2

Séries numériques

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Généralités sur les séries (MP2I)

1 Sommes partielles, convergence, divergence, somme

Définition 1 : Série, convergence

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite.

Étudier la **série de terme général** u_n, notée $\sum u_n$, c'est étudier la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n \in \mathbb{K}.$$

S_n est appelée **somme partielle d'ordre** n de la série $\sum u_n$.

$\sum u_n$ est dite **convergente** lorsque $(S_n)_n$ converge, **divergente** sinon.

Lorsqu'elle est convergente, on appelle **somme de la série** $\sum u_n$ le nombre

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

Propriété 1 : Séries géométriques

Si $q \in \mathbb{K}$, la série dite géométrique $\sum q^n$ converge si et seulement si $|q| < 1$.

Lorsque c'est le cas, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$.

Propriété 2 : Série exponentielle complexe

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\displaystyle e^z = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}$.

2 Correspondance suite et séries

Propriété 3 : Série télescopique

Étudier la suite $(v_n)_n$, c'est étudier la série $\sum (v_n - v_{n-1})$ (en posant $v_{-1} = 0$) appelée ***série télescopique****.*

Corollaire 1

Soit $(v_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. La suite (v_n) et la série $\sum (v_{n+1} - v_n)$ ont même nature et, si elles sont convergentes,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (v_{n+1} - v_n) = \lim_{n\to+\infty} v_n - v_0.$$

3 Espace vectoriel des termes généraux de séries convergentes

Propriété 4 : Combinaison linéaire de termes généraux de séries convergentes

Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, et si $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $\sum (u_n + \lambda v_n)$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (u_n + \lambda v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

Propriété 5 : Convergence des séries à termes complexes

Si $\sum u_n$ est une série à termes complexe, elle converge si et seulement si les séries $\sum \mathfrak{Re}\, u_n$ et $\sum \mathfrak{Im}\, u_n$ convergent, et on a alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathfrak{Re}\, u_n + \mathrm{i} \sum_{n=0}^{+\infty} \mathfrak{Im}\, u_n$$

4 Condition nécessaire de convergence, divergence grossière

Propriété 6 : Divergence grossière

Si $u_n \not\to 0$, alors $\sum u_n$ diverge.
*On parle de **divergence grossière**.*

⚠ *La réciproque est fausse !*

*Si $u_n \to 0$, **ON NE PEUT RIEN DIRE** sur la convergence de $\sum u_n$.*

5 Reste d'une série convergente

Définition 2 : Reste d'une série convergente

Soit $\sum u_n$ une série **convergente** et $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

On appelle **reste d'ordre n de la série** $\sum u_n$ le nombre $R_n = S - S_n$ qui n'a un sens que si la série converge.

Propriété 7 : Reste sous forme de limite

Avec les mêmes hypothèses,

$$\sum_{k=n+1}^{N} u_k \xrightarrow[N\to+\infty]{} R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_n$$

Propriété 8 : Le reste converge vers 0

*Soit $\sum u_n$ une série **convergente** et R_n son reste d'ordre n, alors $R_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.*

6 Un critère simple pour des séries à termes positifs

Propriété 9 : Convergence d'une série à termes positifs

*Soit (u_n) suite **réelle positive**, $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. Alors*

(i) (S_n) est croissante.

(ii) (S_n) a une limite finie ou $+\infty$.

(iii) $\sum u_n$ converge si et seulement si (S_n) est majorée.

Méthode 1 : Manipulation de sommes de séries dans $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$

Finalement, dans le cas d'une série à termes positifs, on peut toujours poser

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}.$$

Le programme autorise alors la manipulation algébrique dans $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ de sommes de séries à termes positifs même divergentes (dans ce cas la somme vaut $+\infty$) pourvu qu'on ne manipule que des nombres positifs ou $+\infty$ (pas de différences, par exemple).

Alors obtenir une somme finie équivaut à la convergence de la série : pratique !

Ce principe est généralisé dans le chapitre sur la sommabilité.

