3

Dénombrabilité, Sommabilité

I Rappels...

1 ... sur des sommes finies

- Il faut connaître $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$, $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ et $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ et savoir continuer, par télescopage de $(k+1)^n - k^n$.
- On sait aussi calculer
$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \quad \text{si} \quad x \neq 1 \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = (1+x)^n.$$
Il faut savoir en déduire $\sum_{k=0}^{n} \cos(a+kb)$, $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(a+kb)$ et des sommes semblables avec sin, ch ou sh.
- La formule $\sum_{i\in I}\left(\sum_{j\in J} a_{i,j}\right) = \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I} a_{i,j}\right)$, si I et J sont deux ensembles finis, est une conséquence de la commutativité et de l'associativité de l'addition.
Dans le cas de sommes triangulaires, l'interversion peut aussi se faire en étant prudent sur les bornes : par exemple, il faut être à l'aise avec
$$\sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=i}^{n} a_{i,j}\right) = \sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant n}\left(a_{i,j}\right) = \sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{i=0}^{j} a_{i,j}\right).$$
Si on a une hésitation, un artifice simple : posons $a_{i,j} = 0$ si $j < i$. Alors
$$\sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=i}^{n} a_{i,j}\right) = \sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{n} a_{i,j}\right) = \sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{i=0}^{n} a_{i,j}\right) = \sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{i=0}^{j} a_{i,j}\right).$$
On peut aussi représenter l'ensemble des couples (i,j) d'indexation pour « voir » ce qui se passe.
Signalons enfin la distributivité de la multiplication sur l'addition (si on est dans un anneau), qui permet d'écrire
$$\left(\sum_{i\in I} a_i\right)\left(\sum_{j\in J} b_j\right) = \sum_{i\in I}\left(\sum_{j\in J} a_i b_j\right) = \sum_{(i,j)\in I\times J} a_i b_j$$

2 ... et sur les ensembles finis

Définition 1 : Ensemble fini, cardinal

Un ensemble E est dit **fini** s'il est vide ou s'il existe un $n \in \mathbb{N}^*$ et une bijection entre $[\![1,n]\!]$ et E.

n est le **cardinal** de E, noté $|E| = \#E = \operatorname{Card} E$.

On pose $|\varnothing| = 0$.

Propriété 1 : des cardinaux

Soient E, F deux ensembles finis.

(i) Si $A \in \mathscr{P}(E)$, A fini et $|A| \leqslant |E|$, avec égalité si et seulement si $A = E$.

(ii) Si $A, B \in \mathscr{P}(E)$ disjoints ($A \cap B = \varnothing$), $|A \cup B| = |A| + |B|$.

(iii) Si $A, B \in \mathscr{P}(E)$, $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

(iv) Si $A \in \mathscr{P}(E)$, $|E \setminus A| = |E| - |A|$.

(v) si $A, B \in \mathscr{P}(E)$, $|A \setminus B| = |A| - |A \cap B|$.

(vi) $E \times F$ est fini et $|E \times F| = |E| \times |F|$.

(vii) F^E est fini et $\left|F^E\right| = |F|^{|E|}$.

(viii) $\mathscr{P}(E)$ est fini et $|\mathscr{P}(E)| = 2^{|E|}$.

(ix) $\mathfrak{S}(E)$ est fini et $|\mathfrak{S}(E)| = |E|!$.

II Ensembles dénombrables

1 Définition

Définition 2 : Ensemble dénombrable, énumération

On dit qu'un ensemble E est **dénombrable** lorsqu'il est en bijection avec (c'est-à-dire équipotent à) $\mathbb{N}$.

Une bijection $f : \mathbb{N} \to E$ est appelée **énumération** de E.

Propriété 2 : Cas des parties infinies de $\mathbb{N}$

Toute partie infinie de $\mathbb{N}$ est dénombrable.

Propriété 3 : Dénombrabilité de $\mathbb{Z}$

$\mathbb{Z}$ est dénombrable.

2 Ensembles au plus dénombrables

Définition 3 : Ensemble au plus dénombrable

Un ensemble est dit **au plus dénombrable** lorsqu'il est fini ou dénombrable.

