# 3

# Dénombrabilité, Sommabilité

*Extrait du programme officiel* :

| Contenus | Capacités & commentaires |
|---|---|
| **Ensembles dénombrables** | |
| Un ensemble est dit dénombrable s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$. | Les parties infinies de $\mathbb{N}$ sont dénombrables. |
| Un ensemble est fini ou dénombrable si et seulement s'il est en bijection avec une partie de $\mathbb{N}$. | Un tel ensemble est dit au plus dénombrable. |
| Un produit cartésien fini d'ensembles dénombrables est dénombrable. Une réunion finie ou dénombrable d'ensembles finis ou dénombrables est finie ou dénombrable. | Les démonstrations ne sont pas exigibles.<br>Les ensembles $\mathbb{N}^p$ $(p \in \mathbb{N}^*)$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ sont dénombrables. Le support d'une famille sommable de nombres complexes est dénombrable. |
| L'ensemble $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable. | La démonstration n'est pas exigible. |
| **Familles sommables de nombres réels positifs (MP2I)** | |
| Convention de calcul et relation d'ordre dans $[0,+\infty]$. Borne supérieure dans $[0,+\infty]$. | |
| Somme d'une famille $(u_i)_{i\in I}$ d'éléments de $[0,+\infty]$, définie comme borne supérieure dans $[0,+\infty]$ de l'ensemble des sommes $\sum\limits_{i\in F} u_i$ quand $F$ décrit l'ensemble des parties finies de $I$. | La somme est notée $\sum\limits_{i\in I} u_i$.<br>Cas où $I$ est fini, où $I=\mathbb{N}$ (lien avec les séries). On note $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n = +\infty$ si la série $\sum u_n$ d'éléments de $\mathbb{R}^+$ diverge.<br>Invariance de la somme par permutation. |
| La famille $(u_i)_{i\in I}$ d'éléments de $\mathbb{R}^+$ est dite sommable si $\sum\limits_{i\in I} u_i < +\infty$. | On souligne que les calculs sont justifiés par la seule positivité et qu'ils fournissent un moyen d'étudier la sommabilité. |
| Opérations : somme, multiplication par un réel positif. | |
| Théorème de sommation par paquets : si $I$ est réunion disjointe des $I_j$ pour $j \in J$ et si $(u_i)_{i\in I}$ est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, alors $\sum\limits_{j\in J}\Big(\sum\limits_{i\in I_j} u_i\Big) = \sum\limits_{i\in I} u_i$.<br>Cas où $I$ est un produit : théorème de Fubini positif. | La démonstration est hors programme. |
| **Familles sommables de nombres complexes (MP2I)** | |
| La famille $(u_i)_{i\in I}$ de $\mathbb{C}^I$ est dite sommable si $\sum\limits_{i\in I} \lvert u_i\rvert < +\infty$. | Notation $\ell^1(I)$.<br>Pour $I=\mathbb{N}$, lien avec les séries.<br>Sommabilité d'une sous-famille d'une famille sommable. |
| Somme d'une famille sommable de nombres complexes. | Si $(a_i)_{i\in I}$ est sommable et si $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$, il existe une partie finie $F$ de $I$ telle que $\Big\lvert \sum\limits_{i\in I} a_i - \sum\limits_{i\in F} a_i \Big\rvert \leqslant \varepsilon$.<br>Invariance de la somme par permutation. |
| Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de nombres complexes et soit $(v_i)$ une famille sommable de réels positifs vérifiant, pour tout $i\in I$, $\lvert u_i\rvert \leqslant v_i$. Alors $(u_i)_{i\in I}$ est sommable. | |
| Linéarité de la somme. | |
| Théorème de sommation par paquets : si $I$ est réunion disjointe des $I_j$ pour $j\in J$, si $(u_i)_{i\in I}$ est sommable, alors $\sum\limits_{j\in J}\Big(\sum\limits_{i\in I_j} u_i\Big) = \sum\limits_{i\in I} u_i$.<br>Cas où $I$ est un produit : théorème de Fubini. | La démonstration est hors programme. |
| Si $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_{i'})_{i'\in I'}$ sont sommables alors $(a_i b_{i'})_{(i,i')\in I\times I'}$ est sommable et $$\sum_{(i,i')\in I\times I'} a_i b_{i'} = \sum_{i\in I} a_i \times \sum_{i'\in I'} b_{i'}.$$ | Extension, sans rédaction de la démonstration, au produit d'un nombre fini de familles sommables. |
| Produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes. | On retrouve le fait que l'exponentielle complexe est un morphisme de $(\mathbb{C},+)$ dans $(\mathbb{C}^*,\times)$. |

# Table des matières



# I Rappels...

## 1 ... sur des sommes finies

- Il faut connaître $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$, $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ et $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ et savoir continuer, par télescopage de $(k+1)^n - k^n$.
- On sait aussi calculer $\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ si $x \neq 1$ et $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = (1+x)^n$.

  Il faut savoir en déduire $\sum_{k=0}^{n} \cos(a+kb)$, $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(a+kb)$ et des sommes semblables avec $\sin$, $\mathrm{ch}$ ou $\mathrm{sh}$.

- La formule $\sum_{i\in I}\left(\sum_{j\in J} a_{i,j}\right)=\sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I} a_{i,j}\right)$, si $I$ et $J$ sont deux ensembles finis, est une conséquence de la commutativité et de l'associativité de l'addition.
  Dans le cas de sommes triangulaires, l'interversion peut aussi se faire en étant prudent sur les bornes : par exemple, il faut être à l'aise avec
  $$\sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=i}^{n} a_{i,j}\right)=\sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant n}\left(a_{i,j}\right)=\sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{i=0}^{j} a_{i,j}\right).$$
  Si on a une hésitation, un artifice simple : posons $a_{i,j}=0$ si $j<i$. Alors
  $$\sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=i}^{n} a_{i,j}\right)=\sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{n} a_{i,j}\right)=\sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{i=0}^{n} a_{i,j}\right)=\sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{i=0}^{j} a_{i,j}\right).$$
  On peut aussi représenter l'ensemble des couples $(i,j)$ d'indexation pour « voir » ce qui se passe.
  Signalons enfin la distributivité de la multiplication sur l'addition (si on est dans un anneau), qui permet d'écrire
  $$\left(\sum_{i\in I} a_i\right)\left(\sum_{j\in J} b_j\right)=\sum_{i\in I}\left(\sum_{j\in J} a_i b_j\right)=\sum_{(i,j)\in I\times J} a_i b_j$$

## 2 ... et sur les ensembles finis

**Définition 1 : Ensemble fini, cardinal**

Un ensemble $E$ est dit **fini** s'il est vide ou s'il existe un $n\in\mathbb{N}^*$ et une bijection entre $[\![1,n]\!]$ et $E$.
$n$ est le **cardinal** de $E$, noté $|E|=\#E=\operatorname{Card}E$.
On pose $|\varnothing|=0$.

**Remarque**

**R 1 –** On dit aussi que $E$ est équipotent à $[\![1,n]\!]$.
Cela revient à numéroter les éléments de $E$ : $E=\{x_k, k\in[\![1,n]\!]\}$.

**Propriété 1 : des cardinaux**

*Soient $E$, $F$ deux ensembles finis.*

(i) *Si $A\in\mathscr{P}(E)$, $A$ fini et $|A|\leqslant|E|$, avec égalité si et seulement si $A=E$.*
(ii) *Si $A,B\in\mathscr{P}(E)$ disjoints $(A\cap B=\varnothing)$, $|A\cup B|=|A|+|B|$.*
(iii) *Si $A,B\in\mathscr{P}(E)$, $|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$.*
(iv) *Si $A\in\mathscr{P}(E)$, $|E\setminus A|=|E|-|A|$.*
(v) *si $A,B\in\mathscr{P}(E)$, $|A\setminus B|=|A|-|A\cap B|$.*
(vi) *$E\times F$ est fini et $|E\times F|=|E|\times|F|$.*
(vii) *$F^E$ est fini et $\left|F^E\right|=|F|^{|E|}$.*
(viii) *$\mathscr{P}(E)$ est fini et $|\mathscr{P}(E)|=2^{|E|}$.*
(ix) *$\mathfrak{S}(E)$ est fini et $|\mathfrak{S}(E)|=|E|!$.*

**Exercice 1 : CCINP 112**

**Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $E$ un ensemble possédant $n$ éléments.**
**On désigne par $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble des parties de $E$.**

1. **Déterminer le nombre $a$ de couples $(A,B)\in(\mathscr{P}(E))^2$ tels que $A\subset B$.**
2. **Déterminer le nombre $b$ de couples $(A,B)\in(\mathscr{P}(E))^2$ tels que $A\cap B=\varnothing$.**
3. **Déterminer le nombre $c$ de triplets $(A,B,C)\in(\mathscr{P}(E))^3$ tels que $A$, $B$ et $C$ soient deux à deux disjoints et vérifient $A\cup B\cup C=E$.**

1. On note $F = \{(A,B) \in (\mathscr{P}(E))^2 \ / \ A \subset B\}$.
   Soit $p \in [\![1,n]\!]$. On pose $F_p = \{(A,B) \in (\mathscr{P}(E))^2 \ / \ A \subset B \text{ et } \operatorname{card} B = p\}$.

