1 Suites numériques (MP2I)

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Une suite peut être vue comme une famille $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ ou comme une application $n \in \mathbb{N} \mapsto u_n \in \mathbb{K}$, c'est équivalent.

On peut alors noter $\left| \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ n & \longmapsto & u_n \end{array} \right.$ ou $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(u_n)_n$ ou (u_n) **MAIS PAS u_n !!!**.

I Cas des suites réelles

1 Limites

Définition 1 : Limite

- Une suite $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est dite **convergente** vers $\ell \in \mathbb{R}$ si et seulement si

  $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - \ell| \leq \varepsilon$ ou $<$

- On dit que $(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ **diverge vers** $+\infty$ lorsque

  $\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \geq A$ ou $>$

  ou de manière équivalente

  $\forall A \geq 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \geq A$

  On note alors $u_n \to +\infty$.

- On dit que $(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ **diverge vers** $-\infty$ lorsque $-u_n \to +\infty$ soit

  $\forall B \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \leq B$

  ou de manière équivalente

  $\forall B \leq 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \leq B$

  On note alors $u_n \to -\infty$.

2 Limites et ordre

Propriété 1 : Passage des inégalités à la limite

Si $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que $u \to \ell \in \mathbb{R}$ et $v \to \ell' \in \mathbb{R}$ et si à partir d'un certain rang $u_n \leqslant v_n$, alors $\ell \leqslant \ell'$.

*Si on suppose à partir d'un certain rang $u_n < v_n$, **l'inégalité devient large à la limite** : $\ell \leqslant \ell'$.*

Propriété 2

Si $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tel que $u_n \to \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ et $a \in \mathbb{R}$, alors

- *Si $\ell > a$, à partir d'un certain rang $u_n > a$.*
- *Si $\ell < a$, à partir d'un certain rang $u_n < a$.*

Théorème 1 : Limite par encadrement

(i) Si $u, v, w \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{R}$ tels que

- $v \to \ell$
- $w \to \ell$
- *apcr* $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$

alors $u \to \ell$.

(ii) Si $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que

- $v \to +\infty$
- *apcr* $u_n \geqslant v_n$

alors $u \to +\infty$.

(iii) Si $u, w \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que

- $w \to -\infty$
- *apcr* $u_n \leqslant w_n$

alors $u \to -\infty$.

3 Opérations sur les limites

Propriété 3

Soient $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

(i) *Si* $\lambda \in \mathbb{R}$ *et* $u_n \to \ell \in \mathbb{R}$, *alors* $\lambda u_n \to \lambda \ell$.

(ii) *Si* $u \to 0$ *et* v *bornée, alors* $uv \to 0$.

Propriété 4 : Limite de somme et produit

Si $u \to \ell_1 \in \overline{\mathbb{R}}$ *et* $v \to \ell_2 \in \overline{\mathbb{R}}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, *alors lorsque ces opérations sont bien définies,*

- $u + v \to \ell_1 + \ell_2$
- $uv \to \ell_1 \ell_2$

Remarque

R 1 – Dans les cas douteux, il peut se passer tout et n'importe quoi.
Par exemple, pour $0 \times (+\infty)$:

- $\frac{1}{n} \times n^2 \to +\infty$
- $\frac{\alpha}{n} \times n \to \alpha$
- $\frac{-1}{n} \times n^2 \to -\infty$
- $\left(\frac{(-1)^n}{n} \times n\right)$ n'a pas de limite.

Propriété 5 : Limite d'inverse

- *Si* $u_n \to \ell \in \overline{\mathbb{R}}^*$, *alors à partir d'un certain rang,* $u_n \neq 0$ *et* $\frac{1}{u_n} \longrightarrow \begin{cases} \frac{1}{\ell} & \text{si } \ell \text{ finie} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
- *Si* $u_n \to 0$ *et à partir d'un certain rang* $u_n > 0$, *alors* $\frac{1}{u_n} \to +\infty$.
- *Si* $u_n \to 0$ *et à partir d'un certain rang* $u_n < 0$, *alors* $\frac{1}{u_n} \to -\infty$.

Propriété 6 : Convergence des suites géométriques réelles

Soit $q \in \mathbb{R}$.

