

Suites numériques (MP21)

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

Une suite peut être vue comme une famille $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ ou comme une application $n \in \mathbb{N} \mapsto u_n \in \mathbb{K}$, c'est équivalent.

On peut alors noter $\begin{cases} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ n & \longmapsto & u_n \end{cases}$ ou $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou $(u_n)_n$ ou (u_n) **MAIS PAS u_n !!!**.

CAS DES SUITES RÉELLES

1 Limites

Définition 1 : Limite

- Une suite $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est dite **convergente** vers $\ell \in \mathbb{R}$ si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

- On dit que $(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ **diverge vers** $+\infty$ lorsque

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \geq A$$

ou de manière équivalente

$$\forall A \geq 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \geq A$$

On note alors $u_n \rightarrow +\infty$.

- On dit que $(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ **diverge vers** $-\infty$ lorsque $-u_n \rightarrow +\infty$ soit

$$\forall B \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \leq B$$

ou de manière équivalente

$$\forall B \leq 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \leq B$$

On note alors $u_n \rightarrow -\infty$.

2 Limites et ordre

Propriété 1 : Passage des inégalités à la limite

Si $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que $u \rightarrow \ell \in \mathbb{R}$ et $v \rightarrow \ell' \in \mathbb{R}$ et si à partir d'un certain rang $u_n \leq v_n$, alors $\ell \leq \ell'$.
Si on suppose à partir d'un certain rang $u_n < v_n$, **l'inégalité devient large à la limite** : $\ell < \ell'$.

Démonstration

Soit $\varepsilon > 0$.

On a $N_1, N_2, N_3 \in \mathbb{N}$ tels que

- si $n \geq N_1$, $|u_n - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2}$,
- si $n \geq N_2$, $|v_n - \ell'| \leq \frac{\varepsilon}{2}$,
- si $n \geq N_3$, $u_n \leq v_n$.

Alors si $n \geq \max(N_1, N_2, N_3)$, $\ell - \frac{\varepsilon}{2} \leq u_n \leq v_n \leq \ell' + \frac{\varepsilon}{2}$.

Ainsi, $\forall \varepsilon > 0$, $\ell - \ell' \leq \varepsilon$.



Donc $\ell - \ell'$ minore \mathbb{R}_+^* , donc $\ell - \ell' \leq \inf \mathbb{R}_+^* = 0$, d'où le résultat.

Contre-exemple pour l'inégalité stricte : si $u_n = \frac{1}{n+1}$ et $v_n = \frac{1}{n}$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n < v_n$ et les deux suites tendent vers 0. ■

Propriété 2

Si $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tel que $u_n \rightarrow \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ et $a \in \mathbb{R}$, alors

- Si $\ell > a$, à partir d'un certain rang $u_n > a$.
- Si $\ell < a$, à partir d'un certain rang $u_n < a$.

Démonstration

Si $\ell = \pm\infty$, c'est la définition (quitte à prendre $A = a + 1$ ou $B = a - 1$).

Si $\ell \in \mathbb{R}$, on choisit $\varepsilon = |\ell - a|$.

- Si $\ell > a$, à partir d'un certain rang, $|u_n - \ell| < \ell - a$ donc $u_n > \ell - (\ell - a) = a$.
- Si $\ell < a$, à partir d'un certain rang, $|u_n - \ell| < a - \ell$ donc $u_n < \ell + (a - \ell) = a$. ■

Théorème 1 : Limite par encadrement

(i) Si $u, v, w \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{R}$ tels que

- $v \rightarrow \ell$
- $w \rightarrow \ell$
- apcr $v_n \leq u_n \leq w_n$

alors $u \rightarrow \ell$.

(ii) Si $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que

- $v \rightarrow +\infty$
- apcr $u_n \geq v_n$

alors $u \rightarrow +\infty$.

(iii) Si $u, w \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que

- $w \rightarrow -\infty$
- apcr $u_n \leq w_n$

alors $u \rightarrow -\infty$.

Démonstration

(i) Soit $\varepsilon > 0$.

On a $N_1, N_2, N_3 \in \mathbb{N}$ tels que

- $\forall n \geq N_1, |v_n - \ell| \leq \varepsilon$
- $\forall n \geq N_2, |w_n - \ell| \leq \varepsilon$
- $\forall n \geq N_3, v_n \leq u_n \leq w_n$

Alors si $N = \max(N_1, N_2, N_3) \in \mathbb{N}$ et si $n \geq N$,

$$\ell - \varepsilon \leq v_n \leq u_n \leq w_n \leq \ell + \varepsilon$$

donc $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$.