Propriété 4 : Caractérisation

Un ensemble est au plus dénombrable si et seulement s'il est en bijection (c'est-à-dire équipotent) avec une partie de $\mathbb{N}$.

Corollaire 1 : Partie d'un ensemble dénombrable

Une partie d'un ensemble dénombrable est au plus dénombrable.

3 Produit cartésien

Propriété 5 : Dénombrabilité de $\mathbb{N}^2$

$\mathbb{N}^2$ est dénombrable.

CC BY NC SA

Propriété 6 : Produit cartésien d'ensembles dénombrables

Un produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles dénombrables est dénombrable.

En particulier, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{N}^p$ est dénombrable.

Théorème 1 : Dénombrabilité de $\mathbb{Q}$

$\mathbb{Q}$ est dénombrable.

4 Réunion d'ensembles dénombrables

Lemme 1

Soit E un ensemble non vide. Il y a équivalence entre

(i) *E est au plus dénombrable.*

(ii) *Il existe une surjection entre $\mathbb{N}$ et E*

(iii) *Il existe une injection entre E et $\mathbb{N}$*

Propriété 7 : Réunion au plus dénombrable d'ensembles au plus dénombrables

Une réunion au plus dénombrable d'ensembles au plus dénombrables l'est encore.

5 Ensembles non dénombrables

Théorème 2 : Non dénombrabilité de $\mathbb{R}$

$\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

Théorème 3 : de Cantor (HP)

Si E est un ensemble non vide, il n'existe pas de surjection de E dans $\mathscr{P}(E)$.

En particulier, $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable.

Corollaire 2 : Non dénombrabilité de $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ (HP)

$\mathscr{P}(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable.

III Sommabilité

1 Familles de réels positifs

a Calculs dans $[0,+\infty]$

Définition 4 : Opération et ordre dans $[0,+\infty]$

On note $[0,+\infty] = [0,+\infty[\cup\{+\infty\} = \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$.

On étend les lois $+$, $\times$ ainsi que l'ordre $\leqslant$ de la manière suivante : si $a \in [0,+\infty[$,

- $a+(+\infty) = (+\infty)+a = (+\infty)+(+\infty) = +\infty$.
- Si $a > 0$, $a\times(+\infty) = (+\infty)\times a = (+\infty)\times(+\infty) = +\infty$.
- $a < +\infty$ et $+\infty \leqslant +\infty$.

Enfin, on appelle **borne supérieure** d'une partie A non vide de $[0,+\infty]$ le plus petit des majorants de A dans $[0,+\infty]$.

Propriété 8 : Détermination de la borne supérieure

Si $A \subset \mathbb{R}$ est majorée dans $\mathbb{R}$, c'est le $\sup_{\mathbb{R}} A$ dans $\mathbb{R}$ que l'on connaît bien.

Si $A \subset \mathbb{R}$ non majorée dans $\mathbb{R}$ ou si A contient $+\infty$, alors $\sup A = +\infty$.

b Sommes de familles de réels positifs

Définition 5 : Sommes de familles de réels positifs

Soit I ensemble quelconque (fini ou infini, éventuellement non dénombrable). On note ici $\mathscr{P}_f(I)$ l'ensemble des parties finies de I.

Soit $(u_i)_{i\in I} \in (\mathbb{R}^+)^I$ une famille de **réels positifs** indexée par I.

On appelle **somme** de la famille, notée $\sum_{i\in I} u_i$ la borne supérieure dans $[0,+\infty]$ de $A = \left\{\sum_{i\in J} u_i,\ J \in \mathscr{P}_f(I)\right\}$:

$$\sum_{i\in I} u_i = \sup_{J\in\mathscr{P}_f(I)} \left(\sum_{i\in J} u_i\right) \in [0,+\infty].$$

Propriété 9 : Cas des sommes finies

*On suppose que $I = \{i_1,\dots,i_p\}$ est fini. Alors la somme de **réels positifs** définie précédemment est bien égale à $\sum_{k=1}^{p} u_{i_k}$, le $\sup$ étant ici fini (c'est même un $\max$).*

Propriété 10 : Cas des séries

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}}$ *une famille de* ***réels positifs****. Alors le nombre* $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n \in [0,+\infty]$ *défini précédemment est égal à* $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ *si la série est convergente, et* $+\infty$ *sinon.*

On se permet donc d'utiliser les deux notations indifféremment, et de noter $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = +\infty$ *lorsque la série est divergente.*

Propriété 11 : Comparaison

- *Si pour tout* $i \in I$, $0 \leqslant a_i \leqslant b_i$

$$\sum_{i\in I} a_i \leqslant \sum_{i\in I} b_i$$

dans $[0,+\infty]$.