- *Si* $q = 1$, $q^n \to 1$.
- *Si* $|q| < 1$, $q^n \to 0$.
- *Si* $q > 1$, $q^n \to +\infty$.
- *Si* $q \leqslant -1$, (q^n) *n'a pas de limite. Si* $q < -1$, *la suite n'est ni majorée, ni minorée.*

II Les suites monotones

1 Théorème de la limite monotone

Théorème 2 : Théorème de la limite monotone

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *une suite croissante (respectivement décroissante).*

(i) *Si* u *est majorée (respectivement minorée) alors* u *converge vers* $\sup_{n \in \mathbb{N}} u_n$ *(respectivement* $\inf_{n \in \mathbb{N}} u_n$*).*

(ii) *Si* u *n'est pas majorée (resp. minorée), alors* $u \to +\infty$ *(respectivement* $u \to -\infty$*).*

Corollaire 1

Si u *est une suite croissante majorée (respectivement décroissante minorée), alors* $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant \lim u$ *(respectivement* $u_n \geqslant \lim u$*).*

De plus, les inégalités sont strictes en cas de stricte monotonie.

2 Suites adjacentes

Définition 2 : Suites adjacentes

Soient $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. u et v sont adjacentes si
- l'une est croissante,
- l'autre est décroissante,
- $v - u \to 0$.

Exemple

E 1 – $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n^2}$ et $S'_n = S_n + \frac{1}{n}$.

E 2 – Si $x \in \mathbb{R}$, les suites d'approximation décimale par défaut et par excès $(d_n(x))$ et $(D_n(x))$ sont adjacentes.

Propriété 7

Si u, v sont adjacentes avec u croissante, alors u et v convergent vers une même limite $\ell \in \mathbb{R}$ et $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant \ell \leqslant v_n$, les inégalités étant strictes si u et v ont strictement monotones.

Remarque

R 2 – On a alors pour tout n, $|u_n - \ell| \leqslant |v_n - u_n| = v_n - u_n$ ce qui donne des information intéressante sur la **vitesse de convergence** : plus $v - u$ converge rapidement vers 0, plus u converge rapidement vers ℓ.

Cela permet aussi de connaître un rang à partir duquel u_n est une approximation de ℓ à une précision donnée.

Exemple

E 3 – **Approximations décimales** : $|d_n(x) - x| \leqslant$ $D_n(x) - d_n(x) = 10^{-n}$
Convergence très rapide (au moins exponentielle).
Si on veut n décimales, on calcule $d_n(x)$ (évidemment !).

E 4 – $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \to \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Vu le calcul précédent, pour tout n, $\left| S_n - \frac{\pi^2}{6} \right| \leqslant \frac{1}{n}$.
La converge est (au moins) en $\frac{1}{n}$ donc plutôt lente.
Si on veut n décimales, on calcule... S_{10^n} !

E 5 – **Dichotomie** : On construit des segments emboîtés en divisant leur taille par 2 à chaque étape : $I_0 = [a, b]$, pour tout n, $I_{n+1} \subset I_n$ avec $\ell(I_{n+1}) = \frac{\ell(I_n)}{2}$, avec $I_n = [a_n, b_n]$.
Alors $(a_n), (b_n)$ sont adjacentes, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \{\ell\}$ et la convergence de (a_n) et (b_n) vers ℓ est au moins en $\frac{b-a}{2^n}$ donc très rapide.

Exercice 1 : CCINP 43

III Critères séquentiels

1 Caractérisation séquentielle des bornes inférieure et supérieure

Propriété 8 : Caractérisation séquentielle de la borne supérieure

Soit A partie non vide $\mathbb{R}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$\alpha = \sup A \iff \begin{cases} \forall\, x \in A, & x \leqslant \alpha \\ \exists\, (a_n)_n \in A^{\mathbb{N}}, & a_n \to \alpha \end{cases}$$

sup = le seul majorant limite d'une suite d'éléments de la partie

Propriété 9 : Caractérisation séquentielle de la borne inférieure

Soit A partie non vide $\mathbb{R}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

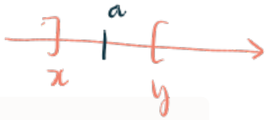
$$\beta = \inf A \Longleftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A, \quad x \geqslant \beta \\ \exists (a_n)_n \in A^{\mathbb{N}}, \quad a_n \to \beta \end{cases}$$

2 Caractérisation séquentielle de la densité

Définition 3 : Partie dense dans $\mathbb{R}$

Une partie A non vide de $\mathbb{R}$ est dite **dense** dans $\mathbb{R}$ lorsque pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ tel que $x < y$, $A \cap]x, y[\neq \varnothing$.

