2 Séries numériques

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Généralités sur les séries (MP2I)

1 Sommes partielles, convergence, divergence, somme

Définition 1 : Série, convergence

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite.
Étudier la **série de terme général** u_n, notée $\sum u_n$, c'est étudier la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n \in \mathbb{K}.$$

S_n est appelée **somme partielle d'ordre** n de la série $\sum u_n$.
$\sum u_n$ est dite **convergente** lorsque $(S_n)_n$ converge, **divergente** sinon.
Lorsqu'elle est convergente, on appelle **somme de la série** $\sum u_n$ le nombre

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

série de tg u_n

$\sum_{\substack{n=0\\ n\notin I}}^{+\infty} u_n$

Remarque

R1 – Enlever un nombre fini de termes à S_n ne change pas sa convergence.
Autrement dit, si I est fini, $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}\setminus I} u_n$ sont de même nature. Lorsqu'elles sont convergentes, on a $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n\in I} u_n + \sum_{n\in\mathbb{N}\setminus I} u_n$

Somme de la série

R2 – Une série peut n'être définie que pour $n \geqslant n_0$, et on note $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ la série dans ce cas.

R3 – Une série n'est rien d'autre qu'une suite. Tous les résultats sur les suites s'appliquent donc.
Cependant, en général, c'est en étudiant **son terme général** u_n (et non les sommes partielles) qu'on déduit des propriétés de la série.

R4 – Ne pas confondre la série $\sum u_n$ (qui n'est pas une somme !) et le **nombre** (lorsqu'il existe) $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \in \mathbb{K}$ (qui s'appelle somme de la série et qui n'est pas une somme ! C'est une limite...)

Propriété 1 : Séries géométriques

Si $q \in \mathbb{K}$, la série dite géométrique $\sum q^n$ converge si et seulement si $|q|<1$

Lorsque c'est le cas, $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$

Exemple : Série harmonique alternée

E1 – $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ est convergente de somme $\ln 2$.

Propriété 2 : Série exponentielle complexe

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$

2 Correspondance suite et séries

On a déjà vu qu'étudier la série de terme général u_n, c'est étudier la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles. On a alors (avec $S_{-1}=0$)

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ u_n = S_n - S_{n-1}}$$

Inversement, une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ peut-elle être vue comme suite de sommes partielles d'une série de terme général u_n ?

$$\begin{cases} v_0 = u_0 \\ v_1 = u_0+u_1 \\ v_2 = u_0+u_1+u_2 \\ \vdots \\ v_n = u_0+u_1+\cdots+u_n \end{cases} \iff \begin{cases} u_0 = v_0 \\ u_1 = v_1 - v_0 \\ u_2 = v_2 - v_1 \\ \vdots \\ u_n = v_n - v_{n-1} \end{cases}$$

Propriété 3 : Série télescopique

*Étudier la suite $(v_n)_n$, c'est étudier la série $\sum(v_n - v_{n-1})$ (en posant $v_{-1}=0$) appelée **série télescopique**.*

$$\sum_{k=0}^{n}(v_k - v_{k-1}) = v_n - v_{-1} = v_n .$$

Corollaire 1

Soit $(v_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. La suite (v_n) et la série $\sum(v_{n+1}-v_n)$ ont même nature et, si elles sont convergentes,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(v_{n+1}-v_n) = \lim_{+\infty} v - v_0$$

Exercice 1 : Nature de la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n(n+1)}$ et calcul de la somme.

Exercice 2 : Nature de $\sum_{n\geqslant 1}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

Remarque

R5 – Dans la pratique, il est très rare qu'on prouve la convergence en calculant les sommes partielles et qu'on puisse calculer explicitement la somme de la série.
Les séries géométriques et télescopiques en sont de rares exemples.

et exponentielles

3 Espace vectoriel des termes généraux de séries convergentes

Propriété 4 : Combinaison linéaire de termes généraux de séries convergentes

Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, et si $\lambda\in\mathbb{K}$, alors $\sum(u_n+\lambda v_n)$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(u_n+\lambda v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \lambda\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

Preuve : passer par les sommes partielles □

Remarque

R6 – Si $\sum u_n$ converge et $\sum v_n$ diverge, alors $\sum(u_n+v_n)$ diverge

R7 – Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent, alors on ne peut rien dire.

ex : $\sum 1$ et $\sum 1$ divergent et $\sum(1+1)$ diverge.