(ii) Soit $A \in \mathbb{R}$.

On a $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tels que

- $\forall n \geq N_1, v_n \geq A$
- $\forall n \geq N_2, u_n \geq v_n$

Alors si $N = \max(N_1, N_2) \in \mathbb{N}$ et si $n \geq N, u_n \geq A$.

(iii) $-w \rightarrow +\infty$ et apcr $-u_n \geq -w_n$ donc, par (ii), $-u \rightarrow +\infty$ donc $u \rightarrow -\infty$. ■

3 Opérations sur les limites

Propriété 3

Soient $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

- (i) Si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u_n \rightarrow \ell \in \mathbb{R}$, alors $\lambda u_n \rightarrow \lambda \ell$.
- (ii) Si $u \rightarrow 0$ et v bornée, alors $uv \rightarrow 0$.

Démonstration

- (i) Si $\lambda = 0$, c'est immédiat. Sinon, soit $\varepsilon > 0$.
On a $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geq N$, $|u_n - \ell| \leq \varepsilon_0 = \dots$ (à déterminer)
Alors si $n \geq N$, $|\lambda u_n - \lambda \ell| = |\lambda| |u_n - \ell| \leq |\lambda| \varepsilon_0 = \varepsilon$ en choisissant $\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon}{|\lambda|} > 0$.
- (ii) On a $M > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|v_n| \leq M$.
Alors si $n \in \mathbb{N}$, $|u_n v_n| = |u_n| |v_n| \leq M |u_n| \rightarrow 0$ d'après (i), donc $u_n v_n \rightarrow 0$.
- (iii) Soit $A \in \mathbb{R}$. On a $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geq N$, $u_n \geq A_0 = \dots$ (à déterminer)
On a $m \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \geq m$.
Alors si $n \geq N$, $u_n + v_n \geq A_0 + m = A$ en prenant $A_0 = A - m \in \mathbb{R}$. ■

Propriété 4 : Limite de somme et produit

Si $u \rightarrow \ell_1 \in \overline{\mathbb{R}}$ et $v \rightarrow \ell_2 \in \overline{\mathbb{R}}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, alors lorsque ces opérations sont bien définies,

- $u + v \rightarrow \ell_1 + \ell_2$
- $uv \rightarrow \ell_1 \ell_2$

Remarque

R1 – Dans les cas douteux, il peut se passer tout et n'importe quoi.
Par exemple, pour $0 \times (+\infty)$:

- $\frac{1}{n} \times n^2 \rightarrow +\infty$
- $\frac{\alpha}{n} \times n \rightarrow \alpha$
- $\frac{-1}{n} \times n^2 \rightarrow -\infty$
- $\left(\frac{(-1)^n}{n} \times n\right)$ n'a pas de limite.

Démonstration

■ Cas fini

★ Si $u_n \rightarrow \ell_1 \in \mathbb{R}$ et $v_n \rightarrow \ell_2 \in \mathbb{R}$, alors $u_n + v_n \rightarrow \ell_1 + \ell_2$:

Soit $\varepsilon > 0$. On a $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geq N_1$, $|u_n - \ell_1| \leq \varepsilon_0 = \frac{\varepsilon}{2}$ et si $n \geq N_2$, $|v_n - \ell_2| \leq \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2}$.

Alors si $N = \max(N_1, N_2) \in \mathbb{N}$ et si $n \geq N$,

$$|(u_n + v_n) - (\ell_1 + \ell_2)| \leq |u_n - \ell_1| + |v_n - \ell_2| \leq \varepsilon_0 + \varepsilon_1 = \varepsilon$$

★ Si $u_n \rightarrow \ell_1 \in \mathbb{R}$ et $v_n \rightarrow \ell_2 \in \mathbb{R}$, alors $u_n v_n \rightarrow \ell_1 \ell_2$:

$$\begin{aligned} |u_n v_n - \ell_1 \ell_2| &= |(u_n - \ell_1)v_n + \ell_1(v_n - \ell_2)| \\ &\leq \underbrace{|u_n - \ell_1|}_{\rightarrow 0} \underbrace{|v_n|}_{\text{CV donc bornée}} + \underbrace{|v_n - \ell_2|}_{\rightarrow 0} \underbrace{|\ell_1|}_{\text{borné}} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

en utilisant la somme des limites. Donc $u_n v_n \rightarrow \ell_1 \ell_2$.



■ Cas infini

★ Si $u_n \rightarrow \ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et $v_n \rightarrow +\infty$, alors $u_n + v_n \rightarrow +\infty$:

u est minorée et $v \rightarrow +\infty$.