Si $x < y$, $\exists a \in A$, $x < a < y$



Remarque

R 3 – La définition sera étendue plus tard dans l'année.

Propriété 10 : Caractérisation séquentielle de la densité

Soit A une partie de $\mathbb{R}$. A est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si tout réel est limite d'une suite d'éléments de A.

Corollaire 2 : Cas des réels et des décimaux

(i) *Tout réel est limite d'une suite de rationnels et d'une suite d'irrationnels.*

(ii) *$\mathbb{D}$ est dense dans $\mathbb{R}$.*

$(d_n(x))_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ et même $\mathbb{D}^{\mathbb{N}}$ et $d_n(x) \longrightarrow x$

IV Extension aux suites complexes

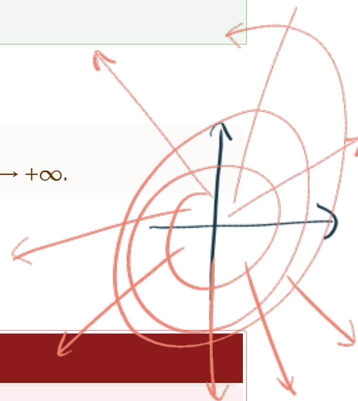
Notation 1 : Parties réelle et imaginaire, conjugué, module d'une suite complexe

Soit $z = (z_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On note $\mathfrak{Re}(z) = (\mathfrak{Re}(z_n)) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\mathfrak{Im}(z) = (\mathfrak{Im}(z_n)) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\overline{z} = (\overline{z_n}) \in \cancel{\mathbb{R}}\,\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, $|z| = (|z_n|) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Définition 4 : Convergence de suite complexe

Une suite $(z_n) \in \mathbb{C}$ est dite **convergente** vers $\ell \in \mathbb{C}$ si et seulement si $|z_n - \ell| \to 0$, c'est-à-dire

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists N \in \mathbb{N}, \ \forall n \geqslant N, \ |z_n - \ell| \leqslant \varepsilon.$$



Remarque

R 4 – Pas de limite infinie dans $\mathbb{C}$. On peut au mieux avoir $|z_n| \to +\infty$.

Propriété 11

Soit $(z_n) \in \mathbb{C}^n$ et $\ell \in \mathbb{C}$.

$$z_n \to \ell \Longleftrightarrow \mathfrak{Re}\, z_n \to \mathfrak{Re}\, \ell \text{ et } \mathfrak{Im}\, z_n \to \mathfrak{Im}\, \ell$$

Définition 5

Une suite $(z_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est dite **bornée** si et seulement s'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, \ |z_n| \leqslant M$.

Propriété 12 : Suites géométriques complexes

Soit $q \in \mathbb{C}$.

- *Si $q = 1$, $q^n \to 1$.*
- *Si $|q| < 1$, $q^n \to 0$.*
- *Si $|q| > 1$, (q^n) n'est pas bornée et donc diverge.*
- *Si $|q| = 1$ et $q \neq 1$, (q^n) diverge en étant bornée.*

Remarque

R5 – En particulier, si $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$, les suites $(\cos(n\theta))_n$ et $(\sin(n\theta))_n$ divergent. En effet, si l'une convergeait, à l'aide de $\cos((n+1)\theta)$ ou $\sin((n+1)\theta)$, on obtient que l'autre converge aussi et alors $\left(\mathrm{e}^{in\theta}\right)$ convergerait également.

V Suites récurrentes

1 Cas général

Le but est d'étudier les suites récurrentes réelles d'ordre 1 générales : $\forall n \in \mathbb{N},\quad u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f : D \to \mathbb{R}$.