$\sum 1$ et $\sum -1$ DV et $\sum(1-1)$ CV

R8 – Si $\sum v_n$ diverge et $\lambda\in\mathbb{K}$, $\sum(\lambda v_n)$ diverge si et seulement si $\lambda\neq 0$

Propriété 5 : Convergence des séries à termes complexes

Si $\sum u_n$ est une série à termes complexe, elle converge si et seulement si les séries $\sum \mathfrak{Re}\, u_n$ et $\sum \mathfrak{Im}\, u_n$ convergent, et on a alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathcal{R}e\, u_n + i \sum_{n=0}^{+\infty} \mathcal{I}m\, u_n$$

(on applique la prop sur les suites aux sommes partielles)

Remarque

R 9 – Lorsqu'il y a convergence,

$$\mathfrak{Re}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathfrak{Re}(u_n)$$

et

$$\mathfrak{Im}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathfrak{Im}(u_n).$$

4 Condition nécessaire de convergence, divergence grossière

Propriété 6 : Divergence grossière

Si $u_n \not\to 0$, alors $\sum u_n$ diverge.
*On parle de **divergence grossière**.*

⚠ *La réciproque est fausse !*

*Si $u_n \to 0$, **ON NE PEUT RIEN DIRE** sur la convergence de $\sum u_n$.*

5 Reste d'une série convergente

Définition 2 : Reste d'une série convergente

Soit $\sum u_n$ une série **convergente** et $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

On appelle **reste d'ordre n de la série** $\sum u_n$ le nombre $R_n = S - S_n$ qui n'a un sens que si la série converge.

Propriété 7 : Reste sous forme de limite

Avec les mêmes hypothèses, $\sum_{k=n+1}^{N} u_k \xrightarrow[N\to+\infty]{} R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$

Exemple : Série géométrique

E 2 –

Propriété 8 : Le reste converge vers 0

*Soit $\sum u_n$ une série **convergente** et R_n son reste d'ordre n, alors $R_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$*

$(R_n = S - S_n)$

6 Un critère simple pour des séries à termes positifs

Propriété 9 : Convergence d'une série à termes positifs

*Soit (u_n) suite **réelle positive**, $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. Alors*

(i) (S_n) est croissante

(ii) (S_n) a une limite finie ou $+\infty$ $\left(\text{dans } \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\} = [0,+\infty]\right)$

(iii) $\sum u_n$ converge si et seulement si

(S_n) majorée

$x + (+\infty) = +\infty$

$+\infty + (+\infty) = +\infty$

Méthode 1 : Manipulation de sommes de séries dans $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$

Finalement, dans le cas d'une série à termes positifs, on peut toujours poser

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}.$$

Le programme autorise alors la manipulation algébrique dans $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ de sommes de séries à termes positifs même divergentes (dans ce cas la somme vaut $+\infty$) pourvu qu'on ne manipule que des nombres positifs ou $+\infty$ (pas de différences, par exemple).

Alors obtenir une somme finie équivaut à la convergence de la série : pratique !

Ce principe est généralisé dans le chapitre sur la sommabilité.

7 Séries alternées

Théorème 1 : Spécial sur *certaines* Séries Alternées (TSSA)

*Si $u = (u_n)_n$ est une suite **réelle** telle que*

H1 u décroissante

H2 $u \longrightarrow 0$

alors $\sum (-1)^n u_n$ converge

De plus, si on note $v_n = (-1)^n u_n$,

- *La somme S a le même signe que* v_0
- *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le reste d'ordre n, R_n, a le même signe que son premier terme* v_{n+1} *et vérifie*

$$|R_n| \leqslant |v_{n+1}| = u_{n+1}$$

Tous les résultats restent valables pour une série de la forme $\sum (-1)^{n+1} u_n$.