   Pour une partie $B$ à $p$ éléments donnée, le nombre de parties $A$ de $E$ telles que $A \subset B$ est $\operatorname{card} \mathscr{P}(B) = 2^p$.
   De plus, on a $\binom{n}{p}$ possibilités pour choisir une partie $B$ de $E$ à $p$ éléments.
   On en déduit que : $\forall p \in [\![0,n]\!]$, $\operatorname{card} F_p = \binom{n}{p} 2^p$.
   Or $F = \bigcup_{p=0}^{n} F_p$ avec $F_0, F_1, \dots, F_n$ deux à deux disjoints.

   Donc $a = \operatorname{card} F = \sum_{p=0}^{n} \operatorname{card} F_p = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} 2^p = 3^n$, d'après le binôme de Newton.
   Conclusion : $a = 3^n$.

   **Autre méthode :**

   Le raisonnement suivant (corrigé non détaillé) permet également de répondre à la question 1.
   Notons encore $F = \{(A,B) \in (\mathscr{P}(E))^2 \ / \ A \subset B\}$.
   À tout couple $(A,B)$ de $F$, on peut associer l'application $\varphi_{A,B}$ définie par :

   $$\varphi_{A,B} : \begin{array}{ccl} E & \longrightarrow & \{1,2,3\} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in A \\ 2 & \text{si} \quad x \notin A \text{ et } x \in B \\ 3 & \text{si} \quad x \notin B \end{cases} \end{array}$$

   On note $\mathscr{A}(E,\{1,2,3\})$ l'ensemble des applications de $E$ dans $\{1,2,3\}$.

   Alors l'application $\Theta : \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & \mathscr{A}(E,\{1,2,3\}) \\ (A,B) & \longmapsto & \varphi_{A,B} \end{array}$ est bijective.

   Le résultat en découle.
2. $\{(A,B) \in (\mathscr{P}(E))^2 \ / \ A \cap B = \varnothing\} = \left\{(A,B) \in (\mathscr{P}(E))^2 \ / \ A \subset \overline{B}\right\}$.

   $$\begin{aligned} \text{Or card} \left\{(A,B) \in (\mathscr{P}(E))^2 \ / \ A \subset \overline{B}\right\} &= \text{card} \left\{(A,\overline{B}) \in (\mathscr{P}(E))^2 \ / \ A \subset \overline{B}\right\} \\ &= \text{card} \left\{(A,C) \in (\mathscr{P}(E))^2 \ / \ A \subset C\right\} \\ &= a. \end{aligned}$$

   Donc $b = a$.
3. Compter tous les triplets $(A,B,C)$ tels que $A$, $B$ et $C$ soient deux à deux disjoints et tels que $A \cup B \cup C = E$ revient à compter tous les couples $(A,B)$ tels que $A \cap B = \varnothing$ car, alors, $C$ est obligatoirement égal à $\overline{A \cup B}$.
   En d'autres termes, $c = \operatorname{card} \{(A,B) \in (\mathscr{P}(E))^2 \ / \ A \cap B = \varnothing\} = b = 3^n$.

# II Ensembles dénombrables

## 1 Définition

**Définition 2 : Ensemble dénombrable, énumération**

On dit qu'un ensemble $E$ est **dénombrable** lorsqu'il est en bijection avec (c'est-à-dire équipotent à) $\mathbb{N}$.

Une bijection $f : \mathbb{N} \to E$ est appelée **énumération** de $E$.

**Remarque**

**R2 –** On peut compter ses éléments... sans s'arrêter !
Il a en quelques sortes autant d'éléments que $\mathbb{N}$.

On peut écrire $E = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$.
Trouver une bijection entre $E$ et $\mathbb{N}$, ou entre $\mathbb{N}$ et $E$, cela revient au même.

**Exemple**

**E 1 –** $\mathbb{N}$ est dénombrable.

**E 2 –** $2\mathbb{N}$ est dénombrable.

**E 3 –** $2\mathbb{N}+1$ est dénombrable.

**Propriété 2 : Cas des parties infinies de $\mathbb{N}$**

*Toute partie infinie de $\mathbb{N}$ est dénombrable.*

**Démonstration**

Soit $A$ une telle partie.
On construit par récurrence une application $\phi : \mathbb{N} \to A$ tel que $\phi(0) = \min A$ (qui existe bien) et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\phi(n+1) = \min\left(A \cap [\phi(n)+1, +\infty[\right)$ (qui existe toujours car $A$ est infinie).
$\phi$ est injective par stricte croissance.
De plus, $\phi(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \infty$, donc pour tout $p \in A$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\phi(n) \leqslant p < \phi(n+1)$ : il s'agit de $n = \max\left\{k \in \mathbb{N}, \phi(k) \leqslant p\right\}$.
Et donc, nécessairement, $p = \phi(n)$ par construction de $\phi$.. ■

**Exemple**

**E 4 –** On retrouve la dénombrabilité de $2\mathbb{N}$ et $2\mathbb{N}+1$.

**Propriété 3 : Dénombrabilité de $\mathbb{Z}$**

*$\mathbb{Z}$ est dénombrable.*

**Démonstration**

Il suffit de construire une énumération de $\mathbb{Z}$ en numérotant alternativement les positifs et les négatifs. ■

## 2 Ensembles au plus dénombrables

**Définition 3 : Ensemble au plus dénombrable**

Un ensemble est dit **au plus dénombrable** lorsqu'il est fini ou dénombrable.

**Propriété 4 : Caractérisation**

*Un ensemble est au plus dénombrable si et seulement s'il est en bijection (c'est-à-dire équipotent) avec une partie de $\mathbb{N}$.*

**Démonstration**

Le sens direct découle des définitions de fini et de dénombrable.
Pour la réciproque, ce n'est pas très difficile non plus, en distinguant les cas où la partie de $\mathbb{N}$ est finie ou non. ■

**Corollaire 1 : Partie d'un ensemble dénombrable**

*Une partie d'un ensemble dénombrable est au plus dénombrable.*

**Démonstration**

Si $A$ partie de $E$ est dénombrable et $f : E \to \mathbb{N}$ une bijection, alors $f(A)$ est une partie de $\mathbb{N}$ équipotente à $A$. ■

## 3 Produit cartésien

**Propriété 5 : Dénombrabilité de $\mathbb{N}^2$**

*$\mathbb{N}^2$ est dénombrable.*

**Démonstration**

Pour $\mathbb{N}^2$ une preuve géométrique, et une avec $(m,n) \in \mathbb{N}^2 \mapsto 2^m(2n+1) \in \mathbb{N}^*$. ■

**Propriété 6 : Produit cartésien d'ensembles dénombrables**

*Un produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles dénombrables est dénombrable.*
*En particulier, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{N}^p$ est dénombrable.*

**Démonstration**

On détaille $p = 2$ en passant par $\mathbb{N}^2$ puis récurrence. ■

**Théorème 1 : Dénombrabilité de $\mathbb{Q}$**

*$\mathbb{Q}$ est dénombrable.*

**Démonstration**

Il est équipotent à la partie infinie des couples $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tels que $p \wedge q = 1$ de $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ qui est dénombrable vu la propriété précédente. ■

## 4 Réunion d'ensembles dénombrables

On commence par le lemme très intuitif suivant :

**Lemme 1**

*Soit $E$ un ensemble non vide. Il y a équivalence entre*

(i) *$E$ est au plus dénombrable.*

(ii) *Il existe une surjection entre $\mathbb{N}$ et $E$*

(iii) *Il existe une injection entre $E$ et $\mathbb{N}$*

**Démonstration : du lemme**

$(i) \Rightarrow (ii)$ et $(iii)$ Si $E$ est dénombrable, il existe une bijection entre $\mathbb{N}$ et $E$ donc une surjection entre $\mathbb{N}$ et $E$ et une injection entre $E$ et $\mathbb{N}$.
Si $E$ est fini, $n = |E|$, il existe une bijection $f$ de $[\![1,n]\!]$ vers $E$. N'importe quel prolongement de $f$ (au départ) à $\mathbb{N}$ est une surjection entre $\mathbb{N}$ et $E$ et le prolongement de $f^{-1}$ à l'arrivée à $\mathbb{N}$ est une injection entre $E$ et $\mathbb{N}$.

$(ii) \Rightarrow (i)$ S'il existe $f : \mathbb{N} \to E$ fonction surjective, Soit la fonction pour chaque $x \in E$, on considère $n(x)$ le plus petit antécédent de $x$ par $f$. Alors la restriction de $f$ à la partie $\{n(x),\ x \in E\}$ de $\mathbb{N}$ est bijective. Donc $E$ est au plus dénombrable.