Propriété 13

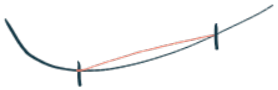
Si $u_n \to \ell \in D$ et si f est continue en ℓ, alors $f(\ell) = \ell$ (ℓ est un point fixe de f).

Méthode 1 : Étude générique de suite récurrente

- On commence en général par faire un dessin, et par voir quelles propriétés vérifient directement la suite.
- Parfois, les choses se voient clairement sur la formule de récurrence : ne pas se précipiter sur la méthode ci-dessous !
- Ensuite, les premières choses à cibler sont les **intervalles stables par** $f : I$ tel que $f(I) \subset I$.
  Alors, par récurrence, si à partir d'un certain rang $u_{n_0} \in I$, la suite est bien définie et $\forall n \geqslant n_0,\quad u_n \in I$.
  Vu la propriété précédente, bien souvent, l'une des bornes de l'intervalle sera un point fixe de f. (Il faut donc chercher les points fixes !)
  On pose en général $g(x) = f(x) - x$: les points fixes de f sont les zéros de g.
  Il faut aussi s'assurer que la suite est bien définie !
- Ensuite, on s'intéresse à la monotonie de f.
  - ⋆ La monotonie de la suite peut se trouver directement en remarquant que $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = g(u_n)$: il est donc primordial de connaître le signe de g.
  - ⋆ Si f est **croissante** sur I stable par f et $u_{n_0} \in I$, alors $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ est **monotone**.
    (Si $u_{n_0} \leqslant u_{n_0+1}$, ie $g\left(u_{n_0}\right) \geqslant 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
    $$u_n = f^{n-n_0}\left(u_{n_0}\right) \leqslant f^{n-n_0}\left(u_{n_0+1}\right) = u_{n+1}$$
    et si $u_{n_0} \geqslant u_{n_0+1}$, ie $g\left(u_{n_0}\right) \leqslant 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
    $$u_n = f^{n-n_0}\left(u_{n_0}\right) \geqslant f^{n-n_0}\left(u_{n_0+1}\right) = u_{n+1}.)$$
  - ⋆ Si f est **décroissante** sur I stable par f et $u_{n_0} \in I$, alors $(u_{2n})_{n \geqslant \frac{n_0}{2}}$ et $(u_{2n+1})_{n \geqslant \frac{n_0 - 1}{2}}$ sont **monotones**, de monotonie contraire. Elles sont en fait solution de $v_{n+1} = f \circ f(v_n)$ avec $f \circ f$ croissante.
    Lorsqu'elles convergent vers une même limite (c'est-à-dire qu'elles sont adjacentes), alors (u_n) converge vers cette limite. Notons que les points fixes de f sont des points fixes de $f \circ f$ (mais la réciproque est fausse en général.)

Exercice 2 : Étude de (u_n) telle que $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\quad u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 + 8}{6}$.

2 Cas d'une fonction contractante



Définition 6 : Fonction contractante

Une fonction f est dite **contractante** sur un intervalle I si et seulement si on a $k<1$ tel que $\forall\, x,x'\in I,\quad \left|f(x)-f(x')\right|\leqslant k\left|x-x'\right|$.

Cela se traduit graphiquement par le fait que les pentes des cordes ne sont « pas trop élevées ».

$$\left|\frac{f(x)-f(x')}{x-x'}\right|\leqslant k$$

Méthode 2 : Cas d'une fonction contractante

Cela est intéressant si I est stable par f. Si c'est le cas, si $\ell\in I$ point fixe de f (on peut montrer qu'il existe et est nécessairement unique), si $u_0\in I$ stable par f, alors $\forall\, n\in\mathbb{N},\quad u_n\in I$ et $\forall\, n\in\mathbb{N}$,

$$|u_n-\ell|=\left|f(u_{n-1})-f(\ell)\right|\leqslant k|u_{n-1}-\ell|\leqslant\cdots\leqslant k^n|u_0-\ell|\to 0$$

Donc directement $u_n\to\ell$, on a même une convergence exponentielle.