★ Si $u_n \rightarrow \ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $v_n \rightarrow -\infty$, alors $u_n + v_n \rightarrow -\infty$:

$-u \rightarrow -\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et $-v \rightarrow +\infty$, donc $-u - v \rightarrow +\infty$.

★ Si $u_n \rightarrow \ell \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$ et $v_n \rightarrow +\infty$, alors $u_n v_n \rightarrow +\infty$:

Soit $m > 0$ tel que $m < \ell$ (par exemple $\frac{\ell}{2}$ si ℓ est finie, 1 sinon).

On a $N_1 \in \mathbb{N}$ tels que si $n \geq N_1$, $u_n \geq m > 0$.

Soit $A \geq 0$. On a $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geq N_2$, $v_n \geq A_0 = \frac{A}{m}$.

Alors si $n \geq \max(N_1, N_2)$, $u_n v_n \geq m \frac{A}{m} = A$.

★ Si $u_n \rightarrow \ell \in \mathbb{R}_-^* \cup \{-\infty\}$ et $v_n \rightarrow -\infty$, alors $u_n v_n \rightarrow +\infty$:

$-u \rightarrow -\ell \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$ et $-v \rightarrow +\infty$, donc $uv = (-u)(-v) \rightarrow +\infty$.

★ Si $u_n \rightarrow \ell \in \mathbb{R}_-^* \cup \{-\infty\}$ et $v_n \rightarrow +\infty$, alors $u_n v_n \rightarrow -\infty$:

$-u \rightarrow -\ell \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$ et $v \rightarrow +\infty$, donc $-uv = (-u)v \rightarrow +\infty$.

★ Si $u_n \rightarrow \ell \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$ et $v_n \rightarrow -\infty$, alors $u_n v_n \rightarrow -\infty$:

$u \rightarrow \ell \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$ et $-v \rightarrow +\infty$, donc $-uv = u(-v) \rightarrow +\infty$.

Propriété 5 : Limite d'inverse

- Si $u_n \rightarrow \ell \in \overline{\mathbb{R}}^*$, alors à partir d'un certain rang, $u_n \neq 0$ et $\frac{1}{u_n} \rightarrow \begin{cases} \frac{1}{\ell} & \text{si } \ell \text{ finie} \\ \ell & \text{sinon} \\ 0 & \end{cases}$
- Si $u_n \rightarrow 0$ et à partir d'un certain rang $u_n > 0$, alors $\frac{1}{u_n} \rightarrow +\infty$.
- Si $u_n \rightarrow 0$ et à partir d'un certain rang $u_n < 0$, alors $\frac{1}{u_n} \rightarrow -\infty$.

Démonstration

- Si $u_n \rightarrow \ell \in \mathbb{R}^*$, $|u_n| - |\ell| > \frac{|\ell|}{2} > 0$ donc on a $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geq N$, $|u_n| > \frac{|\ell|}{2} > 0$ et en particulier $u_n \neq 0$.
Si $n \geq N$,

$$\left| \frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell} \right| = \frac{|u_n - \ell|}{|u_n| |\ell|} \leq \frac{2}{|\ell|^2} |u_n - \ell| \rightarrow 0$$

donc $\frac{1}{u_n} \rightarrow \frac{1}{\ell}$.

- Si $u_n \rightarrow +\infty$ et $\varepsilon > 0$, on a $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geq N$, $u_n \geq \frac{1}{\varepsilon} > 0$. Alors $\left| \frac{1}{u_n} \right| = \frac{1}{u_n} \leq \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon$.
- Si $u_n \rightarrow -\infty$, $-u \rightarrow +\infty$ et $\frac{1}{u} = -\frac{1}{-u} \rightarrow 0$.
- Si $u_n \rightarrow 0^+$ et $A > 0$, on a $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geq N$, $|u_n| = u_n \leq \frac{1}{A}$ donc $\frac{1}{u_n} \geq A$.
- Si $u_n \rightarrow 0^-$, $-u \rightarrow 0^+$ et $\frac{1}{u} = -\frac{1}{-u} \rightarrow -\infty$.

Propriété 6 : Convergence des suites géométriques réelles

Soit $q \in \mathbb{R}$.

- Si $q = 1$, $q^n \rightarrow 1$.
- Si $|q| < 1$, $q^n \rightarrow 0$.
- Si $q > 1$, $q^n \rightarrow +\infty$.
- Si $q \leq -1$, (q^n) n'a pas de limite. Si $q < -1$, la suite n'est ni majorée, ni minorée.