En particulier, si $\sum_{i\in I} b_i < +\infty$, *alors* $\sum_{i\in I} a_i < +\infty$.

- *Si* $I' \subset I$,

$$\sum_{i\in I'} a_i \leqslant \sum_{i\in I} a_i$$

dans $[0,+\infty]$.

c Sommabilité dans le cas positif

Définition 6 : Famille sommable de réels positifs

Soit I un ensemble, $(u_i)_{i\in I}$ une famille de **réels positifs**.

On dit que $(u_i)_{i\in I}$ est **sommable** lorsque $\sum_{i\in I} u_i < +\infty$.

Propriété 12 : Dénombrabilité de l'ensemble d'indice

Si $(u_i)_{i\in I}$ *une famille sommable de réels positifs, alors* $\{i \in I,\ u_i \neq 0\}$ *est au plus dénombrable.*

d Invariance par permutation

Propriété 13 : Invariance par permutation – cas positif

Soit $(u_i)_{i\in I}$ *une famille de* ***réels positifs****. Soit* $\sigma \in \mathfrak{S}(I)$ *une permutation de* I*. Alors*

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{i\in I} u_{\sigma(i)}$$

dans $[0,+\infty]$.

Propriété 14 : Cas dénombrable : écriture sous forme de série

Soit $(u_i)_{i\in I}$ *une famille de* ***réels positifs****,* I *étant* ***dénombrable****.*

Soit $n \mapsto i_n$ *une bijection de* $\mathbb{N}$ *sur* I *(ie une énumération de* I*). Alors*

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{i_n}$$

dans $[0,+\infty]$.

Corollaire 3 : Invariance par permutation d'une série à termes positifs

Si $\sum a_n$ *est une série à termes réels positifs et* $\sigma \in \mathfrak{S}(\mathbb{N})$, *alors* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *dans* $[0,+\infty]$.

e Linéarité

Lemme 2 : Utilisable directement

Si A *est une partie non vide de* $\mathbb{R}$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}^+$, *alors* $\sup(\lambda A) = \lambda \sup(A)$.

Cela reste valable dans $[0,+\infty]$ *en posant* $0 \times (+\infty) = 0$.

Propriété 15 : Linéarité – cas positif

Si I *est un ensemble quelconque,* $a = (a_i)_{i\in I}$ *et* $b = (b_i)_{i\in I}$ *des familles de réels positifs,* $\lambda \in \mathbb{R}^+$.

Alors $\sum_{i\in I} (a_i + \lambda b_i) = \sum_{i\in I} a_i + \lambda \sum_{i\in I} b_i$ *dans* $[0,+\infty]$.

(Ici, on pose $0 \times (+\infty) = 0$.*)*

f Sommation par paquets

Théorème 4 : sommation par paquets – cas positif

Soit I *un ensemble quelconque, réunion disjointe des* I_j *pour* $j \in J$: $k \neq \ell \Longrightarrow I_k \cap I_\ell = \varnothing$ *et* $\bigcup_{j\in J} I_j = I$ *(presque une partition : il peut y avoir des* I_j *vides. On parle de recouvrement disjoint.)*

Soit $(u_i)_{i\in I}$ *une famille de* ***réels positifs****. Alors*

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{j\in J} \left(\sum_{i\in I_j} u_i \right).$$

g Théorème de Fubini positif

Théorème 5 : de Fubini – cas positif

Soit $(u_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ une famille de réels positifs. Alors

$$\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} u_{m,n} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{m=0}^{+\infty} u_{m,n}\right) = \sum_{m=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_{m,n}\right)$$

toujours dans $[0,+\infty]$.

h Cas particulier : suites doubles produits

Propriété 16 : Sommes doubles produits, cas positif

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels positifs. Alors, dans $[0,+\infty]$,

$$\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} u_m v_n = \left(\sum_{m=0}^{+\infty} u_m\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right).$$

(avec $0\times(+\infty)=0$.)