On peut parfois conclure rapidement grâce à l'inégalité des accroissements finis :

Théorème 3 : Inégalité des accroissements finis

Soit $f:I\to\mathbb{R}$. On suppose que

H1 f est continue sur I

H2 f est dérivable sur $\mathring{I}$ (intérieur de I : on enlève les bornes)

H3 On a $k\in\mathbb{R}$ tel que $\forall x\in\mathring{I},\ |f'(x)|\leqslant k$

Alors f est k-lipschitzienne :

$$\forall\, x,x'\in[a,b],\quad \left|f(x)-f(x')\right|\leqslant k\left|x-x'\right|.$$

Remarque

R6 – On peut démontrer que si ℓ est un point fixe de f de classe $\mathscr{C}^1$, alors

- si $\left|f'(\ell)\right|<1$, le point fixe est **attractif**, en particulier si $f'(\ell)=0$ (point **super-attractif**), la convergence est quadratique, comme pour la méthode de Newton,
- si $\left|f'(\ell)\right|>1$, le point fixe est **répulsif**,
- si $\left|f'(\ell)\right|=1$, c'est le cas douteux. Tout peut arriver.

Exercice 3 : $u_0\in\mathbb{R}^*$ **et** $\forall\, n\in\mathbb{N},\quad u_{n+1}=2+\dfrac{1}{u_n^2}$.

VI Relations de comparaison

1 Définition

Définition 7 : Relations de comparaison

Si $u,v\in\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et si v_n n'est jamais nul à partir d'un certain rang, on dit que

- u est **dominée** par v et on note $u=\mathcal{O}(v)$ lorsque $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_n$ est bornée.
- u est **négligeable** devant v et on note $u=\mathrm{o}(v)$ ou $u_n\ll v_n$ lorsque $\dfrac{u_n}{v_n}\to 0$.
- u est **équivalente** à v et on note $u\sim v$ lorsque $\dfrac{u_n}{v_n}\to 1$, soit encore $u-v=\mathrm{o}(v)$, c'est-à-dire $u=v+\mathrm{o}(v)$.

Remarque

R7 – La définition se généralise au cas où $(v_n)_n$ est quelconque en écrivant $u_n=v_n\times w_n$ avec $(w_n)_n$ bornée (respectivement $\to 0,1$).

R 8 – ⚠ $u = o(v)$ et $u = \mathcal{O}(v)$ traduisent une **appartenance**.

Exemple

E 6 – $n = o(n^3)$ et $n^2 = o(n^3)$ mais $n \neq n^2$!

R 9 – $u = \mathcal{O}(v)$ signifie qu'il existe $K \in \mathbb{R}$ et un rang à partir duquel $|u_n| \leqslant K|v_n|$.

$u = o(v)$ signifie que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang à partir duquel $|u_n| \leqslant \varepsilon |v_n|$.

R 10 – Il n'y a pas unicité de l'équivalent d'une suite. En général, on choisit le plus simple.

R 11 – Cela ne donne que des informations asymptotiques sur les suites : au voisinage de $+\infty$, donc à partir d'un certain rang.

Propriété 14 : Croissances comparées des suites usuelles

Si $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $q > 1$,

$$\ln^\beta n \ll n^\alpha \ll q^n \ll n! \ll n^n$$

$$\frac{1}{n^n} \ll \frac{1}{n!} \ll \frac{1}{q^n} \ll \frac{1}{n^\alpha} \ll \frac{1}{\ln^\beta n}.$$

$\frac{n \ln n}{n^2} = \frac{\ln n}{n} \longrightarrow 0$

Exemple

$\ln n \ll n \ll n \ln n \ll n^2$.

$\frac{n}{n \ln n} = \frac{1}{\ln n} \longrightarrow 0$

Propriété 15

$$u \sim v \iff u = v + o(v)$$

2 Propriétés

Propriété 16 : Propriétés de o et O

Soient $u, v, w, a, b \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, v, w, b ne s'annulant pas à partir d'un certain rang, et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

(i) *Si $\alpha \neq 0$, $u = o(\alpha v) \Longrightarrow u = o(v)$ et $u = \mathcal{O}(\alpha v) \Longrightarrow u = \mathcal{O}(v)$.*