Exemple

E3 – $\sum \dfrac{(-1)^n}{n}$

Exercice 3 : CCINP 8

II Convergence absolue, séries à termes réels positifs (MP2I)

1 Comparaisons de termes généraux réels positifs

Les résultats de cette partie sont valables pour des séries à terme général réel positif. Cependant, l'étude étant asymptotique, ils s'appliquent plus généralement pour des séries à terme général positif à partir d'un certain rang.

Dans le cas où le terme général, est de signe constant (à partir d'un certain rang), on se ramène à un terme général positif quitte à étudier $\sum(-u_n)$ si le signe est négatif.

Théorème 2 : Comparaison des séries à termes réels positifs – cas de convergence

*Soient (u_n) et (v_n) deux suites **à termes réels positifs**.*

Si $\sum v_n$ CV *et si l'une des hypothèses suivantes est vérifiée :*

- $u_n = \mathcal{O}(v_n)$,
- $u_n = o(v_n)$,
- *apcr* $u_n \leqslant v_n$,
- $u_n \sim v_n$

alors $\sum u_n$ CV

Corollaire 2 : Comparaison des séries à termes positifs – cas de divergence

*Soient (u_n) et (v_n) deux suites **à termes positifs**.*

Si $\sum u_n$ DV *et si l'une des hypothèses suivantes est vérifiée :*

- $u_n = \mathcal{O}(v_n)$,
- $u_n = o(v_n)$,
- *apcr* $u_n \leqslant v_n$,
- $u_n \sim v_n$

alors $\sum v_n$ DV

Exemple

E4 – $\sum \dfrac{1}{n2^n}$

$0 \leqslant \dfrac{1}{n2^n} \leqslant \dfrac{1}{2^n}$ TGPSCV

par CSTGP, $\sum \dfrac{1}{n2^n}$ CV

E5 – $\sum \dfrac{1}{n^2}$

$0 \leqslant \dfrac{1}{n^2} \leqslant \dfrac{1}{n(n-1)} = -\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n-1}$

TGSTCV

par CSTGP, $\sum \dfrac{1}{n^2}$ CV

E6 – $\sum \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

$0 \leqslant \dfrac{1}{n} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ et $\sum \dfrac{1}{n}$ DV

par CSTGP, $\sum \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ DV

Propriété 10 : Cas de l'équivalence

*Soient (u_n) et (v_n) deux suites **à termes réels positifs** telles que $u_n \sim v_n$. Alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.*

Remarque

R 10 – Attention, pour les autres relations de comparaisons, ce n'est pas une équivalence ! Si $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ et $\sum u_n$ converge, on ne peut rien dire de $\sum v_n$ en général.

Exemple

E 7 – $\frac{1}{n^2} = \mathcal{O}(1)$, $\sum \frac{1}{n^2}$ converge mais $\sum 1$ diverge.

R 11 – Plus généralement, pour des séries réelles, il suffit que l'une des deux soit de signe constant à partir d'un certain rang, l'autre aura alors le même signe par équivalence et le résultat reste vrai.

Exemple

E 8 – $\sum \frac{1}{n}$ $\quad 0 \leq \frac{1}{n} \sim \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln(n+1) - \ln n$ TGSTDV. Par CSTGP, $\sum \frac{1}{n}$ DV

E 9 – $\sum \sin \frac{1}{n^2}$, $\sum \sin \frac{1}{n^3}$, $\sum \sin \frac{1}{\sqrt{n}}$.

2 Convergence absolue

Définition 3 : Convergence absolue

Une série $\sum u_n$ à valeur dans $\mathbb{K}$ est dite **absolument convergente** lorsque la série à termes réels positifs $\sum |u_n|$ converge.

Théorème 3 : convergence absolue $\Longrightarrow$ convergence

Si $\sum u_n$ converge absolument (donc si $\sum |u_n|$ converge), alors $\sum u_n$ converge.

La réciproque est fausse.

Remarque

R 12 – Lorsqu'une série est convergente mais n'est pas absolument convergente, on dit qu'elle est semi-convergente.

ex : $\sum \frac{(-1)^n}{n}$.