$(iii) \Rightarrow (i)$ S'il existe $g : E \to \mathbb{N}$ fonction injective, alors $E$ est équipotent à $g(E)$ partie de $\mathbb{N}$ donc $E$ est au plus dénombrable. ■

**Exemple**

**E 5 –** On retrouve la dénombrabilité de $\mathbb{Q}$ grâce à la surjection $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \mapsto \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ avec $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ dénombrable.

**Propriété 7 : Réunion au plus dénombrable d'ensembles au plus dénombrables**

*Une réunion au plus dénombrable d'ensembles au plus dénombrables l'est encore.*

**Démonstration : de la propriété**

Soit $I$ fini ou dénombrable et $(E_i)_{i \in I}$ famille d'ensembles finis ou dénombrables.
On a alors des applications $f_i : \mathbb{N} \to E_i$ surjectives pour chaque $i \in I$.

Alors $f : \left| \begin{array}{ccc} I \times \mathbb{N} & \longrightarrow & \displaystyle\bigcup_{i \in I} E_i \\ (i,n) & \longmapsto & f_i(n) \end{array} \right.$ est surjective. Comme $I \times \mathbb{N}$ est dénombrable (partie infinie d'un ensemble dénombrable), on obtient par composition une surjection entre $\mathbb{N}$ et $\displaystyle\bigcup_{i \in I} E_i$ qui est au plus dénombrable. ■

**Exemple**

**E 6 –** On retrouve la dénombrabilité de $\mathbb{Q} = \displaystyle\bigcup_{(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*} \left\{\frac{p}{q}\right\}$ avec $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ dénombrable et chaque $\left\{\dfrac{p}{q}\right\}$ fini.

Ou encore $\mathbb{Q} = \displaystyle\bigcup_{q \in \mathbb{N}^*} \left\{\frac{p}{q},\ p \in \mathbb{Z}\right\}$.

**Exercice 2 : Montrer qu'un ensemble $E$ est au plus dénombrable si et seulement s'il existe une famille $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de parties finies telles que $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$, qu'on peut supposer croissante.**

On peut supposer la suite croissante quitte à remplacer $E_n$ par $\displaystyle\bigcup_{k=0}^{n} E_k$.

On a déjà que si $E = \displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$, alors $E$ est au plus dénombrable d'après ce qui précède.

Si, réciproquement, $E$ est au plus dénombrable.

- Soit $E$ est fini et il suffit de prendre pour tout $n \in \mathbb{N}$, $E_n = E$.
- Soit $E$ est dénombrable, et $f$ une énumération de $E$, il suffit de prendre $E_n = f\left([\![0,n]\!]\right)$.

# 5 Ensembles non dénombrables

**Remarque : Rappel**

**R 3 –** Tout nombre réel non décimal admet un unique développement décimal.
Les décimaux en ont deux. Par exemple $3{,}1416 = 3{,}141599999...$
Tout réel admet un unique développement décimal ne se terminant pas par une infinité de $9$ appelé développement décimal propre.

**Théorème 2 : Non dénombrabilité de $\mathbb{R}$**

*$\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.*

**Démonstration**

Procédé diagonal de Cantor pour $]0,1[$ : en énumérant $]0,1[$ par $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, on définit un nombre $x$ par son développement décimal avec une partie entière nulle et la $n^e$ décimale valant $1$ si celle de $x_n$ vaut $2$ et $2$ sinon. ce développement décimal illimité est unique (pas de $0$ ni de $9$) donc $x \in ]0,1[$ n'est égal à aucun des $x_n$ ce qui est contradictoire.

Reste à voir $]0,1[$ comme partie infinie de $\mathbb{R}$ pour conclure sa dénombrabilité. On peut aussi exhiber une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0,1[$, par exemple $\dfrac{2\operatorname{Arctan}+\pi}{2\pi}$.

Autre preuve : on se donne $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dénombrant $[0,1]$ et on construit par trichotomie une suite de segments emboîtés $(I_n)$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \notin I_n$. Les suites des bornes des segments sont adjacentes, donc il y a un élément de $[0,1]$ qui est dans tous les $I_n$ (la limite), ce qui est contradictoire. ■

**Remarque**

**R 4 –** $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ n'est pas dénombrable non plus, sinon $\mathbb{R}$ le serait.

**Théorème 3 : de Cantor (HP)**

*Si $E$ est un ensemble non vide, il n'existe pas de surjection de $E$ dans $\mathscr{P}(E)$.*

**Démonstration**

Si $f : E \to \mathscr{P}(E)$, $\{x \in E,\ x \notin f(x)\}$ n'a pas d'antécédent. ■

**Corollaire 2 : Non dénombrabilité de $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ (HP)**

*$\mathscr{P}(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable.*

**Exercice 3**

**Les ensembles $\mathbb{N}^{(\mathbb{N})}$ (suites presque nulles, donc nulle à partir d'un certain rang) et $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ sont-ils dénombrables ?**

---

$\mathbb{N}^{(\mathbb{N})}$ est dénombrable car égal $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$ où $A_k$ est l'ensemble des suites nulles à partir du rang $k$, qui est dénombrable car équipotent à $\mathbb{N}^k$.

Par contre, $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ ne l'est pas par argument diagonal de Cantor. En effet, si $f : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \\ n & \longmapsto & f(n) = u^{(n)} \end{array}\right.$ est une bijection, alors la suite $\left(u_n^{(n)}+1\right)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas d'antécédent par $f$.

# III Sommabilité

## 1 Introduction

**Remarque : Digression sur une série semi-convergente**

**R 5 –** On sait que la série $\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n}{n+1}$ est convergente et que sa somme vaut $\ln 2$ avec trois méthodes (à savoir faire !)

- soit en utilisant le développement asymptotique $H_n=\ln n+\gamma+\mathrm{o}(1)$ de la série harmonique et en séparant termes d'ordre pair ou impair,
- soit avec une inégalité de Taylor-Lagrange appliquée entre $0$ et $1$ à $x\mapsto\ln(1+x)$,
- soit encore en voyant que $\frac{1}{n+1}=\int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t$ et en reconnaissant une somme géométrique.

Ainsi,
$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots=\ln 2.$$
Il se trouve que l'ordre des termes est important dans cette somme.
Ainsi, en sommant un terme d'indice impair puis deux d'indices pairs, on peut obtenir
$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\cdots=\frac{\ln 2}{2}.$$
En effet, on peut, dans une somme partielle, regrouper le terme d'ordre impair et le terme d'ordre pair qui le suit immédiatement et obtenir
$$\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\cdots=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots\right)=\frac{\ln 2}{2}.$$
(Bien sûr, il faudrait le formaliser plus rigoureusement, mais c'est l'idée).
On peut en fait démontrer qu'en réordonnant les termes, on est capable d'obtenir n'importe quel nombre réel et même $\pm\infty$.
Par exemple, en regroupant les termes positifs par paquets toujours $\geqslant\frac{1}{4}$ (ce qui est toujours possible) :
$$(1)-\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right)-\ldots$$
on obtient une série qui diverge grossièrement (la suite extraite des termes de rangs pairs ne tend pas vers $0$).
De plus, en faisant des regroupement de « paquets », il est possible de trouver des séries divergentes : c'est ce qui arriverait si on rassemblait d'une part les termes d'indice pair et d'autre part les termes d'indice impair.
Bref, la convergence n'est « ni commutative, ni associative », même si la série initiale était convergente.
Remarquons que dans une série divergente comme $\sum(-1)^n$, on peut avec des paquets, la rendre convergente : $(1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots$ converge vers $0$.
Toutes les séries ne demandent pas tant de précautions. Par exemple, la série absolument convergente $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$ converge vers $\frac{\pi^2}{6}$ et ce, quel que soit l'ordre des termes, avec ou non des paquets, finis ou infinis : $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ peut être manipulée comme une somme finie.
Lorsque l'ordre des termes n'importe plus, on n'est plus obligé de se limiter à des sommes indexées par $\mathbb{N}$ : on peut sommer des familles indexées par n'importe quel ensemble dénombrable : $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}^2$, $\mathbb{Q}$...

# 2 Familles de réels positifs

## a Calculs dans $[0,+\infty]$

**Définition 4 : Opération et ordre dans $[0,+\infty]$**

On note $[0,+\infty]=[0,+\infty[\cup\{+\infty\}=\mathbb{R}^+\cup\{+\infty\}$.
On étend les lois $+$, $\times$ ainsi que l'ordre $\leqslant$ de la manière suivante : si $a\in[0,+\infty[$,

- $a+(+\infty)=(+\infty)+a=(+\infty)+(+\infty)=+\infty$.
- Si $a>0$, $a\times(+\infty)=(+\infty)\times a=(+\infty)\times(+\infty)=+\infty$.
- $a<+\infty$ et $+\infty\leqslant+\infty$.