Le résultat s'étend à un produit d'un nombre quelconque (mais fini) de termes.

2 Familles de réels quelconques ou de complexes

Différence majeure avec ce qui précède : on va devoir commencer par prouver la sommabilité avant d'utiliser les théorèmes, qui, parfois, la donnent aussi comme conclusion.

a Définition, somme

Définition 7 : Famille sommable

Soit I un ensemble quelconque et $(u_i)_{i\in I}\in\mathbb{C}^I$.

On dit que la famille $(u_i)_{i\in I}$ est **sommable** lorsque la famille de réels positifs $(|u_i|)_{i\in I}$ l'est. Autrement dit

$$(u_i)_{i\in I} \text{ est sommable} \iff \sum_{i\in I}|u_i| < +\infty$$

Propriété 17 : Condition de sommabilité, cas réel

Soit I un ensemble quelconque et $(u_i)_{i\in I}\in\mathbb{R}^I$.

Si la famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable, alors les deux familles $\left(u_i^+\right)_{i\in I}\in\mathbb{R}^I$ et $\left(u_i^-\right)_{i\in I}\in\mathbb{R}^I$ le sont.

Définition 8 : Somme dans le cas réel

Soit I un ensemble quelconque et $(u_i)_{i\in I}\in\mathbb{R}^I$ une famille sommable.

On définit la **somme**

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{i\in I} u_i^+ - \sum_{i\in I} u_i^-.$$

Propriété 18 : Condition de sommabilité, cas complexe

Soit I un ensemble quelconque et $(u_i)_{i\in I}\in\mathbb{C}^I$.

Si la famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable, alors les deux familles $(\mathfrak{Re}(u_i))_{i\in I}\in\mathbb{R}^I$ et $(\mathfrak{Im}(u_i))_{i\in I}\in\mathbb{R}^I$ le sont.

Définition 9 : Somme dans le cas complexe

Soit I un ensemble quelconque et $(u_j)_{j\in I}\in\mathbb{C}^I$ une famille sommable.

Si la famille $(u_j)_{j\in I}$ est sommable, les deux familles $\left(\mathfrak{Re}(u_j)\right)_{j\in I}\in\mathbb{R}^I$ et $\left(\mathfrak{Im}(u_j)\right)_{j\in I}\in\mathbb{R}^I$ le sont.

Cela permet de définir la somme

$$\sum_{j\in I} u_j = \sum_{j\in I}\mathfrak{Re}(u_j) + \mathrm{i}\sum_{j\in I}\mathfrak{Im}(u_j).$$

Notation 1 : Ensemble $\ell^1(I)$

On note $\ell^1(I)$ l'ensemble des familles **sommables** de réels ou complexes indexées par un ensemble quelconque I. On précise parfois $\ell^1(I,\mathbb{R})$ ou $\ell^1(I,\mathbb{C})$.

Propriété 19 : Cas des séries

*La famille $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de nombres réels ou complexes est sommable si et seulement si la série $\sum u_i$ est **absolument** convergente.*

Sa somme est alors la somme de la série $\sum u_i$.

Lemme 3

Si $(u_i)_{i\in I}$ est sommable, pour tout $\varepsilon>0$, il existe une partie finie J de I telle que

$$\left|\sum_{i\in J} u_i - \sum_{i\in I} u_i\right| \leqslant \varepsilon$$

Propriété 20 : Sommabilité par comparaison

*Soit I un ensemble quelconque, $(u_i)_{i\in I}$ une famille de nombres réels ou complexes et $(v_i)_{i\in I}$ une famille de **réels positifs** vérifiant*

$$\forall i\in I,\quad |u_i|\leqslant v_i.$$

Alors $(u_i)_{i\in I}$ est sommable.

b Invariance par permutation

Propriété 21 : Invariance par permutation

*Soit I est un ensemble quelconque et $(u_i)_{i\in I}$ une famille **sommable** de nombres réels ou complexes.*

Soit $\sigma\in\mathfrak{S}(I)$ une permutation de I.