7 Séries alternées

Théorème 1 : Spécial sur *certaines* Séries Alternées (TSSA)

*Si $u = (u_n)_n$ est une suite **réelle** telle que*

H1 *u décroissante*

H2 *$u_n \to 0$*

alors $\sum (-1)^n u_n$ est convergente.

De plus, si on note $v_n = (-1)^n u_n$,

- *La somme S a le même signe que son premier terme v_0.*
- *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le reste d'ordre n, R_n, a le même signe que son premier terme v_{n+1} et vérifie*

$$|R_n| \leqslant |v_{n+1}| = u_{n+1}.$$

Tous les résultats restent valables pour une série de la forme $\sum (-1)^{n+1} u_n$.

II Convergence absolue, séries à termes réels positifs (MP2I)

1 Comparaisons de termes généraux réels positifs

Les résultats de cette partie sont valables pour des séries à terme général réel positif. Cependant, l'étude étant asymptotique, ils s'appliquent plus généralement pour des séries à terme général positif à partir d'un certain rang.

Dans le cas où le terme général, est de signe constant (à partir d'un certain rang), on se ramène à un terme général positif quitte à étudier $\sum(-u_n)$ si le signe est négatif.

Théorème 2 : Comparaison des séries à termes réels positifs – cas de convergence

*Soient (u_n) et (v_n) deux suites **à termes réels positifs**.*

Si $\sum v_n$ convergeet si l'une des hypothèses suivantes est vérifiée :

- $u_n = \mathcal{O}(v_n)$,
- $u_n = o(v_n)$,
- *apcr* $u_n \leqslant v_n$,
- $u_n \sim v_n$

alors $\sum u_n$ converge.

Corollaire 2 : Comparaison des séries à termes positifs – cas de divergence

*Soient (u_n) et (v_n) deux suites **à termes positifs**.*

Si $\sum u_n$ diverge et si l'une des hypothèses suivantes est vérifiée :

- $u_n = \mathcal{O}(v_n)$,
- $u_n = o(v_n)$,
- *apcr* $u_n \leqslant v_n$,
- $u_n \sim v_n$

alors $\sum v_n$ diverge.

2 Convergence absolue

Définition 3 : Convergence absolue

Une série $\sum u_n$ à valeur dans $\mathbb{K}$ est dite **absolument convergente** lorsque la série à termes réels positifs $\sum |u_n|$converge.

Théorème 3 : convergence absolue $\Longrightarrow$ convergence

Si $\sum u_n$ converge absolument (donc si $\sum |u_n|$ converge), alors $\sum u_n$ converge.
La réciproque est fausse.

Propriété 10 : Inégalité triangulaire

Si $\sum u_n$ est absolument convergente,

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|.$$

Méthode 2 : Utilisation de la comparaison pour des séries quelconques

On compare $|u_n|$ à une suite (v_n) à termes **réels positifs** (au moins à partir d'un certain rang), terme général d'une **série convergente**.

Dire que $u_n = o(v_n)$ ou que $u_n = \mathcal{O}(v_n)$, c'est dire que $|u_n| = o(v_n)$ ou que $|u_n| = \mathcal{O}(v_n)$.

Si $|u_n| = o(v_n)$ ou $\mathcal{O}(v_n)$ ou $\leqslant v_n$ apcr, ou $\sim v_n$ alors la série $\sum u_n$ est absolument convergente donc convergente.

Pas de cas de divergence car il y a des séries semi-convergentes.

3 Critère de d'Alembert (MPI)

Propriété 11 : Critère de d'Alembert

*Soit (u_n) suite **à termes réels strictement positifs** tel que*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \to \ell \in [0, +\infty].$$

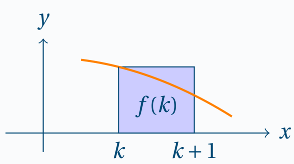
- *Si $\ell > 1$, $\sum u_n$ diverge grossièrement.*
- *Si $\ell < 1$, $\sum u_n$ converge.*
- *Si $\ell = 1$, on ne peut rien dire en général (cas douteux).*