Enfin, on appelle **borne supérieure** d'une partie $A$ non vide de $[0,+\infty]$ le plus petit des majorants de $A$ dans $[0,+\infty]$.

**Propriété 8 : Détermination de la borne supérieure**

*Si $A\subset\mathbb{R}$ est majorée dans $\mathbb{R}$, c'est le $\sup_{\mathbb{R}} A$ dans $\mathbb{R}$ que l'on connaît bien.*
*Si $A\subset\mathbb{R}$ non majorée dans $\mathbb{R}$ ou si $A$ contient $+\infty$, alors $\sup A=+\infty$.*

**Remarque**

R6 – Les propriétés de calcul dans $[0,+\infty]$ sont les mêmes que dans $\mathbb{R}$ (associativité, commutativité, distributivité, compatibilité de l'ordre avec les opérations...), pourvu qu'on évite de multiplier $+\infty$ par $0$...

## b Sommes de familles de réels positifs

**Définition 5 : Sommes de familles de réels positifs**

Soit $I$ ensemble quelconque (fini ou infini, éventuellement non dénombrable). On note ici $\mathscr{P}_f(I)$ l'ensemble des parties finies de $I$.
Soit $(u_i)_{i\in I}\in(\mathbb{R}^+)^I$ une famille de **réels positifs** indexée par $I$.

On appelle **somme** de la famille, notée $\sum\limits_{i\in I}u_i$ la borne supérieure dans $[0,+\infty]$ de $A=\left\{\sum\limits_{i\in J}u_i,\ J\in\mathscr{P}_f(I)\right\}$ :

$$\sum_{i\in I}u_i=\sup_{J\in\mathscr{P}_f(I)}\left(\sum_{i\in J}u_i\right)\in[0,+\infty].$$

**Remarque**

R7 – On va voir un peu plus loin qu'il est nécessaire que $\{i\in I,\ u_i\neq 0\}$ soit au plus dénombrable pour que la somme (qui est une borne supérieure) soit finie.
Mais la particularité des réels positifs de pouvoir travailler dans $[0,+\infty]$ permet de considérer dans cette partie des ensembles d'indices $I$ quelconque.

**Propriété 9 : Cas des sommes finies**

*On suppose que $I = \{i_1, \ldots, i_p\}$ est fini. Alors la somme de **réels positifs** définie précédemment est bien égale à $\sum_{k=1}^{p} u_{i_k}$, le $\sup$ étant ici fini (c'est même un $\max$).*

**Propriété 10 : Cas des séries**

*Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}}$ une famille de **réels positifs**. Alors le nombre $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n \in [0, +\infty]$ défini précédemment est égal à $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ si la série est convergente, et $+\infty$ sinon.*

*On se permet donc d'utiliser les deux notations indifféremment, et de noter $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = +\infty$ lorsque la série est divergente.*

**Démonstration**

Soit $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite croissante des sommes partielles de la série $\sum u_n$. Par théorème de la limite monotone, elle converge vers $\ell \in [0, +\infty]$.

Alors pour tout $J \in \mathscr{P}_f(\mathbb{N})$, $\sum_{n\in J} u_n \leqslant S_{\max J} \leqslant \ell$ donc $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n \leqslant \ell$.

Supposons maintenant que $M \in [0, +\infty]$ soit un majorant de l'ensemble des $\sum_{n\in J} u_n$ pour $J \in \mathscr{P}_f(\mathbb{N})$.

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n \leqslant M$ donc, en passant à la limite, $\ell \leqslant M$.

Finalement, $\ell$ est le plus petit des majorants de l'ensemble des $\sum_{n\in J} u_n$ pour $J \in \mathscr{P}_f(\mathbb{N})$, c'est-à-dire $\ell = \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$. ■

**Propriété 11 : Comparaison**

- *Si pour tout $i \in I$, $0 \leqslant a_i \leqslant b_i$*
$$\sum_{i\in I} a_i \leqslant \sum_{i\in I} b_i$$
*dans $[0, +\infty]$.*
*En particulier, si $\sum_{i\in I} b_i < +\infty$, alors $\sum_{i\in I} a_i < +\infty$.*
- *Si $I' \subset I$,*
$$\sum_{i\in I'} a_i \leqslant \sum_{i\in I} a_i$$
*dans $[0, +\infty]$.*

## C Sommabilité dans le cas positif

**Définition 6 : Famille sommable de réels positifs**

Soit $I$ un ensemble, $(u_i)_{i\in I}$ une famille de **réels positifs**.
On dit que $(u_i)_{i\in I}$ est **sommable** lorsque $\sum_{i\in I} u_i < +\infty$.

**Propriété 12 : Dénombrabilité de l'ensemble d'indice**

*Si $(u_i)_{i\in I}$ une famille sommable de réels positifs, alors $\{i \in I,\ u_i \neq 0\}$ est au plus dénombrable.*

**Démonstration**

En effet, si la famille de réels strictement $(u_i)_{i\in I}$ est sommable et $K=\{i\in I,\ u_i>0\}$, soit $K_p=\left\{i\in J,\ u_i\geqslant\frac{1}{p}\right\}$ pour $p\in\mathbb{N}^*$. Alors $\sum_{i\in J_p}u_i\leqslant\sum_{i\in I}u_i=S$ donc $(u_i)_{i\in J_p}$ est sommable.

Mais comme pour tout $i\in K_p$, $u_i\geqslant\frac{1}{p}$, nécessairement $K_p$ est fini (car si on choisit $k\in\mathbb{N}$ éléments distincts dans $K_p$, on obtient $\frac{k}{p}\leqslant S$)

Or $K=\bigcup_{p=1}^{+\infty}K_p$ donc $K$ est fini ou dénombrable. ∎

## d Invariance par permutation

**Remarque**

**R 8 –** Une permutation de $I$ est une bijection de $I$ sur $I$.

**Propriété 13 : Invariance par permutation – cas positif**

*Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de **réels positifs**. Soit $\sigma\in\mathfrak{S}(I)$ une permutation de $I$. Alors*

$$\sum_{i\in I}u_i=\sum_{i\in I}u_{\sigma(i)}$$

*dans* $[0,+\infty]$.

**Démonstration**

Il suffit de remarquer que $\sigma(\mathscr{P}_f(I))=\mathscr{P}_f(I)$ par bijectivité, les sup des sommes sur les parties finies seront bien les mêmes. ∎

**Propriété 14 : Cas dénombrable : écriture sous forme de série**

*Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de **réels positifs**, $I$ étant **dénombrable**.*
*Soit $n\mapsto i_n$ une bijection de $\mathbb{N}$ sur $I$ (ie une énumération de $I$). Alors*

$$\sum_{i\in I}u_i=\sum_{n=0}^{+\infty}u_{i_n}$$

*dans* $[0,+\infty]$.

**Remarque**

**R 9 –** Quitte à retirer les termes nuls, dans le cas dénombrable, on se ramène à une étude de série ; dans le cas fini, c'est facile ; dans les autres cas, c'est $+\infty$.

**Démonstration**

On note $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite croissante des sommes partielles : $S_n=\sum_{k=0}^{n}u_{i_k}$.

Alors pour tout $n\in\mathbb{N}$, comme $J_n=\{i_k,\ 0\leqslant k\leqslant n\}$ est fini, $S_n\leqslant\sum_{i\in I}u_i$, donc en faisant $n\to+\infty$, $\sum_{n=0}^{+\infty}u_{i_n}\leqslant\sum_{i\in I}u_i$.

Puis, si $J$ est une partie finie de $I$, $N=\max\{k,\ i_k\in J\}$, $\sum_{i\in J}u_i\leqslant S_N\leqslant\sum_{n=0}^{+\infty}u_{i_n}$. Donc $\sum_{i\in I}u_i=\sup_{J\in\mathscr{P}_f(I)}\left(\sum_{i\in J}u_i\right)\leqslant\sum_{n=0}^{+\infty}u_{i_n}$.

On a bien $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$. ■

**Corollaire 3 : Invariance par permutation d'une série à termes positifs**

*Si $\sum a_n$ est une série à termes réels positifs et $\sigma \in \mathfrak{S}(\mathbb{N})$, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} a_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ dans $[0,+\infty]$.*

### e Linéarité

**Lemme 2 : Utilisable directement**

*Si $A$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}^+$, alors $\sup(\lambda A) = \lambda \sup(A)$.*
*Cela reste valable dans $[0,+\infty]$ en posant $0 \times (+\infty) = 0$.*

**Démonstration**

On a déjà que $\lambda \sup(A)$ majore $\lambda A$ et on peut trouver une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $a_n \to \sup A$. Alors $\lambda a_n \in \lambda A \to \lambda \sup A$ ce qui permet de conclure. ■

**Propriété 15 : Linéarité – cas positif**

*Si $I$ est un ensemble quelconque, $a = (a_i)_{i\in I}$ et $b = (b_i)_{i\in I}$ des familles de réels positifs, $\lambda \in \mathbb{R}^+$.*
*Alors $\sum_{i\in I}(a_i + \lambda b_i) = \sum_{i\in I} a_i + \lambda \sum_{i\in I} b_i$ dans $[0,+\infty]$.*
*(Ici, on pose $0 \times (+\infty) = 0$.)*

**Démonstration**

La propriété connue $\sup(\lambda A) = \lambda \sup(A)$ pour $\lambda \geqslant 0$ s'étendant facilement au sup dans $[0,+\infty]$, il suffit de montrer que $\sum_{i\in I}(a_i + b_i) = \sum_{i\in I} a_i + \sum_{i\in I} b_i$.

