Devoir Libre 1

On veillera à présenter très clairement sa copie, et en particulier encadrer les réponses, tirer un trait entre les questions et répondre de manière concise (mais complète).

Problème : Autour de $\zeta(2)$

Le but de ce problème est d'établir par divers méthodes la convergence de $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$ (partie 1), puis de calculer de plusieurs façons différentes le nombre $\zeta(2)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ (parties 2 à 4 : il ne faudra pas utiliser la valeur de $\zeta(2)$ dans ces parties!) puis d'en voir une application (partie 5). Les différentes parties sont complètement indépendantes.

Partie 1 – Étude de la série

Les questions sont indépendantes.

1. Justifier que si $k\geqslant 2$, $\frac{1}{k^2}\leqslant\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}$, en déduire la convergence de la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ puis un majorant de $\zeta(2)$.

2. Soit $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$ et $T_n=S_n+\frac{1}{n}$. Montrer que $(S_n)_{n\geqslant 1}$ et $(T_n)_{n\geqslant 1}$ sont adjacentes et en déduire un encadrement à 10^{-1} près de $\zeta(2)$.

3. Retrouver la convergence de la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ par comparaison à une intégrale.

4. On admet[1] dans cette question que $\zeta(2)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$. Justifier la convergence des séries $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{(2n)^2}$, $\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{(2n+1)^2}$ et $\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ et calculer les valeurs exactes de leur somme.

Partie 2 – Calcul par les intégrales de Wallis

Pour tout entier $n\in\mathbb{N}$, on pose $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n}t\,\mathrm{d}t$, $\quad J_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}t^2\cos^{2n}t\,\mathrm{d}t\quad$ et $\quad K_n=\frac{4^n(n!)^2}{(2n)!}J_n$.

1. Calculer les intégrales I_0 et J_0.

2. Démontrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $I_{n+1}=\frac{2n+1}{2n+2}I_n$.

1. calculé dans les parties suivantes.

3. En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $I_n=\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}\frac{\pi}{2}$.

4. Soit $n\geqslant 1$. Montrer qu'on a la relation $I_n=n(2n-1)J_{n-1}-2n^2J_n$.

5. En déduire $K_{n-1}-K_n=\frac{\pi}{4n^2}$.

6. Démontrer la relation $\frac{\pi}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}=J_0-K_n$.

7. Montrer que pour tout $t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $t\leqslant\frac{\pi}{2}\sin t$.

8. En déduire que pour tout entier n, on a $0\leqslant J_n\leqslant\frac{\pi^2}{4}(I_n-I_{n+1})$, puis $0\leqslant J_n\leqslant\frac{\pi^2 I_n}{8(n+1)}$.

9. En déduire que pour tout entier n, on a $0\leqslant K_n\leqslant\frac{\pi^3}{16(n+1)}$.

10. En déduire la valeur de $\zeta(2)$.

Partie 3 – Calcul par des polynômes

Soit, pour $n\in\mathbb{N}^*$, $P_n=\frac{(X+\mathrm{i})^{2n+1}-(X-\mathrm{i})^{2n+1}}{2\mathrm{i}}$.

1. Montrer que P_n est un polynôme à cœfficients réels. Quels sont son degré et son cœfficient dominant ?

2. Déterminer les racines (complexes) de P_n et vérifier qu'elles sont toutes réelles. On trouvera, après simplification, qu'il s'agit des $x_k=\operatorname{cotan}\frac{k\pi}{2n+1}$ pour $k\in[\![1,2n]\!]$, où $\operatorname{cotan}=\frac{\cos}{\sin}$.

3. Montrer qu'il existe $Q_n\in\mathbb{R}[X]$ tel que $P_n=Q_n(X^2)$. Déterminer le degré d_n de Q_n, ses cœfficients de degré d_n et d_n-1, ainsi que ses racines.

4. En déduire que $S_n=\sum_{k=1}^{n}x_k^2=\sum_{k=1}^{n}\operatorname{cotan}^2\frac{k\pi}{2n+1}=\frac{n(2n-1)}{3}$ puis calculer $T_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sin^2\frac{k\pi}{2n+1}}$.

5. Montrer que pour $x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, $\sin x\leqslant x\leqslant\tan x$ et en déduire $\zeta(2)$.

Partie 4 – Calcul par le noyau de Dirichlet

Pour tout entier $n\geqslant 1$, on note D_n le **noyau de Dirichlet** défini par

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad D_n(x)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos(kx).$$

1. Linéariser, pour $k\in\mathbb{N}$ et $x\in\mathbb{R}$, $2\sin\frac{x}{2}\cos(kx)$.

2. Démontrer que pour tout entier $n\geqslant 1$ et tout réel $x\not\equiv 0[2\pi]$, on a $D_n(x)=\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{2\sin\frac{x}{2}}$.

3. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note $L_n = \int_0^{\pi} x D_n(x)\,\mathrm{d}x$. En calculant l'intégrale $\int_0^{\pi} x\cos(kx)\,\mathrm{d}x$ pour tout entier $k \geqslant 1$, montrer que $L_n = \frac{\pi^2}{4} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k^2}$.

4. On note f le prolongement par continuité en 0 de la fonction définie sur l'intervalle $]0,\pi]$ par $x \mapsto \frac{x}{\sin\frac{x}{2}}$.

4.a) Calculer $f(0)$.

4.b) Déterminer un équivalent au voisinage de 0 de $\sin x - x\cos x$.

4.c) En déduire que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle $[0,\pi]$.

5. Soit $\phi : [0,\pi] \mapsto \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,\pi]$. Démontrer, à l'aide d'une intégration par parties, que $\int_0^{\pi} \phi(x)\sin(\lambda x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow[\lambda\to+\infty]{} 0$.

6. Montrer que $L_n \to 0$ et en déduire $\zeta(2)$.

Partie 5 – Application au calcul d'une somme double

L'objectif de cette partie est de calculer la limite de la somme double

$$\lim_{M\to+\infty}\left(\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}\frac{1}{nm(n+m-1)}\right).$$

On pose pour tout entier $N \geqslant 1$, $H_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$.

1. Montrer que pour tout entier $N \geqslant 1$, $\ln(1+N) \leqslant H_N \leqslant 1 + \ln N$.

2. Montrer que pour tout entier $M \geqslant 2$, $\sum_{m=1}^{M-1} \frac{H_m}{m(m+1)} = \sum_{m=1}^{M} \frac{1}{m^2} - \frac{H_M}{M}$.

3. En déduire que la série $\sum_{m\geqslant 1} \frac{H_m}{m(m+1)}$ converge et déterminer sa limite.

4. Pour tout entier $m \geqslant 2$ et tout entier $N \geqslant 1$, on pose $Z_{N,m} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+m-1)}$.

4.a) Montrer que $Z_{N,m} = \frac{1}{m-1}\left(H_{m-1} - \sum_{n=N+1}^{N+m-1} \frac{1}{n}\right)$.

4.b) En déduire que $Z_{N,m} \xrightarrow[N\to+\infty]{} \frac{H_{m-1}}{m-1}$.

5. Montrer que pour tout $N \geqslant 1$ et tout $M \geqslant 2$, $\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}\frac{1}{nm(n+m-1)} = \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2} + \sum_{m=2}^{M}\frac{Z_{N,m}}{m}$.

6. En déduire $\lim_{M\to+\infty}\left(\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}\frac{1}{nm(n+m-1)}\right)$.

FIN DE L'ÉNONCÉ