Démonstration

- Si $q = 1$, ok.
- Si $|q| < 1$, $|q^n| = |q|^n = e^{n \ln|q|} \rightarrow 0$.
- Si $q > 1$, $q^n = e^{n \ln q} \rightarrow +\infty$.
- Si $q < -1$, $q^{2k} \rightarrow +\infty$ et $q^{2k+1} \rightarrow -\infty$ donc (q^n) n'est ni majorée, ni minorée. En particulier, elle n'a pas de limite. ■

Démonstration

- Si $\ell < 1$, soit q tel que $\ell < q < 1$. À partir d'un certain rang n_0 , on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq q$ donc $u_{n+1} \leq qu_n$. Alors, par récurrence, si $n \geq n_0$, $0 < u_n \leq q^{n-n_0} u_{n_0} \rightarrow 0$. Donc $u \rightarrow 0$.
- Si $\ell > 1$, soit q tel que $1 < q < \ell$. À partir d'un certain rang n_0 , on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq q$ donc $u_{n+1} \geq qu_n$. Alors, par récurrence, si $n \geq n_0$, $u_n \geq q^{n-n_0} u_{n_0} \rightarrow +\infty$. Donc $u \rightarrow +\infty$.
- $\frac{n+1}{n} \rightarrow 1$ et $n \rightarrow +\infty$. $\frac{1}{n+1} \rightarrow 0$ et $\frac{1}{n} \rightarrow 0$. ■

II LES SUITES MONOTONES

1 Théorème de la limite monotone

Théorème 2 : Théorème de la limite monotone

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite croissante (respectivement décroissante).

- (i) Si u est majorée (respectivement minorée) alors u converge vers $\sup_{n \in \mathbb{N}} u_n$ (respectivement $\inf_{n \in \mathbb{N}} u_n$).
- (ii) Si u n'est pas majorée (resp. minorée), alors $u \rightarrow +\infty$ (respectivement $u \rightarrow -\infty$).

Démonstration

Soit $E = \{u_n, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$. Alors $E \neq \emptyset$. On suppose u croissante (si u est décroissante, il suffit d'appliquer les résultats à $-u$ qui est croissante.)

- (i) Si u est majorée, $\ell = \sup u_n = \sup E$ existe. Soit $\varepsilon > 0$.
Par caractérisation de la borne supérieure, on a $N \in \mathbb{N}$ tel que $\ell - \varepsilon < u_N$ ($\ell - \varepsilon$ ne majore pas u).
Alors par croissance de u ,

$$\forall n \geq N, \ell - \varepsilon \leq u_N \leq u_n \leq \sup u_n = \ell \leq \ell + \varepsilon$$

donc $\forall n \geq N, |u_n - \ell| \leq \varepsilon$.

Finalement, $u_n \rightarrow \ell$.

- (ii) Si u non majorée, soit $A \in \mathbb{R}$. A ne majore pas u donc on a $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N \geq A$.
Par croissance de u , $\forall n \geq N, u_n \geq A$ donc $u \rightarrow +\infty$. ■

**Corollaire 1**

Si u est une suite croissante majorée (respectivement décroissante minorée), alors $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq \lim u$ (respectivement $u_n \geq \lim u$).
De plus, les inégalités sont strictes en cas de stricte monotonie.

Démonstration

$\lim u = \sup u$ (respectivement $\inf u$).
Si u croît strictement, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n < u_{n+1} \leq \lim u$.

2 Suites adjacentes**Définition 2 : Suites adjacentes**

Soient $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. u et v sont adjacentes si

- l'une est croissante,
- l'autre est décroissante,
- $v - u \rightarrow 0$.

Exemple

E1 – $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n^2}$ et $S'_n = S_n + \frac{1}{n}$.

E2 – Si $x \in \mathbb{R}$, les suites d'approximation décimale par défaut et par excès ($d_n(x)$) et ($D_n(x)$) sont adjacentes.

Théorème 3 : des suites adjacentes

Si u, v sont adjacentes avec u croissante, alors u et v convergent vers une même limite $\ell \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq \ell \leq v_n$, les inégalités étant strictes si u et v ont strictement monotones.

Démonstration

Soit $w_n = v_n - u_n$. Alors par opérations, w est décroissante et $w_n \rightarrow 0$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}, w_n \geq 0$, c'est-à-dire $u_n \leq v_n$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_0 \leq u_n \leq v_n \leq v_0$ donc u est croissante majorée par v_0 et v est décroissante minorée par u_0 et donc ces suites convergent. Comme $v_n - u_n \rightarrow 0$, les limites sont égales et l'encadrement découle des propriétés des suites monotones.