Pour tout $J$ partie finie de $I$, $\sum_{i\in J}(a_i + b_i) = \sum_{i\in J} a_i + \sum_{i\in J} b_i \leqslant \sum_{i\in I} a_i + \sum_{i\in I} b_i$.

Pour montrer l'inégalité dans l'autre sens, on peut supposer $\sum_{i\in I} a_i$ et $\sum_{i\in I} b_i$ finies car si l'une d'elle est infinie, c'est aussi le cas de $\sum_{i\in I}(a_i + b_i)$ : il suffit de sommer les inégalités $a_i \leqslant a_i + b_i$ sur des ensembles finis d'indices et de passer au sup pour voir par exemple que $\sum_{i\in I} a_i \leqslant \sum_{i\in I}(a_i + b_i)$.

Utilisons alors la caractérisation de la borne supérieure. Soit $\varepsilon > 0$. alors

$$\sum_{i\in I} a_i + \sum_{i\in I} b_i - \varepsilon = \left(\sum_{i\in I} a_i - \frac{\varepsilon}{2}\right) + \left(\sum_{i\in I} b_i - \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

On a donc des parties $J$ et $J'$ finies de $I$ telles que

$$\sum_{i\in I} a_i + \sum_{i\in I} b_i - \varepsilon \leqslant \sum_{i\in J} a_i + \sum_{i\in J'} b_i \leqslant \sum_{i\in J\cup J'} (a_i + b_i) \leqslant \sum_{i\in I}(a_i + b_i)$$

avec $J \cup J'$ toujours finie.

En faisant $\varepsilon \to 0$, on a bien $\sum_{i\in I}(a_i + b_i) = \sum_{i\in I} a_i + \sum_{i\in I} b_i$.

Autre preuve possible : on a vu que dans le cas où $I$ n'est pas au plus dénombrable après suppression des indices des termes nuls, les sommes sont nécessairement $+\infty$ et l'égalité est vraie.

Sinon, soit elle sont finies et c'est immédiat, soit on se ramène à des sommes de séries via une énumération de $I$ et c'est aussi une propriété connue. ■

### f Sommation par paquets

**Théorème 4 : sommation par paquets – cas positif**

*Soit $I$ un ensemble quelconque, réunion disjointe des $I_j$ pour $j \in J$ : $k \neq \ell \Longrightarrow I_k \cap I_\ell = \varnothing$ et $\bigcup_{j \in J} I_j = I$ (presque une partition : il peut y avoir des $I_j$ vides. On parle de recouvrement disjoint.)*

*Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille de **réels positifs**. Alors*

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{j \in J} \left( \sum_{i \in I_j} u_i \right).$$

**Remarque**

**R 10 –** On travaille dans $[0, +\infty]$. Si l'une[a] des $\sum_{i \in I_j} u_i$ vaut $+\infty$, alors $\sum_{j \in J} \left( \sum_{i \in I_j} u_i \right) = +\infty$.

Autrement dit, dans une somme d'éléments de $[0, +\infty]$, si l'un des termes vaut $+\infty$, c'est aussi le cas de la somme.

a. Ici, on parle de borne supérieure plutôt que de somme, vous suivez ?.

**Démonstration : Hors Programme**

On a déjà que si l'une des $\sum_{i \in I_j} u_i = +\infty$, alors, comme les parties finie de $I_j$ sont des parties finies de $I$, $+\infty = \sum_{i \in I_j} u_i \leqslant \sum_{i \in I} u_i$ qui vaut $+\infty$.

On peut donc supposer que pour tout $j \in J$, $\sum_{i \in I_j} u_i < +\infty$.

Notons $S = \sum_{i \in I} u_i$ et $S' = \sum_{j \in J} \left( \sum_{i \in I_j} u_i \right)$.

Soit $K$ une partie finie de $I$. Pour tout $k \in K$, il existe un unique $j_k \in J$ tel que $k \in J_{j_k}$. Soit $J' = \{ j_k,\ k \in K \}$.

Alors $\sum_{k \in K} u_k \leqslant \sum_{j \in J'} \left( \sum_{i \in I_j} u_i \right) \leqslant \sum_{j \in J} \left( \sum_{i \in I_j} u_i \right)$ et, en passant au $\sup$

$$\sum_{i \in I} u_i \leqslant \sum_{j \in J} \left( \sum_{i \in I_j} u_i \right).$$

Réciproquement, soit $J'$ une partie finie de $J$. Ré-indexons $I_1, \dots, I_p$ les $I_j$ pour $j \in J'$. Pour toutes parties finies $K_1, \dots, K_p$ de $I_1, \dots, I_p$ respectivement, on a

$$\sum_{\ell=1}^{p} \left( \sum_{i \in K_\ell} u_i \right) = \sum_{i \in K_1 \cup \dots \cup K_p} u_i \leqslant \sum_{i \in I} u_i.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $\ell \in [\![1, p]\!]$, il existe, par caractérisation de la borne supérieure, $K_\ell$ partie finie de $I_\ell$ telle que

$$\sum_{i \in I_\ell} u_i - \frac{\varepsilon}{p} \leqslant \sum_{i \in K_\ell} u_i.$$

On a alors

$$\sum_{j \in J'} \left( \sum_{i \in I_j} u_i \right) - \varepsilon \leqslant \sum_{\ell=1}^{p} \left( \sum_{i \in K_\ell} u_i \right).$$

Donc pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\sum_{i \in I} u_i \geqslant \sum_{j \in J'} \left( \sum_{i \in I_j} u_i \right) - \varepsilon$$

puis, en faisant $\varepsilon \to 0$, $\sum_{i \in I} u_i \geqslant \sum_{j \in J} \left( \sum_{i \in I_j} u_i \right)$, qui est donc bien une égalité. ■

**Exercice 4 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une famille de réels positifs. Montrer que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=1}^{+\infty} u_{-n}$.**

Il suffit d'appliquer le théorème de sommation par paquet avec $I = \mathbb{N} \sqcup \mathbb{Z}_*^-$.

## g Théorème de Fubini positif

**Théorème 5 : de Fubini – cas positif**

*Soit $(u_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ une famille de réels positifs. Alors*

$$\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} u_{m,n} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{m=0}^{+\infty} u_{m,n}\right) = \sum_{m=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_{m,n}\right)$$

*toujours dans $[0,+\infty]$.*

**Démonstration**

C'est le théorème de sommation par paquets avec $I_n = \{(m,n),\ m\in\mathbb{N}\}$ qui forme un recouvrement disjoint de $\mathbb{N}^2$.

**Remarque**

**R 11 –** Voir le parallèle avec le théorème d'intégration terme à terme (interversion série-intégrale) dans le cas de fonctions à valeurs réelles positives.

**R 12 –** Ce n'est pas la seule façon de procéder.
On peut former d'autres paquets, en sommant par exemple par diagonales au lieu de sommer par lignes ou par colonnes et obtenir des énoncés analogues.

**Exercice 5 : Calculer la somme de $\left(\dfrac{1}{(mn)^2}\right)_{(m,n)\in\mathbb{N}_*^2}$.**

*(Voir généralisation plus loin : sommes doubles produits)*
Par Fubini positif,

$$\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}_*^2} \frac{1}{(mn)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{(mn)^2} \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{1}{m^2}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{1}{m^2} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\right)^2 = \frac{\pi^4}{36} < +\infty$$

d'où la sommabilité et la somme vaux $\dfrac{\pi^4}{36}$.

**Exercice 6 : Montrer que la famille $\left(\dfrac{1}{(m+n)^4}\right)_{(m,n)\in\mathbb{N}^2\setminus\{(0,0)\}}$ est sommable et exprimer sa somme comme somme d'une série.**

On considère pour $p\in\mathbb{N}^*$, $I_p = \left\{(m,n)\in\mathbb{N}^2\setminus\{(0,0)\},\ m+n=p\right\}$ (on va sommer par diagonales). $(I_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ est une recouvrement disjoint de $\mathbb{N}^2\setminus\{(0,0)\}$.

Pour tout $p\in I_p$, $\left(\dfrac{1}{(m+n)^4}\right)_{(m,n)\in I_p}$ est une famille contenant $|I_p| = p+1$ fois la valeur constante $\dfrac{1}{p^4}$. Tous les termes sont réels positif, on peut écrire

$$\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^2\setminus\{(0,0)\}} \frac{1}{(m+n)^4} = \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{p+1}{p^4} = \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{p^3} + \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{p^4}.$$

Les séries sont convergentes par critère de Riemann donc la famille est sommable.