4 Comparaison série-intégrale

a Comparaison

Méthode 3 : Comparaison série-intégrale, cas décroissant

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ décroissante et continue par morceaux. On observe, pour $k \in \mathbb{N}$, en comparant les aires,



$$\int_k^{k+1} f(t)\,dt \leqslant f(k).$$

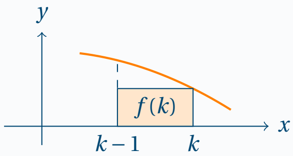
On peut alors ou bien sommer de 0 à n et obtenir

$$\int_0^{n+1} f(t)\,dt \leqslant \sum_{k=0}^{n} f(k)$$

ou bien sommer de 0 à $n-1$ et rajouter $f(n)$ pour obtenir

$$\int_0^{n} f(t)\,dt + f(n) \leqslant \sum_{k=0}^{n} f(k).$$

De même, pour $k \in \mathbb{N}$,



$$f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

On peut alors sommer de 1 à n et rajouter $f(0)$ pour obtenir

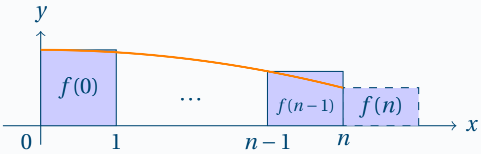
$$\sum_{k=0}^{n} f(k) \leqslant f(0) + \int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Si $0 < p \leqslant n$ on peut aussi sommer de p à n pour obtenir

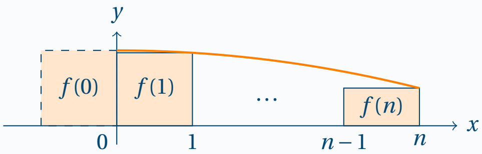
$$\sum_{k=p}^{n} f(k) \leqslant \int_{p-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t$$

(il faut faire attention dans ce cas à ce que l'intégrale soit bien définie.)

En résumé,



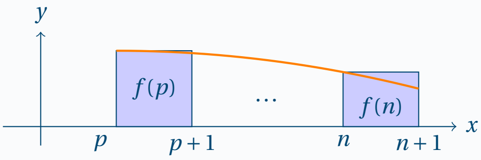
et



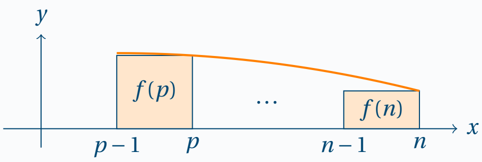
donnent

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad \int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t + f(n) \leqslant \sum_{k=0}^{n} f(k) \leqslant f(0) + \int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t$$

et



et



donnent $$\int_p^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=p}^{n} f(k) \leqslant \int_{p-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t$$

si f est continue par morceaux sur $[p-1, n]$.

On peut aussi, suivant les besoins, mixer les deux en sortant un terme d'un côté et en modifiant les bornes de l'intégrale de l'autre.

b Séries de Riemann

Théorème 4 : Séries de Riemann

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\sum \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge } \iff \alpha > 1$$

Méthode 4 : Règle du $n^\alpha u_n$

Soit $\sum u_n$ une série à termes réels positifs.

- S'il existe $\alpha > 1$ tel que $(n^\alpha u_n)$ est bornée (par exemple $n^\alpha u_n \to 0$), alors $u_n = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ donc $\sum u_n$ converge.
- S'il existe $\alpha \leqslant 1$ tel que $n^\alpha u_n \to +\infty$, alors $\frac{1}{n^\alpha} = \mathrm{o}(u_n)$ donc $\sum u_n$ diverge.
- S'il existe $\alpha, \ell \in \mathbb{R}_*^+$ tels que $u_n \sim \frac{\ell}{n^\alpha}$, alors $\sum u_n$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

c Séries de Bertrand (HP mais classique)

Méthode 5 : Séries de Bertrand

Il s'agit des séries de terme général $\frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} \geqslant 0$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Hors programme, mais **très classique.**

Intuitivement, le terme en $\ln$ n'a pas une grande influence, donc le comportement correspond à celui d'une série de Riemann, sauf dans le cas limite où $\alpha = 1$, dans lequel le terme en $\ln$ peut permettre d'accélérer la convergence du terme général vers 0 et rendre la série convergente à condition que $\beta > 1$.