(ii) *$u = o(1) \iff u \to 0$ et $u = \mathcal{O}(1) \iff u$ bornée.*

(iii) *Si $u = o(v)$ ou $u \sim v$, alors $u = \mathcal{O}(v)$ et la réciproque est fausse.*

(iv) ***Transitivité***

$$u = o(v) \text{ et } v = o(w) \Longrightarrow u = o(w)$$

$$u = \mathcal{O}(v) \text{ et } v = \mathcal{O}(w) \Longrightarrow u = \mathcal{O}(w)$$

(v) ***Combinaison linéaire***

$$u = o(w) \text{ et } v = o(w) \Longrightarrow \alpha u + \beta v = o(w)$$

$$u = \mathcal{O}(w) \text{ et } v = \mathcal{O}(w) \Longrightarrow \alpha u + \beta v = \mathcal{O}(w)$$

(vi) ***Produit***

$$u = o(v) \text{ et } a = o(b) \Longrightarrow ua = o(vb)$$

$$u = \mathcal{O}(v) \text{ et } a = \mathcal{O}(b) \Longrightarrow ua = \mathcal{O}(vb)$$

Propriété 17 : Propriétés de $\sim$

Soient $u, v, w, a, b \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, v, w, b ne s'annulant pas à partir d'un certain rang.

(i) *$\sim$ est une relation d'équivalence.*

R + S + T

$u \sim u$ $u \sim v \Rightarrow v \sim u$ $\begin{cases} u \sim v \\ v \sim w \end{cases} \Rightarrow u \sim w$

(ii) *Si $u \sim v$ et $v \to \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ ou $\mathbb{C}$, alors $u \to \ell$.*

(iii) *$u \to \ell$ $\boxed{\neq 0}$ $\iff u \sim \ell$.*

(iv) *Si $u \sim v$, alors à partir d'un certain rang, u_n et v_n sont de même signe.*

(v) *Si $u \sim v$ et $a \sim b$, alors $ua \sim vb$ et $\frac{u}{a} \sim \frac{v}{b}$.*

(vi) *Si $u \sim v$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ **fixé**, ($u_n > 0$ et $v_n > 0$ si $\alpha \notin \mathbb{N}$, non nuls si $\alpha \in \mathbb{Z}^-$), $u^\alpha \sim v^\alpha$.*

(vii) *Si $u_n \sim v_n$ et φ extractrice, $u_{\varphi(n)} \sim v_{\varphi(n)}$.*

$\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ str. ↗

Remarque

$n^2+1 \sim n^2$ et $n^2+1-n^2 \not\to 0$

$\frac{1}{n} \not\sim \frac{1}{n^2}$ et $\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \to 0$

R 12 – ⚠ $u_n \sim v_n \not\Longleftrightarrow u_n - v_n \to 0$

R 13 – ⚠ Si α n'est pas fixe : $1 + \frac{1}{n} \sim 1$ mais $\boxed{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \sim \mathrm{e}}$ donc $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \not\sim 1^n = 1$.

R 14 – ⚠ On n'ajoute pas les équivalents.

R 15 – ⚠ Si on trouve une suite équivalente à 0, on s'est trompé ! (En général, on a ajouté/soustrait des équivalents...)
Cela n'a pas de sens avec la définition du programme, et même avec la généralisation, cela voudrait dire qu'on peut écrire à partir d'un certain rang $u_n = 0 \times w_n = 0$ donc que la suite est nulle à partir d'un certain rang.
En particulier, si $u_n \to 0$, on ne peut pas donner facilement un équivalent en général.

R 16 – ⚠ On ne compose pas des équivalents par la gauche avec des fonctions, même continues.

La propriété suivante n'est pas officiellement au programme mais à savoir retrouver :

$e^{u_n - v_n} \to 1$

- $\mathrm{e}^{u_n} \sim \mathrm{e}^{v_n} \Longleftrightarrow u_n - v_n \to 0$
- Si $u_n \sim v_n$ avec pour tout n, $u_n > 0$ et $v_n > 0$, à partir d'un certain rang $v_n \neq 1$ et si $v_n \to \ell \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ avec $\boxed{\ell \neq 1,}$ alors $\ln u_n \sim \ln v_n$.