**Exercice 7 : Montrer que $\left(\dfrac{1}{m^2+n^2}\right)_{(m,n)\in\mathbb{N}_*^2}$ n'est pas sommable.**

À $n\in\mathbb{N}$ fixé, $\sum_m \dfrac{1}{m^2+n^2}$ converge. Soit $s_n=\sum_{m=1}^{+\infty}\dfrac{1}{m^2+n^2}$. $\sum s_n$ divergente ?

On peut comparer à une intégrale : $\sum_{m=1}^{+\infty}\dfrac{1}{m^2+n^2}\geqslant\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{t^2+n^2}\,\mathrm{d}t=\dfrac{1}{n}\left[\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{t}{n}\right)\right]_1^{+\infty}=\dfrac{\frac{\pi}{2}-\operatorname{Arctan}\frac{1}{n}}{n}\geqslant\dfrac{\pi}{4n}$ terme général positif de série divergente.

Autre solution : remarquer que $m^2+n^2\leqslant(m+n)^2$ donc $\dfrac{1}{m^2+n^2}\geqslant\dfrac{1}{(m+n)^2}$ et vérifions que la famille de réels positifs $\left(\dfrac{1}{(m+n)^2}\right)_{(m,n)\in\mathbb{N}_*^2}$ n'est pas sommable.

En effet, sommation par diagonale : $I_p=\{(m,n)\in\mathbb{N}_*^2,\ m+n=p\}$ forme un recouvrement disjoint de $\mathbb{N}_*^2$.

$\sum_{(m,n)\in I_p}\dfrac{1}{(m+n)^2}=\dfrac{|I_p|}{p^2}=\dfrac{p-1}{p^2}\sim\dfrac{1}{p}$ terme général de série divergente.

**Exercice 8 : Oral Mines-Ponts**

1. **Pour quelles valeurs du réel $\alpha$ la famille $\left(\dfrac{1}{(m^2+n^2)^\alpha}\right)_{(m,n)\in\mathbb{N}_*^2}$ est-elle sommable ?**
2. **Démontrer que, pour tous $m$ et $n$ positifs, $\frac{1}{2}(m+n)^2\leqslant m^2+n^2\leqslant(m+n)^2$.**
3. **Étudier la sommabilité de la suite double $\left(\dfrac{1}{(m+n)^\beta}\right)_{(m,n)\in\mathbb{N}_*^2}$ suivant les valeurs du réel $\beta$. Retrouver le résultat de la première question.**

---

1. Comme les termes sont positifs, on peut écrire par le théorème de Fubini positif
$$\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}_*^2}\frac{1}{(m^2+n^2)^\alpha}=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{1}{(m^2+n^2)^\alpha}\right)$$
dans $[0,+\infty]$.
On fixe $n\in\mathbb{N}$. $0\leqslant\dfrac{1}{(m^2+n^2)^\alpha}\underset{m\to+\infty}{\sim}\dfrac{1}{m^{2\alpha}}$ donc $\sum_m\dfrac{1}{(m^2+n^2)^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha>\dfrac{1}{2}$.
Lorsque c'est le cas, on pose $u_n=\sum_{m=1}^{+\infty}\dfrac{1}{(m^2+n^2)^\alpha}$.
On cherche une condition sur $\alpha$ pour que la série $\sum u_n$ converge.
On compare à une intégrale, par décroissance et continuité de $t\mapsto\dfrac{1}{(t^+n^2)^\alpha}$ sur $[1,+\infty[$.
$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{(t^2+n^2)^\alpha}\,\mathrm{d}t\leqslant u_n\leqslant\frac{1}{(1+n^2)^\alpha}+\int_1^{+\infty}\frac{1}{(t^2+n^2)^\alpha}\,\mathrm{d}t$$
Or $\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{(t^+n^2)^\alpha}\,\mathrm{d}t=\dfrac{1}{n^{2\alpha}}\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{\left(\left(\frac{t}{n}\right)^2+1\right)^\alpha}\,\mathrm{d}t\underset{t=nu}{=}\dfrac{1}{n^{2\alpha-1}}\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty}\dfrac{1}{(u^2+1)^\alpha}\,\mathrm{d}t\sim\dfrac{1}{n^{2\alpha-1}}\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{(u^2+1)^\alpha}\,\mathrm{d}t$.
Comme $\dfrac{1}{(1+n^2)^\alpha}=\mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^{2\alpha-1}}\right)$, on en déduit que $u_n\sim\dfrac{C}{n^{2\alpha-1}}$ avec $C=\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{(u^2+1)^\alpha}\,\mathrm{d}t$.
Et donc il y a sommabilité si et seulement si $\alpha>\dfrac{1}{2}$ et $2\alpha-1>1$ si et seulement si $\alpha>1$.
2. Facile.
3. Comme dans l'exemple précédent, par diagonales. $I_p=\{(m,n)\in\mathbb{N}_*^2,\ m+n=p\}$ forme un recouvrement disjoint de $\mathbb{N}_*^2$.
$\sum_{(m,n)\in I_p}\dfrac{1}{(m+n)^\beta}=\dfrac{|I_p|}{p^\beta}=\dfrac{p-1}{p^\beta}\sim\dfrac{1}{p^{\beta-1}}$ terme général de série convergente si et seulement si $\beta>2$.
On a alors, pour $\alpha\geqslant 0$, $\dfrac{2^\alpha}{(m+n)^{2\alpha}}\leqslant\dfrac{1}{(m^2+n^2)^\alpha}\leqslant\dfrac{1}{(m+n)^{2\alpha}}$.
L'inégalité de droite permet de conclure la sommabilité dans le cas où $\alpha>1$ et celle de droite la non sommabilité dans le cas où $\alpha<1$.

**Remarque**

**R 13 –** Assez souvent, on utilise le résultat plus simplement : on a à manipuler une quantité qui est déjà donné sous forme de somme de série. On fait apparaître une série double, la sommabilité est automatique en cas de positivité, et on peut échanger les sommes par le théorème.

**Exercice 9 : Si $x > 1$, $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$. Montrer que $\zeta(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n^{x+1}}$.**

Or $\frac{1}{n^x} = \frac{n}{n^{x+1}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^{x+1}}$.

Donc $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^{x+1}}$ existe bien.

Donc $(u_{k,n})_{(k,n)\in\mathbb{N}^2}$ où $u_{k,n} = \frac{1}{n^{x+1}}$ si $1 \leqslant k \leqslant n$ et $0$ sinon est sommable (les termes sont réels positifs) et par le théorème de Fubini, $\zeta(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n^{x+1}}$.

### h Cas particulier : suites doubles produits

**Propriété 16 : Sommes doubles produits, cas positif**

*Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels positifs. Alors, dans $[0, +\infty]$,*

$$\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} u_m v_n = \left(\sum_{m=0}^{+\infty} u_m\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right).$$

(*avec* $0 \times (+\infty) = 0.$)

*Le résultat s'étend à un produit d'un nombre quelconque (mais fini) de termes.*

**Démonstration**

Conséquence immédiate de Fubini. ■

## 3 Familles de réels quelconques ou de complexes

Différence majeure avec ce qui précède : on va devoir commencer par prouver la sommabilité avant d'utiliser les théorèmes, qui, parfois, la donnent aussi comme conclusion.

### a Définition, somme

**Définition 7 : Famille sommable**

Soit $I$ un ensemble quelconque et $(u_i)_{i\in I} \in \mathbb{C}^I$.
On dit que la famille $(u_i)_{i\in I}$ est **sommable** lorsque la famille de réels positifs $(|u_i|)_{i\in I}$ l'est. Autrement dit

$$(u_i)_{i\in I} \text{ est sommable} \iff \sum_{i\in I} |u_i| < +\infty$$

**Remarque**

**R 14 –** Il est donc nécessaire, pour que $(u_i)_{i\in I}$ soit **sommable**, que $\{i \in I,\ u_i \neq 0\}$ soit au plus dénombrable.