Propriété 11 : Inégalité triangulaire

Si $\sum u_n$ est absolument convergente,

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$$

IT aux sommes partielles puis $n \to +\infty$.

Méthode 2 : Utilisation de la comparaison pour des séries quelconques

On compare $|u_n|$ à une suite (v_n) à termes **réels positifs** (au moins à partir d'un certain rang), terme général d'une **série convergente**.

Dire que $u_n = \mathrm{o}(v_n)$ ou que $u_n = \mathcal{O}(v_n)$, c'est dire que $|u_n| = \mathrm{o}(v_n)$ ou que $|u_n| = \mathcal{O}(v_n)$.

Si $|u_n| = \mathrm{o}(v_n)$ ou $\mathcal{O}(v_n)$ ou $\leqslant v_n$ apcr, ou $\sim v_n$ alors la série $\sum u_n$ est absolument convergente donc convergente.

Pas de cas de divergence car il y a des séries semi-convergentes.

Exercice 4 : CCINP 46

3 Critère de d'Alembert (MPI)

Propriété 12 : Critère de d'Alembert

Soit (u_n) *suite* ***à termes réels strictement positifs*** *tel que*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \to \ell \in [0,+\infty].$$

- *Si* $\ell > 1$, $\sum u_n$ DV grossièrement
- *Si* $\ell < 1$, $\sum u_n$ CV
- *Si* $\ell = 1$, Cas douteux : on ne peut rien dire ex : $\sum \frac{1}{n}$ DV non gross., $\sum \frac{1}{n^2}$ CV

Exercice 5 : CCINP 6

4 Comparaison série-intégrale

a Comparaison et caractérisation de convergence

Détail dans le cas d'une fonction $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ décroissante et continue par morceaux, en s'appuyant sur un dessin.

Remarque

R 13 – Il est interdit d'apprendre ces formules par cœur. Le plus important est de savoir les retrouver sur un dessin et de refaire le calcul.

R 14 – On peut aussi faire une comparaison série-intégrale dans le cas d'une fonction croissante.

b Séries de Riemann

Théorème 4 : Séries de Riemann

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\sum \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge} \iff \alpha > 1$$

Remarque

R 15 – On pose pour $\alpha > 1$, $\zeta(\alpha) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^\alpha}$.

ζ est appelée fonction ζ de Riemann.

Méthode 3 : Règle du $n^\alpha u_n$

Soit $\sum u_n$ une série à termes réels positifs.

- S'il existe $\alpha > 1$ tel que $(n^\alpha u_n)$ est bornée (par exemple $n^\alpha u_n \to 0$), alors $u_n = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ donc $\sum u_n$ converge.
- S'il existe $\alpha \leqslant 1$ tel que $n^\alpha u_n \to +\infty$, alors $\frac{1}{n^\alpha} = o(u_n)$ donc $\sum u_n$ diverge.
- S'il existe $\alpha, \ell \in \mathbb{R}_*^+$ tels que $u_n \sim \frac{\ell}{n^\alpha}$, alors $\sum u_n$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Exemple

E 10 – $u_n = \frac{\cos n}{n^3}$.

E 11 – $u_n = \frac{\operatorname{Arctan} n}{\sqrt{n+1}}$

E 12 – $u_n = e^{-n^\beta}$ où $\beta \in \mathbb{R}$.

E 13 – $u_n = \frac{\ln n}{n^\beta}$ pour $\beta \in \mathbb{R}$.

E 14 – $u_n = n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \cos\frac{1}{\sqrt{n}}$.

Exercice 6 : CCINP 7

c Séries de Bertrand (HP mais classique)

Méthode 4 : Séries de Bertrand

Il s'agit des séries de terme général $\frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} \geqslant 0$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Hors programme, mais **très classique.**

Intuitivement, le terme en $\ln$ n'a pas une grande influence, donc le comportement correspond à celui d'une série de Riemann, sauf dans le cas limite où $\alpha = 1$, dans lequel le terme en $\ln$ peut permettre d'accélérer la convergence du terme général vers 0 et rendre la série convergente à condition que $\beta > 1$.