Exercice 4 : Intégrales de Wallis : Très classique !

Détermination d'un équivalent de l'intégrale de Wallis

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t \,\mathrm{d}t$$

- **Relation de récurrence,**
- **Expression de I_n**
- **Décroissance,**
- $I_n \sim I_{n-1}$,
- $n I_n I_{n-1}$ **constant,**
- **Équivalent de I_n.**

3 Équivalents usuels

Propriété 18 : Formule de Stirling

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n = \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}$$

Exercice 5 : Équivalent de $u_n = \binom{2n}{n}$

Propriété 19 : Équivalents usuels

Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$ fixé et $h_n \to 0$.

- $\sin h_n \sim h_n$
- $\tan h_n \sim h_n$
- $\cos h_n - 1 \sim -\frac{h_n^2}{2}$
- $\ln(1+h_n) \sim h_n$
- $\mathrm{e}^{h_n} - 1 \sim h_n$
- $(1+h_n)^\alpha - 1 \sim \alpha h_n$
- $\operatorname{Arctan} h_n \sim h_n$
- $\operatorname{Arcsin} h_n \sim h_n$
- $\operatorname{sh} h_n \sim h_n$
- $\operatorname{th} h_n \sim h_n$

Remarque

R 17 – Lorsque l'on est au voisinage de a, on se ramène en général au voisinage de 0 en posant $x = a + h$ si a est fini et $x = \frac{1}{h}$ si a est infini.

Exercice 6 : Limite de $u_n = n\left(\left(1 - \sin\dfrac{1}{n^2}\right)^n - 1\right)$.

4 Exemples de développements asymptotiques

Définition 8 : Développement asymptotique

On appelle **développement asymptotique** de $(u_n)_n$ toute expression de la forme
$$u_n = v_n^{(1)} + v_n^{(2)} + \cdots + v_n^{(r)} + \mathrm{o}\left(v_n^{(r)}\right)$$
où $v^{(1)}, \ldots, v^{(r)}$ sont des suites telles que $v_n^{(1)} \gg v_n^{(2)} \gg \cdots \gg v_n^{(r)}$, c'est-à-dire telles que $\forall\, k \in [\![1, r-1]\!],\ \ v_n^{(k+1)} = \mathrm{o}\left(v_n^{(k)}\right)$.

On dit que le développement asymptotique est **à la précision** $v_n^{(r)}$.

Remarque

R 18 – On a toujours que $u_n - v_n^{(1)} - \cdots - v_n^{(r)} \sim v_n^{(k+1)}$. C'est un des moyen de former un développement asymptotique : par la recherche d'équivalents successifs.

R 19 – On peut adapter la définition précédente pour des fonctions au voisinage d'un point : c'est une généralisation du développement limité.

Méthode 3 : Calcul de développement asymptotique

Chercher un développement asymptotique d'une suite est souvent délicat. On peut par exemple essayer de :

1. reconnaître un développement limité « déguisé » ;
2. chercher un équivalent $u_n \sim v_n$ qui donne $u_n = v_n + \mathrm{o}(v_n)$, puis un équivalent de la différence $u_n - v_n \sim w_n$ qui donne $u_n = v_n + w_n + \mathrm{o}(w_n)$ et ainsi de suite ;
3. réinjecter le développement partiel dans une expression du terme général de la suite pour obtenir le terme suivant.

Exercice 7 : Développement asymptotique en $+\infty$ de $f : n \mapsto \mathrm{e}^{\sqrt{n^2+2n+4}}$ à la précision $\dfrac{\mathrm{e}^n}{n}$.

Exercice 8 : Développement asymptotique en $+\infty$ de $f : x \mapsto \ln(\operatorname{ch} x)$ à la précision e^{-4x}. Asymptote ?

Exercice 9 : Développement asymptotique à trois termes de $x^{1+\frac{1}{x}}$ en $+\infty$. Asymptote ?

Exercice 10

On s'intéresse à u_n unique zéro de $f_n(x) = 1 + x + \dfrac{\mathrm{e}^x}{n}$.