**R 15 –** Définition théorique... Mais comment définir la somme ? Comme pour les séries...

**Remarque : (Rappel) Parties positive et négative d'un réel**

**R 16 –** Si $x \in \mathbb{R}$, $x^+ = \max(0,x)$ et $x^- = \max(0,-x)$. Alors $x = x^+ - x^-$ et $|x| = x^+ + x^-$.

**Propriété 17 : Condition de sommabilité, cas réel**

*Soit $I$ un ensemble quelconque et $(u_i)_{i\in I} \in \mathbb{R}^I$.*
*Si la famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable, alors les deux familles $\left(u_i^+\right)_{i\in I} \in \mathbb{R}^I$ et $\left(u_i^-\right)_{i\in I} \in \mathbb{R}^I$ le sont.*

**Remarque**

**R 17 –** La réciproque est vraie, voir linéarité plus loin.

**Démonstration**

Si $(u_i)_{i\in I}$ est sommable, $0 \leqslant u_i^+ \leqslant |u_i|$ et $0 \leqslant u_i^- \leqslant |u_i|$. donc $\sum\limits_{i\in I} u_i^+ \leqslant \sum\limits_{i\in I} |u_i| < +\infty$ et $\sum\limits_{i\in I} u_i^- \leqslant \sum\limits_{i\in I} |u_i| < +\infty$ et $\left(u_i^+\right)_{i\in I} \in \mathbb{R}^I$ et $\left(u_i^-\right)_{i\in I} \in \mathbb{R}^I$ sont sommables. ■

**Définition 8 : Somme dans le cas réel**

Soit $I$ un ensemble quelconque et $(u_i)_{i\in I} \in \mathbb{R}^I$ une famille sommable.
On définit la **somme**

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{i\in I} u_i^+ - \sum_{i\in I} u_i^-.$$

**Remarque**

**R 18 –** Définition théorique, jamais utile dans la pratique.

**Propriété 18 : Condition de sommabilité, cas complexe**

*Soit $I$ un ensemble quelconque et $(u_i)_{i\in I} \in \mathbb{C}^I$.*
*Si la famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable, alors les deux familles $(\mathfrak{Re}(u_i))_{i\in I} \in \mathbb{R}^I$ et $(\mathfrak{Im}(u_i))_{i\in I} \in \mathbb{R}^I$ le sont.*

**Remarque**

**R 19 –** La réciproque est vraie, voir linéarité plus loin.

**Démonstration**

Si $(u_i)_{i\in I}$ est sommable, $0 \leqslant |\mathfrak{Re}\, u_i| \leqslant |u_i|$ et $0 \leqslant |\mathfrak{Im}\, u_i| \leqslant |u_i|$. ■

**Définition 9 : Somme dans le cas complexe**

Soit $I$ un ensemble quelconque et $(u_j)_{j\in I} \in \mathbb{C}^I$ une famille sommable.
Si la famille $(u_j)_{j\in I}$ est sommable, les deux familles $\left(\mathfrak{Re}(u_j)\right)_{j\in I} \in \mathbb{R}^I$ et $\left(\mathfrak{Im}(u_j)\right)_{j\in I} \in \mathbb{R}^I$ le sont.
Cela permet de définir la somme

$$\sum_{j\in I} u_j = \sum_{j\in I} \mathfrak{Re}(u_j) + \mathrm{i} \sum_{j\in I} \mathfrak{Im}(u_j).$$

**Notation 1 : Ensemble $\ell^1(I)$**

On note $\ell^1(I)$ l'ensemble des familles **sommables** de réels ou complexes indexées par un ensemble quelconque $I$. On précise parfois $\ell^1(I,\mathbb{R})$ ou $\ell^1(I,\mathbb{C})$.

**Propriété 19 : Cas des séries**

*La famille $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de nombres réels ou complexes est sommable si et seulement si la série $\sum u_i$ est **absolument** convergente.*

*Sa somme est alors la somme de la série $\sum u_i$.*

**Démonstration**

Par définition, $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est sommable si et seulement si $(|u_i|)_{i\in\mathbb{N}}$ l'est. En tant que famille à termes réels positifs, $(|u_i|)_{i\in\mathbb{N}}$ est sommable si et seulement si $\sum |u_i|$ converge.

Donc $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est sommable si et seulement si la série $\sum u_i$ est **absolument** convergente.

De plus, la définition de la somme d'une famille sommable donnée précédemment correspond à la définition de la somme de la série. ■

**Remarque**

**R 20** – Si la famille $(u_i)_{i\in I}$ n'est pas sommable, elle n'a pas de somme... sauf si elle est à termes réels positifs, auquel cas $\sum\limits_{i\in I} u_i = +\infty$.

Un résultat du programme pas vraiment utile dans la pratique.

**Lemme 3**

*Si $(u_i)_{i\in I}$ est sommable, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie finie $J$ de $I$ telle que*

$$\left|\sum_{i\in J} u_i - \sum_{i\in I} u_i\right| \leqslant \varepsilon$$

**Démonstration**

Conséquence de la définition dans le cas réel positif.

Dans le cas réel, on sépare les parties positive et négative par inégalité triangulaire et on utilise deux fois le cas précédent avec $\frac{\varepsilon}{2}$.

Dans le cas complexe, on sépare les parties réelle et imaginaire par inégalité triangulaire et on utilise deux fois le cas précédent avec $\frac{\varepsilon}{2}$. ■

Comme dans le cadre des séries, une sommabilité peut s'obtenir par comparaison de la valeur absolue/du module :

**Propriété 20 : Sommabilité par comparaison**

*Soit $I$ un ensemble quelconque, $(u_i)_{i\in I}$ une famille de nombres réels ou complexes et $(v_i)_{i\in I}$ une famille de **réels positifs** vérifiant*

$$\forall i \in I,\ \ |u_i| \leqslant v_i.$$

*Alors $(u_i)_{i\in I}$ est sommable.*

**Démonstration**

$\sum_{i\in I} |u_i| \leqslant \sum_{i\in I} v_i < +\infty.$ ■

**Remarque**

**R 21 –** Plus généralement, si $|u_i| = \mathcal{O}(v_i)$, alors $(v_i)_i$ sommable $\Longrightarrow$ $(u_i)_i$ sommable.

C'est donc aussi le cas avec $\mathrm{o}$ ou $\sim$.

De plus, comme pour les intégrales, on peut avoir ces relations de comparaison sans hypothèses de positivité car on peut y ajouter des valeurs absolues (non valables pour $\leqslant$) et conclure sur la sommabilité (absolue convergence), mais cela n'apparaît pas dans le programme officiel.

## b Invariance par permutation

**Propriété 21 : Invariance par permutation**

*Soit $I$ est un ensemble quelconque et $(u_i)_{i\in I}$ une famille **sommable** de nombres réels ou complexes. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}(I)$ une permutation de $I$. Alors $\left(u_{\sigma(i)}\right)_{i\in I}$ est sommable, et $\sum_{i\in I} u_i = \sum_{i\in I} u_{\sigma(i)}$.*

**Démonstration**

Déjà connu pour les réels positifs. On l'applique à $u_i^+$ et $u_i^-$ dans le cas réel pour obtenir l'égalité, puis à $\mathfrak{Re}\, u_i$ et $\mathfrak{Im}\, u_i$ dans le cas complexe, en revenant à la définition de la somme de la famille sommable. ■

**Propriété 22 : Cas dénombrable : écriture sous forme de série**

*Soit $I$ est un ensemble **dénombrable** et $(u_i)_{i\in I}$ une famille de nombres réels ou complexes , $k \mapsto i_k$ une bijection de $\mathbb{N}$ sur $I$.*

*La famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement si $\sum_{k\in\mathbb{N}} u_{i_k}$ est **absolument convergente**, et le cas échéant, on a*

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{k=0}^{+\infty} u_{i_k}.$$

**Démonstration**

Idem. ■

**Corollaire 4 : Invariance par permutation d'une série absolument convergente**

*Si $\sum a_n$ est une série **absolument** convergente à termes réels ou complexes et $\sigma \in \mathfrak{S}(\mathbb{N})$, alors la série $\sum a_{\sigma(n)}$ **converge absolument** et $\sum_{n=0}^{+\infty} a_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.*

### c Linéarité

**Propriété 23 : Linéarité, cas général**

*Si $I$ est un ensemble quelconque, si $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_i)_{i\in I}$ sont deux familles sommables d'éléments de $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), si $\lambda\in\mathbb{K}$, la famille $(u_i+\lambda v_i)_{i\in I}$ est sommable, et*

$$\sum_{i\in I}(u_i+\lambda v_i)=\sum_{i\in I}u_i+\lambda\sum_{i\in I}v_i$$

*Ainsi, $\ell^1(I)$ a une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*

**Démonstration**

La sommabilité est due au fait que $|u_i+\lambda v_i|\leqslant|u_i|+|\lambda||v_i|$.
Comme tout est sommable, quitte à enlever des termes nuls, on peut supposer que $I$ est au plus dénombrable.
Si $I$ est fini, c'est une propriété bien connue. Si I est dénombrable, soit $n\mapsto i_n$ une bijection de $\mathbb{N}$ vers $I$ (numérotation de $I$). Alors $\sum_{i\in I}(u_i+\lambda v_i)=\sum_{n=0}^{+\infty}(u_{i_n}+\lambda v_{i_n})=\lambda\sum_{n=0}^{+\infty}u_{i_n}+\sum_{n=0}^{+\infty}v_{i_n}=\sum_{i\in I}u_i+\lambda\sum_{i\in I}v_i$. ∎

### d Sommation par paquets

Il va bien falloir, si on abandonne la positivité des termes, quelques hypothèses. Car sinon, avec des paquets judicieux :

$$(1-1)+(1-1)+\cdots+=0$$
$$1+(-1+1)+(-1+1)+\cdots+=1$$

ce qui est fâcheux.