Remarque

R2 – On a alors pour tout $n, |u_n - \ell| \leq |v_n - u_n| = v_n - u_n$ ce qui donne des information intéressante sur la **vitesse de convergence** : plus $v - u$ converge rapidement vers 0, plus u converge rapidement vers ℓ .

Cela permet aussi de connaître un rang à partir duquel u_n est une approximation de ℓ à une précision donnée.

Exemple

E3 – **Approximations décimales** : $|d_n(x) - x| \leq D_n(x) - d_n(x) = 10^{-n}$

Convergence très rapide (au moins exponentielle).

Si on veut n décimales, on calcule $d_n(x)$ (évidemment!).

E4 – $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \rightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Vu le calcul précédent, pour tout n , $\left| S_n - \frac{\pi^2}{6} \right| \leq \frac{1}{n}$. La convergence est (au moins) en $\frac{1}{n}$ donc plutôt lente.

Si on veut n décimales, on calcule... S_{10^n} !

E5 – **Dichotomie** : On construit des segments emboîtés en divisant leur taille par 2 à chaque étape : $I_0 = [a, b]$, pour tout n , $I_{n+1} \subset I_n$ avec $\ell(I_{n+1}) = \frac{\ell(I_n)}{2}$, avec $I_n = [a_n, b_n]$.

Alors $(a_n), (b_n)$ sont adjacentes, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \{\ell\}$ et la convergence de (a_n) et (b_n) vers ℓ est au moins en $\frac{b-a}{2^n}$ donc très rapide.



CRITÈRES SÉQUENTIELS

1 Caractérisation séquentielle des bornes inférieure et supérieure

Propriété 7 : Caractérisation séquentielle de la borne supérieure

Soit A partie non vide \mathbb{R} , $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$\alpha = \sup A \iff \begin{cases} \forall x \in A, x \leq \alpha \\ \exists (a_n)_n \in A^{\mathbb{N}}, a_n \rightarrow \alpha \end{cases}$$

Propriété 8 : Caractérisation séquentielle de la borne inférieure

Soit A partie non vide \mathbb{R} , $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$\beta = \inf A \iff \begin{cases} \forall x \in A, x \geq \beta \\ \exists (a_n)_n \in A^{\mathbb{N}}, a_n \rightarrow \beta \end{cases}$$

2 Caractérisation séquentielle de la densité

Définition 3 : Partie dense dans \mathbb{R}

Une partie A non vide de \mathbb{R} est dite **dense** dans \mathbb{R} lorsque pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ tel que $x < y$, $A \cap]x, y[\neq \emptyset$.

Remarque

R3 – La définition sera étendue plus tard dans l'année.

Propriété 9 : Caractérisation séquentielle de la densité

Soit A une partie de \mathbb{R} . A est dense dans \mathbb{R} si et seulement si tout réel est limite d'une suite d'éléments de A .

**Démonstration**

- (\Rightarrow) : Si $x \in \mathbb{R}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $a_n \in A$ tel que $x - \frac{1}{n} \leq a_n \leq x + \frac{1}{n}$ car A est dense dans \mathbb{R} . Alors, par encadrement, $a_n \rightarrow x$.
- (\Leftarrow) : Si tout réel est limite d'une suite d'éléments de A , et si $x < y$. Soit $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $a_n \rightarrow \frac{x+y}{2}$. Avec $\varepsilon = \frac{y-x}{2}$, on a un rang à partir duquel

$$x = \frac{x+y}{2} - \frac{y-x}{2} < a_n < \frac{x+y}{2} + \frac{y-x}{2} = y$$

avec $a_n \in A$. Donc A est dense dans \mathbb{R} . ■

Corollaire 2 : Cas des réels et des décimaux

- (i) Tout réel est limite d'une suite de rationnels et d'une suite d'irrationnels.
- (ii) \mathbb{D} est dense dans \mathbb{R} .

Démonstration

(ii) : il suffit de prendre une suite d'approximations décimales. ■

IV**EXTENSION AUX SUITES COMPLEXES****Notation 1 : Parties réelle et imaginaire, conjugué, module d'une suite complexe**

Soit $z = (z_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On note $\Re(z) = (\Re(z_n)) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\Im(z) = (\Im(z_n)) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\bar{z} = (\bar{z}_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, $|z| = (|z_n|) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Définition 4 : Convergence de suite complexe

Une suite $(z_n) \in \mathbb{C}$ est dite **convergente** vers $\ell \in \mathbb{C}$ si et seulement si $|z_n - \ell| \rightarrow 0$, c'est-à-dire

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |z_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

Remarque

R4 – Pas de limite infinie dans \mathbb{C} . On peut au mieux avoir $|z_n| \rightarrow +\infty$.