Alors $(u_{\sigma(i)})_{i\in I}$ est sommable, et $\sum_{i\in I} u_i = \sum_{i\in I} u_{\sigma(i)}$.

Propriété 22 : Cas dénombrable : écriture sous forme de série

Soit I est un ensemble ***dénombrable*** *et $(u_i)_{i\in I}$ une famille de nombres réels ou complexes , $k \mapsto i_k$ une bijection de $\mathbb{N}$ sur I.*

La famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement si $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} u_{i_k}$ est ***absolument convergente****, et le cas échéant, on a*

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{k=0}^{+\infty} u_{i_k}.$$

Corollaire 4 : Invariance par permutation d'une série absolument convergente

Si $\sum a_n$ est une série ***absolument*** *convergente à termes réels ou complexes et $\sigma \in \mathfrak{S}(\mathbb{N})$, alors la série $\sum a_{\sigma(n)}$* ***converge absolument*** *et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_{\sigma(n)} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$.*

c Linéarité

Propriété 23 : Linéarité, cas général

Si I est un ensemble quelconque, si $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_i)_{i\in I}$ sont deux familles sommables d'éléments de $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), si $\lambda \in \mathbb{K}$, la famille $(u_i + \lambda v_i)_{i\in I}$ est sommable, et

$$\sum_{i\in I}(u_i + \lambda v_i) = \sum_{i\in I} u_i + \lambda \sum_{i\in I} v_i$$

Ainsi, $\ell^1(I)$ a une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

d Sommation par paquets

Théorème 6 : sommation par paquets

Soit I un ensemble quelconque, $(I_j)_{j\in J}$ un recouvrement disjoint de I :

$$p \neq q \Rightarrow I_p \cap I_q = \varnothing \quad \text{et} \quad \bigcup_{j\in J} I_j = I$$

On suppose que

H1 *la famille $(u_i)_{i\in I}$ une famille de nombres réels ou complexes* ***sommable***

alors

C1 *Pour tout n, $(u_i)_{i\in I_n}$ est sommable.*

C2 $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum\limits_{i\in I_n} u_i \right)$ *converge.*

C3 $\sum\limits_{i\in I} u_i = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left(\sum\limits_{i\in I_n} u_i \right)$.

Propriété 24 : Cas où $I = \mathbb{Z}$

La famille $(u_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ de nombres réels ou complexes est sommable si et seulement si les séries $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} u_{-n}$ sont ***absolument*** *convergentes.*

Le cas échéant, $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} u_n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_{-n}$.

e Théorème de Fubini

Théorème 7 : de Fubini

Soit $(a_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ une famille de réels ou de complexes.

Si

H1 *$(a_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ est* ***sommable*** *(c'est-à-dire si $(|a_{m,n}|)_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ l'est, par exemple avec le théorème de Fubini précédent)*

alors

$$\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} a_{m,n} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{m=0}^{+\infty} a_{m,n}\right) = \sum_{m=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_{m,n}\right).$$

f Cas particulier : suites doubles produits

Propriété 25 : Sommes doubles produits

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels ou complexes.

Alors la suite double $(u_m v_n)_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable si et seulement si (soit l'une des suites est nulle, soit les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont ***absolument*** *convergentes).*

Lorsque la dernière condition est vérifiée, on a en outre

$$\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} u_m v_n = \left(\sum_{m=0}^{+\infty} u_m\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right).$$

Le résultat s'étend à un produit d'un nombre quelconque (mais fini) de termes.

g Produit de Cauchy

Propriété 26 : Produit de Cauchy

H1 *Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries réelles ou complexes* ***absolument convergentes****.*

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$. Alors

C1 *$\sum w_n$ est absolument convergente.*

C2 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n\right)$.

Propriété 27 : Exponentielle complexe

Si $z, z' \in \mathbb{C}$, $\exp(z + z') = \exp z \times \exp z'$.