**Théorème 6 : sommation par paquets**

*Soit $I$ un ensemble quelconque, $(I_j)_{j\in J}$ un recouvrement disjoint de $I$ :*

$$p\neq q\Rightarrow I_p\cap I_q=\varnothing \quad \text{et} \quad \bigcup_{j\in J}I_j=I$$

*On suppose que*

**H1** *la famille $(u_i)_{i\in I}$ une famille de nombres réels ou complexes* ***sommable***

*alors*

**C1** *Pour tout $n$, $(u_i)_{i\in I_n}$ est sommable.*

**C2** $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}\left(\sum_{i\in I_n}u_i\right)$ *converge.*

**C3** $\displaystyle\sum_{i\in I}u_i=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{i\in I_n}u_i\right)$.

**Remarque**

**R 22 –** La sommabilité se vérifie en général en appliquant le théorème de sommation par paquets à la famille de réels positifs $(|u_i|)_{i\in I}$. Dans ce cas, on peut aussi sommer par paquets la famille $(|u_i|)_{i\in I}$. Il suffit donc de vérifier que

**H1** Pour tout $n$, $\displaystyle\sum_{i\in I_n}|u_i|<+\infty$.

**H2** $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}\left(\sum_{i\in I_n}|u_i|\right)<+\infty$.

pour écrire $\displaystyle\sum_{i\in I}u_i=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{i\in I_n}u_i\right)$.

**Démonstration**

Hors programme mais l'idée est de se ramener au cas réel positif pour prouver la sommabilité et de d'utiliser les parties positive/négative ou réelle/imaginaire pour prouver l'égalité. ■

**Propriété 24 : Cas où $I = \mathbb{Z}$**

*La famille $(u_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ de nombres réels ou complexes est sommable si et seulement si les séries $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} u_{-n}$ sont* **absolument** *convergentes.*

*Le cas échéant,* $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} u_n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_{-n}$.

### e Théorème de Fubini

**Théorème 7 : de Fubini**

*Soit $(a_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ une famille de réels ou de complexes.*
*Si*

**H1** $(a_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ *est* ***sommable*** (*c'est-à-dire si $(|a_{m,n}|)_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ l'est, par exemple avec le théorème de Fubini précédent*)

*alors*

$$\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} a_{m,n} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{m=0}^{+\infty} a_{m,n}\right) = \sum_{m=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_{m,n}\right).$$

**Démonstration**

De nouveau de la sommation par paquets. ■

**Exemple : Les deux membres peuvent exister sans être égaux, attention aux conclusions trop hâtives.**

**E 7 –** On définit $u_{p,q} = \dfrac{1}{p^2 - q^2}$ si $p \neq q$ et $0$ sinon.

Il est clair, par comparaison (équivalent) à une série de Riemann, que pour tout $q$ la série $\sum\limits_{p\neq q} u_{p,q}$ converge.

Notons

$$\sigma_q = \sum_{\substack{p=1\\p\neq q}}^{+\infty} u_{p,q}$$

et essayons de calculer $\sigma_q$. Pour cela, on peut penser à se servir de la décomposition en éléments simples

$$\frac{1}{p^2-q^2} = \frac{1}{2q}\left(\frac{1}{p-q} - \frac{1}{p+q}\right)$$

On peut regarder

$$\sigma_1 = \frac{1}{2}\sum_{p=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p+1}\right) =$$

(télescopisme pas trop compliqué); si $q > 1$, c'est un peu plus alambiqué, on ne peut guère échapper aux sommes partielles (pour ne pas couper en deux séries divergentes) : en supposant $N > q$,

$$\begin{aligned}\sigma_q^{(N)} &= \frac{1}{2q}\left(\sum_{p=1}^{q-1}\left(\frac{1}{p-q} - \frac{1}{p+q}\right) + \sum_{p=q+1}^{N}\left(\frac{1}{p-q} - \frac{1}{p+q}\right)\right)\\ &= \frac{1}{2q}\left(-\sum_{j=1}^{q-1}\frac{1}{j} - \sum_{j=q+1}^{2q-1}\frac{1}{j} + \sum_{j=1}^{N-q}\frac{1}{j} - \sum_{j=2q+1}^{q+N}\frac{1}{j}\right)\end{aligned}$$

On simplifie les deux premières sommes avec la troisième, en supposant $N-q>2q-1$ ce qui n'est pas gênant puisqu'on va prendre les limites quand $N\to+\infty$ :

$$\sigma_q^{(N)}=\frac{1}{2q}\left(\frac{1}{q}+\sum_{j=2q}^{N-q}\frac{1}{j}-\sum_{j=2q+1}^{q+N}\frac{1}{j}\right)$$

et enfin on simplifie les deux sommes restantes entre elles :

$$\sigma_q^{(N)}=\frac{1}{2q}\left(\frac{1}{q}+\frac{1}{2q}-\sum_{j=N-q+1}^{N+q}\frac{1}{j}\right)$$

La somme restante tend vers $0$ quand $N\to+\infty$ (il n'est pas nécessaire pour cela d'avoir le développement asymptotique des sommes partielles de la série harmonique), donc

$$\sigma_q=\frac{3}{4q^2}$$

Conclusion : $\sum\sigma_q$ converge, et $\sum\limits_{q=1}^{+\infty}\sigma_q=\frac{\pi^2}{8}$.

**Mauvaise conclusion** : C'est sommable.

**Bonne conclusion** : Ce n'est pas sommable, car en échangeant les rôles de $p$ et de $q$, on va trouver $-\frac{\pi^2}{8}$ au lieu de trouver la même chose.

**Chemin plus court pour arriver à la bonne conclusion** : prendre $p=n$ et $q=n-1$.

### f Cas particulier : suites doubles produits

**Propriété 25 : Sommes doubles produits**

*Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels ou complexes.*

*Alors la suite double $(u_mv_n)_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable si et seulement si (soit l'une des suites est nulle, soit les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont* ***absolument*** *convergentes).*

*Lorsque la dernière condition est vérifiée, on a en outre*

$$\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}u_mv_n=\left(\sum_{m=0}^{+\infty}u_m\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}u_n\right).$$

*Le résultat s'étend à un produit d'un nombre quelconque (mais fini) de termes.*

**Démonstration**

Conséquence immédiate de Fubini. ■

**Remarque**

**R 23** – L'hypothèse de suites non nulles est juste là pour avoir une caractérisation de la sommabilité. Pour le sens $\Longleftarrow$ intéressant dans la pratique pour calculer la somme, on peut l'oublier.

### g Produit de Cauchy

**Propriété 26 : Produit de Cauchy**

**H1** *Soit* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *deux séries réelles ou complexes* ***absolument convergentes****.*

*On note, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$. *Alors*

**C1** $\sum w_n$ *est absolument convergente.*

**C2** $\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right)$.

**Démonstration**

Il s'agit de la sommabilité de la suite double produit $(u_p v_q)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ avec une sommation par diagonale d'une part, et en utilisant la propriété précédente d'autre part. ■

**Propriété 27 : Exponentielle complexe**

*Si* $z, z' \in \mathbb{C}$, $\exp(z+z') = \exp z \times \exp z'$.

**Démonstration**

En effet, les séries de termes généraux $\frac{z^n}{n!}$ et $\frac{z'^n}{n!}$ convergent absolument et

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}\frac{z'^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} z^k z'^{n-k} = \frac{(z+z')^n}{n!}.$$

■

**Exercice 10 : Si $a \in \mathbb{C}$ tel que $|a| < 1$, alors $\frac{1}{(1-a)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a^n$.**

En effet, c'est le produit de Cauchy de la série géométrique absolument convergente de terme général $a^n$ avec elle-même.

**Remarque**

**R 24** – L'hypothèse d'absolue convergence est indispensable, le résultat n'est pas assuré pour des séries semi-convergentes.

**R 25** – Cependant, il suffit que l'une des deux soit absolument convergente et que l'autre soit seulement convergente pour que le produit de Cauchy converge (théorème de Mertens, HP).

**R 26** – Il existe d'ailleurs aussi une réciproque (HP aussi...) : si $\sum a_n$ est telle que son produit de Cauchy avec toute série convergente converge, alors elle est absolument convergente.

**R 27** – Conseil pratique : quand on effectue le produit de Cauchy de deux séries, il est conseillé de « faire commencer ces deux séries à $0$ ». Si on veut faire le produit de Cauchy de $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ par $\sum_{n\geqslant 2} v_n$, on pose $u_0 = v_0 = v_1 = 0$ et on fait le produit de Cauchy de $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ par $\sum_{n\geqslant 0} v_n$.

**Exemple**

**E 8** – Avec $u_n = v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$, alors $|w_n| = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}} \geqslant \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\sqrt{(n+1)^2}} = 1$. Donc $\sum w_n$ diverge grossièrement.