Propriété 10

Soit $(z_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{C}$.

$$z_n \rightarrow \ell \iff \Re z_n \rightarrow \Re \ell \text{ et } \Im z_n \rightarrow \Im \ell$$

Démonstration

- (i) ■ $|\Re z_n - \Re \ell| = |\Re(z_n - \ell)| \leq |z_n - \ell|$ ■ $|z_n - \ell| = \sqrt{(\Re z_n - \Re \ell)^2 + (\Im z_n - \Im \ell)^2}$
- $|\Im z_n - \Im \ell| = |\Im(z_n - \ell)| \leq |z_n - \ell|$

(ii) $||z_n| - |\ell|| \leq |z_n - \ell|$ □

Définition 5

Une suite $(z_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est dite **bornée** si et seulement s'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, |z_n| \leq M$.

Démonstration

Si $z_n \rightarrow \ell$, alors $|z_n| \rightarrow |\ell|$ donc la suite réelle $(|z_n|)$ est bornée donc par définition (z_n) l'est aussi. ■

Propriété 11 : Suites géométriques complexes

Soit $q \in \mathbb{C}$.

- Si $q = 1$, $q^n \rightarrow 1$.
- Si $|q| < 1$, $q^n \rightarrow 0$.
- Si $|q| > 1$, (q^n) n'est pas bornée et donc diverge.
- Si $|q| = 1$ et $q \neq 1$, (q^n) diverge en étant bornée.

Démonstration

- Si $q = 1$: ok
- Si $|q| < 1$, $|q^n - 0| = |q|^n \rightarrow 0$ donc $q^n \rightarrow 0$.
- Si $|q| > 1$, $|q^n| = |q|^n \rightarrow +\infty$ donc (q^n) est non bornée et diverge.
- Si $|q| = 1$ et $q \neq 1$, on a $\theta \in]0, 2\pi[$ tel que $q = e^{i\theta}$. Alors $|q^n| = 1$ donc la suite est bornée (on reste sur le cercle trigonométrique) et si $q^n = e^{in\theta} \rightarrow \ell$, alors $|q^n| = 1 \rightarrow |\ell| = 1$ par unicité de la limite. En particulier $\ell \neq 0$ et $q = \frac{q^{n+1}}{q^n} \rightarrow \frac{\ell}{\ell} = 1$ ce qui est contradictoire. ■

Remarque

R5 – En particulier, si $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$, les suites $(\cos(n\theta))_n$ et $(\sin(n\theta))_n$ divergent. En effet, si l'une convergeait, à l'aide de $\cos((n+1)\theta)$ ou $\sin((n+1)\theta)$, on obtient que l'autre converge aussi et alors $(e^{in\theta})$ convergerait également.

V SUITES RÉCURRENTES

1 Cas général

Le but est d'étudier les suites récurrentes réelles d'ordre 1 générales : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f : D \rightarrow \mathbb{R}$.

Propriété 12 : Limite éventuelle, cas général

Si $u_n \rightarrow \ell \in D$ et si f est continue en ℓ , alors $f(\ell) = \ell$ (ℓ est un point fixe de f).

Démonstration

Unicité de la limite avec $u_{n+1} \rightarrow \ell$ et $f(u_n) \rightarrow f(\ell)$. ■



Méthode 1 : Étude générique de suite récurrente

- On commence en général par faire un dessin, et par voir quelles propriétés vérifient directement la suite.
- Parfois, les choses se voient clairement sur la formule de récurrence : ne pas se précipiter sur la méthode ci-dessous !
- Ensuite, les premières choses à cibler sont les **intervalles stables par f** : I tel que $f(I) \subset I$. Alors, par récurrence, si à partir d'un certain rang $u_{n_0} \in I$, la suite est bien définie et $\forall n \geq n_0, u_n \in I$.



Vu la propriété précédente, bien souvent, l'une des bornes de l'intervalle sera un point fixe de f . (Il faut donc chercher les points fixes!)

On pose en général $g(x) = f(x) - x$: les points fixes de f sont les zéros de g .

Il faut aussi s'assurer que la suite est bien définie !

■ Ensuite, on s'intéresse à la monotonie de f .

★ La monotonie de la suite peut se trouver directement en remarquant que $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = g(u_n)$: il est donc primordial de connaître le signe de g .