On montre donc que la série converge si et seulement si $\boxed{\alpha > 1 \text{ ou } (\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1).}$

- Si $\alpha < 0$ ou si $\alpha = 0$ et $\beta \leqslant 0$, il y a divergence grossière.
- Si $\alpha < 1$ (englobe le cas précédent) ou ($\alpha = 1$ et $\beta \leqslant 0$), $\frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} \geqslant \frac{1}{n}$ à partir d'un certain rang et $\sum \frac{1}{n}$ diverge donc $\sum_{n \geqslant 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ diverge.
- Si $\alpha > 1$, avec $\gamma \in]1, \alpha[$, $\frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^\gamma}\right)$ et donc par comparaison de termes généraux positifs et la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\gamma}$ étant convergente, $\sum_{n \geqslant 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ converge.
- Si $\alpha = 1$ et $\beta > 0$, on obtient la nature de la série à l'aide d'une comparaison série-intégrale.

d Évaluation des sommes partielles et des restes

La comparaison série-intégrale est un bon outil pour évaluer asymptotiquement les sommes partielles dans le cas de divergence et les restes dans le cas de convergence.

Aucun résultat théorique au programme.

III Formule de Stirling (MP2I)

Théorème 5 : Formule de Stirling

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$$

Corollaire 3 : Développement asymptotique de $\ln(n!)$

On en déduit un développement asymptotique de $\ln(n!)$:

$$\ln(n!) = n\ln n - n + \frac{\ln n}{2} + \frac{\ln(2\pi)}{2} + \mathrm{o}(1)$$

IV Sommation des relations comparaison (MPI)

1 Cas de divergence

Théorème 6 : Sommation dans le cas de divergence

*Soient $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, v une suite **réelle positive**. On suppose que $\sum v_n$ **diverge**.*

On note $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et $\Sigma_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$.

(i) *Si $u_n = \mathcal{O}(v_n)$, alors $S_n = \mathcal{O}(\Sigma_n)$.*

(ii) *Si $u_n = \mathrm{o}(v_n)$, alors $S_n = \mathrm{o}(\Sigma_n)$.*

(iii) *Si $u_n \sim v_n$, alors $S_n \sim \Sigma_n$.*

Théorème 7 : de Cesàro

Si $u_n \to \ell \in \mathbb{K}$ (éventuellement infinie) et $v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u_k$ alors $v_n \to \ell$.

2 Cas de convergence

Théorème 8 : Sommation dans le cas de convergence

*Soient $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, v une suite **réelle positive**. On suppose que $\sum v_n$ **converge**.*

On note, sous réserve d'existence, $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ et $\rho_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$.

(i) *Si $u_n = \mathcal{O}(v_n)$, alors $\sum u_n$ converge et $R_n = \mathcal{O}(\rho_n)$.*

(ii) *Si $u_n = \mathrm{o}(v_n)$, alors $\sum u_n$ converge et $R_n = \mathrm{o}(\rho_n)$.*

(iii) *Si $u_n \sim v_n$, alors $\sum u_n$ converge et $R_n \sim \rho_n$.*

V Complément : développement décimal illimité

Théorème 9 : (HP)

Tout réel positif x s'écrit de manière unique sous la forme

$$x = N + 0{,}a_1a_2\ldots = N + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n}$$

où $N \in \mathbb{N}$ et $(a_n)_{n\geqslant 1} \in [\![0,9]\!]^{\mathbb{N}^*}$ dont les termes ne sont pas constamment égaux à 9 à partir d'un certain rang.

On a en outre $N = \lfloor x \rfloor$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad a_n = \lfloor 10^n x \rfloor - 10\lfloor 10^{n-1}x \rfloor.$$

Définition 4 : développement décimal illimité propre

Une telle écriture est appelée **développement décimal illimité propre** de x.