On montre donc que la série converge si et seulement si $\boxed{\alpha > 1 \text{ ou } (\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1).}$

- Cas de divergence grossière : $\alpha < 0$ ou $\left[\alpha = 0 \text{ et } \beta \leqslant 0\right]$
- Si $\alpha < 1$ (englobe le cas précédent) on minore asymptotiquement le terme général.
- Si $\alpha > 1$, on applique une règle du $n^\gamma u_n$
- Si $\alpha = 1$, on obtient la divergence de la série pour $\beta \leqslant 1$ par comparaison et la convergence de la série pour $\beta > 1$ à l'aide d'une comparaison série-intégrale.

Exercice 7 : CCINP 5

d Évaluation des sommes partielles et des restes

La comparaison série-intégrale est un bon outil pour évaluer asymptotiquement les sommes partielles dans le cas de divergence et les restes dans le cas de convergence.

Aucun résultat théorique au programme, voyons-le sur quelques exemples.

Exemple : Cas de divergence

E 15 – Divergence et équivalent des sommes partielles de $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n \ln n}$

E 16 – **Très classique :** Même question pour $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. En déduire la somme de la série harmonique alternée.

E 17 – Équivalent de $\sum_{k=0}^{n} k^\alpha$ où $\alpha > 0$.

Remarque

R 16 – Plus généralement avec une fonction décroissante et continue par morceaux, si $\sum f(n)$ diverge et $f(n) \to 0$, $S_n \sim F(n)$ où F primitive de f.

Exemple : Cas de convergence

E 18 – On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ et on cherche une estimation asymptotique de $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

Remarque

R 17 – Plus généralement avec une fonction décroissante et continue par morceaux, si $\sum f(n)$ converge de reste R_n, $I = \int_0^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $I_n = \int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t$,

$$I - I_{n+1} \leqslant R_n \leqslant I - I_n$$

ce qui permet d'avoir une estimation asymptotique de R_n.

III Formule de Stirling (MP2I)

Théorème 5 : Formule de Stirling

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Corollaire 3 : Développement asymptotique de $\ln(n!)$

On en déduit un développement asymptotique de $\ln(n!)$:

$$\ln(n!) = n\ln n - n + \frac{\ln n}{2} + \frac{\ln 2\pi}{2} + o(1)$$

À savoir retrouver plus que par cœur

IV Sommation des relations comparaison (MPI)

⚠ Ne pas confondre avec la comparaison du thm donnant la divergence de la série.

1 Cas de divergence

Théorème 6 : Sommation dans le cas de divergence

*Soient $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, v une suite **réelle positive**. On suppose que $\sum v_n$ **diverge**.*

On note $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et $\Sigma_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$.

(i) Si $u_n = O(v_n)$ alors $S_n = O(\Sigma_n)$

(ii) Si $u_n = o(v_n)$ alors $S_n = o(\Sigma_n)$

(iii) Si $u_n \sim v_n$ alors $S_n \sim \Sigma_n$

Remarque

R 18 – C'est encore valable si $v_n \geqslant 0$ seulement à partir d'un certain rang.

Exemple

E 19 – Équivalent de $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ en utilisant $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

Théorème 7 : de Cesàro

Si $u_n \to \ell \in \mathbb{K}$ (éventuellement infinie) et $v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u_k$ alors $v_n \to \ell$.

2 Cas de convergence

Théorème 8 : Sommation dans le cas de convergence

*Soient $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, v une suite **réelle positive**. On suppose que $\sum v_n$ **converge**.*

On note, sous réserve d'existence, $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ et $\rho_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$.

(i) Si $u_n = o(v_n)$ alors $\sum u_n$ cv et $R_n = o(\rho_n)$

(ii) Si $u_n = O(v_n)$ alors $\sum u_n$ cv et $R_n = O(\rho_n)$

(iii) Si $u_n \sim v_n$ alors $\sum u_n$ cv et $R_n \sim \rho_n$

Remarque

R 19 – C'est encore valable si $v_n \geqslant 0$ seulement à partir d'un certain rang.