★ Si f est **croissante** sur I stable par f et $u_{n_0} \in I$, alors $(u_n)_{n \geq n_0}$ est **monotone**.

(Si $u_{n_0} \leq u_{n_0+1}$, ie $g(u_{n_0}) \geq 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = f^{n-n_0}(u_{n_0}) \leq f^{n-n_0}(u_{n_0+1}) = u_{n+1}$$

et si $u_{n_0} \geq u_{n_0+1}$, ie $g(u_{n_0}) \leq 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

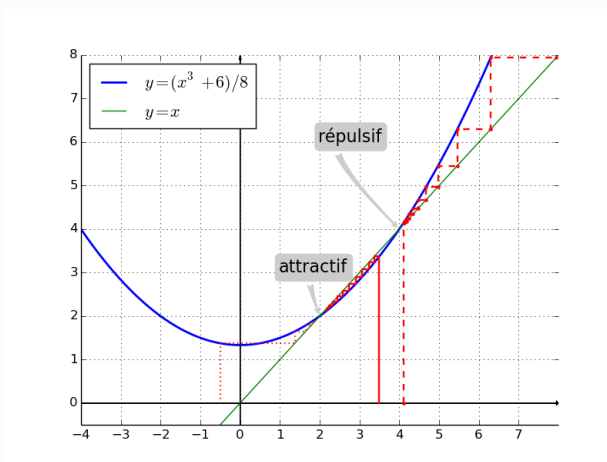
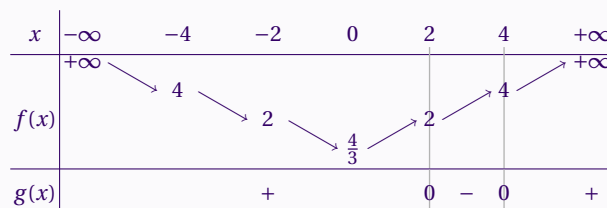
$$u_n = f^{n-n_0}(u_{n_0}) \geq f^{n-n_0}(u_{n_0+1}) = u_{n+1}.)$$

★ Si f est **décroissante** sur I stable par f et $u_{n_0} \in I$, alors $(u_{2n})_{n \geq \frac{n_0}{2}}$ et $(u_{2n+1})_{n \geq \frac{n_0-1}{2}}$ sont **monotones**, de monotonie contraire. Elles sont en fait solution de $v_{n+1} = f \circ f(v_n)$ avec $f \circ f$ croissante.

Lorsqu'elles convergent vers une même limite (c'est-à-dire qu'elles sont adjacentes), alors (u_n) converge vers cette limite. Notons que les points fixes de f sont des points fixes de $f \circ f$ (mais la réciproque est fautive en général.)

Exercice 1 : Étude de (u_n) telle que $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 8}{6}$.

On pose donc $f(x) = \frac{x^2 + 8}{6}$ et $g(x) = f(x) - x = \frac{x^2 - 6x + 8}{6} = \frac{(x-2)(x-4)}{6}$. En particulier, les points fixes de f sont 2 et 4. f est paire, continue, dérivable sur \mathbb{R} et $f' : x \mapsto \frac{x}{3}$. Les suites (u_n) sont toujours définies sans problème.



Intervalle stable intéressant : $[0, 2[$, $]2, 4[$ et $]4, +\infty[$.

■ Si $u_0 \in]-2, 2[$, $u_1 \in [0, 2[$ stable par f , donc $\forall n \geq 1$, $u_n \in [0, 2[$.

Si $n \geq 1$, $u_{n+1} - u_n = g(u_n) > 0$, donc $(u_n)_{n \geq 1}$ est strictement croissante. Remarquons qu'ici, on a même $(u_n)_{n \geq 0}$ strictement croissante.

Comme (u_n) est croissante et majorée par 2, elle converge vers $\ell \in [0, 2]$. Comme f est continue, ℓ est un point fixe de f , donc $\ell = 2$.

$u_n \rightarrow 2$ en croissant strictement.

