}(\lambda(u))$.

Quatrième partie

Pour tout réel non entier x on pose $F(x) = 1/(x - \mathrm{E}(x))$.

11. Montrer que l'itérée F^n est définie en x pour tout entier $n > 0$ si et seulement si $x \in \mathcal{E}$.

12. On considère une suite u ayant les propriétés indiquées à la troisième partie ; on définit une suite u' par $u'_n = u_{n+1}$, laquelle définit à son tour des nombres p'_n, q'_n, r'_n et $\lambda(u')$.

a) Exprimer p_n et q_n en fonction de u_0, p'_{n-1}, q'_{n-1}.

b) Comparer $\lambda(u')$ et $F(\lambda(u))$.

c) On suppose la suite u périodique. Montrer que $\lambda(u)$ est algébrique et déterminer $d_{\lambda(u)}$.

d) Même question en supposant seulement la suite u périodique à partir d'un certain rang.

Cinquième partie

13. Dans cette question, on fixe deux nombres irrationnels x et y vérifiant

$$\mathrm{E}(F^k(x)) = \mathrm{E}(F^k(y))$$

pour tout $k \geq 0$.

a) Établir l'égalité, pour $n \geq 1$

$$y - x = (-1)^n \Big(F^n(y) - F^n(x)\Big) \prod_{k=0}^{n-1} \Big[\Big(F^k(x) - \mathrm{E}(F^k(x))\Big)\Big(F^k(y) - \mathrm{E}(F^k(y))\Big)\Big].$$

b) Montrer que $x = y$.

14. Étant donné un nombre réel irrationnel x, construire une suite u vérifiant $\lambda(u) = x$, et démontrer son unicité.

* *
*