1. **Vérifier que la suite (u_n) est bien définie, majorée par -1 et croissante.**
2. **Déterminer la limite de (u_n).**
3. **Déterminer un développement asymptotique à 3 termes de (u_n).**

VII Suites extraites, valeurs d'adhérence

Définition 9 : Suite extraite

Soit $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. On appelle **suite extraite** ou **sous-suite** de u toute suite $v \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ telle qu'il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_{\varphi(n)}$.

φ est appelée **extractrice**.

Lemme 1

Si φ est une extractrice, alors $\forall n \in \mathbb{N},\ \varphi(n) \geqslant n$.

Par récurrence (exo)

Propriété 20

Si $u \longrightarrow \ell$, toute suite extraite de u converge vers ℓ.

Définition 10 : Valeur d'adhérence

On appelle **valeur d'adhérence** de $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ toute limite (dans $\mathbb{K}$) de suite extraite de u.

Exemple

E 7 – Valeurs d'adhérence de $(-1)^n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ pair} \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}$

→ -1 et 1

$(-1)^{2n} \to 1$

$(-1)^{2n+1} \to -1$

on ne se rapproche d'aucun autre réel.

Propriété 21

Une suite convergente a une unique valeur d'adhérence.

Remarque

R 20 – Réciproque fausse.

Exemple

E 8 – $u_n = n$ si n est pair et 0 sinon.

Corollaire 3

Si une suite a plusieurs valeurs d'adhérence, elle diverge.

(contraposée)

Propriété 22

Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers une même limite, alors u converge vers cette limite.

Extension : il suffit de prendre des suites extraites qui recouvrent tous les termes de la suite. ex $(u_{3n}), (u_{3n+1}), (u_{3n+2})$

Théorème 4 : de Bolzano-Weierstraß dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Toute suite réelle ou complexe bornée a au moins une valeur d'adhérence.

VIII Théorème de Cesàro (MPI)

Théorème 5 : de Cesàro

Soit $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ telle que $u_n \longrightarrow \ell$ finie ou non

Soit $v \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u_k$

Alors $v_n \longrightarrow \ell$.

Une application classique est la recherche d'équivalent d'une suite récurrente.

Preuve : cf chapitre séries.

Exercice 11 : Oral CCINP

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n \mathrm{e}^{-u_n}$.

1. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle convergente. On pose ℓ sa limite et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $y_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} x_k$.
   Démontrer que la suite $(y_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers ℓ.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et calculer sa limite.
3. Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}$. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1.
4. En déduire un équivalent de u_n. La série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge-t-elle ?

IX Récurrences linéaires d'ordre 1 et 2

Propriété 22 : Suites arithmético-géométrique

Soit une suite $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ telle qu'on ait $a, b \in \mathbb{K}$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = a u_n + b$$

Alors, si $\tilde{u}$ est solution particulière, on a $u = v + \tilde{u}$ où v est solution de (H) $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = a v_n$, équation homogène associée.
On cherche $\tilde{u}$ constante en général.

Propriété 23 : récurrence linéaire d'ordre 2 homogène à cœfficients constants

*On considère une suite $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ **récurrente linéaire d'ordre 2 homogène à cœfficients constants**, c'est-à-dire telle qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ tels que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n.$$

*On appelle **équation caractéristique** associée (E) $r^2 = ar + b$.*
On suppose $(a, b) \neq (0, 0)$. Alors

- *Soit (E) admet deux solutions distinctes r_1 et r_2 dans $\mathbb{K}$, alors on a $A, B \in \mathbb{K}$ tels que*
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = A r_1^n + B r_2^n.$$
- *Soit (E) admet une unique solution (double) r dans $\mathbb{K}$, alors on a $A, B \in \mathbb{K}$ tels que*
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (A + nB) r^n.$$
- *Soit (E) n'admet pas de solution dans $\mathbb{K}$, c'est-à-dire $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et (E) admet deux solutions complexes conjuguées $\rho \mathrm{e}^{\pm i\theta}$ avec $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$. Alors on a $A, B \in \mathbb{R}$ tels que*
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (A\cos(n\theta) + B\sin(n\theta))\rho^n$$
c'est-à-dire qu'on a $K, \varphi \in \mathbb{R}$ tels que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = K\cos(n\theta + \varphi)\rho^n.$$