- Si $u_0 \in]-4, -2[\cup]2, 4[$, $u_1 \in]2, 4[$ stable par f , donc $\forall n \geq 1$, $u_n \in]2, 4[$.
Si $n \geq 1$, $u_{n+1} - u_n = g(u_n) < 0$, donc $(u_n)_{n \geq 1}$ est strictement décroissante.
Comme $(u_n)_{n \geq 1}$ est décroissante et minorée par 2, elle converge vers $\ell \in [2, 4]$. Comme f est continue, ℓ est un point fixe de f . Comme on a $\ell \leq u_1 < 4$, $\ell = 2$.
 $u_n \rightarrow 2$ en décroissant strictement au moins à partir du rang 1.
- Si $u_0 \in]-\infty, -4[\cup]4, +\infty[$, $u_1 \in]4, +\infty[$ stable par f , donc $\forall n \geq 1$, $u_n \in]4, +\infty[$.
Si $n \geq 1$, $u_{n+1} - u_n = g(u_n) > 0$, donc $(u_n)_{n \geq 1}$ est strictement croissante. Remarquons qu'ici, on a même $(u_n)_{n \geq 0}$ strictement croissante.
Si $u_n \rightarrow \ell \in \mathbb{R}$, comme f est continue, ℓ est un point fixe de f . Comme $\ell \in [4, +\infty[$, $\ell = 4$. Or $4 < u_1 \leq \ell$ ce qui est contradictoire.
Comme $(u_n)_{n \geq 1}$ est croissante et non convergente, $u_n \rightarrow +\infty$.
 $u_n \rightarrow +\infty$ en croissant strictement.
- Si $u_0 \in \{-2, 2\}, \forall n \geq 1, u_n = 2$.
- Si $u_0 \in \{-4, 4\}, \forall n \geq 1, u_n = 4$.

Exercice 2 : CCINP 43

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On définit la suite (u_n) par $u_0 = x_0$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \text{Arctan}(u_n)$.

1. a) Démontrer que la suite (u_n) est monotone et déterminer, en fonction de la valeur de x_0 , le sens de variation de (u_n) .
b) Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.
2. Déterminer l'ensemble des fonctions h , continues sur \mathbb{R} , telles que : $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = h(\text{Arctan } x)$.

On pose $g : x \mapsto \text{Arctan } x - x$.

1. (a) g est dérivable sur \mathbb{R} et $g' : x \mapsto -\frac{x^2}{1+x^2} < 0$ sauf en 0 où elle s'annule de manière isolée.
Donc g est strictement décroissante sur \mathbb{R} , nulle en 0 qui est donc le seul point fixe de Arctan .
Par ailleurs \mathbb{R}^+ et \mathbb{R}^- sont des intervalles stables par Arctan (on connaît ses variations).
Alors soit $x \geq 0$ et, par récurrence (vu la stabilité de \mathbb{R}^+ par Arctan), pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \mathbb{R}^+$ et alors $u_{n+1} - u_n = g(u_n) \leq 0$ donc (u_n) décroît.
soit $x \leq 0$ et, par récurrence (vu la stabilité de \mathbb{R}^- par Arctan), pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \mathbb{R}^-$ et alors $u_{n+1} - u_n = g(u_n) \geq 0$ donc (u_n) croît.
(b) On a alors dans le premier cas u décroissante et minorée par 0 et dans le deuxième cas u croissante majorée par 0 donc, dans tous les cas, elle converge, vers l'unique point fixe de Arctan qui est bien continue.
Finalement, $u_n \rightarrow 0$.
2. **Analyse** Soit h une fonction continue sur \mathbb{R} telle que, $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = h(\text{Arctan } x)$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Considérons la suite (u_n) définie par $u_0 = x$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \text{Arctan}(u_n)$.
Vu l'hypothèse sur h , on a que la suite $(h(u_n))$ est constamment égale à $h(u_0) = h(x)$.
Or, d'après la question précédente et la continuité de h , $h(u_n) \rightarrow h(0)$.
On obtient par unicité de la limite $h(x) = h(0)$ et donc h est une fonction constante.
Synthèse Réciproquement, toutes les fonctions constantes conviennent : elles sont continues et vérifient $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = h(\text{Arctan } x)$.
Conclusion Les fonctions constantes sont exactement les fonctions qui répondent au problème.



2 Cas d'une fonction contractante

Définition 6 : Fonction contractante

Une fonction f est dite **contractante** sur un intervalle I si et seulement si on a $k < 1$ tel que $\forall x, x' \in I, |f(x) - f(x')| \leq k|x - x'|$.

Cela se traduit graphiquement par le fait que les pentes des cordes ne sont « pas trop élevées ».



Méthode 2 : Cas d'une fonction contractante

Cela est intéressant si I est stable par f . Si c'est le cas, si $\ell \in I$ point fixe de f (on peut montrer qu'il existe et est nécessairement unique), si $u_0 \in I$ stable par f , alors $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in I$ et $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$|u_n - \ell| = |f(u_{n-1}) - f(\ell)| \leq k|u_{n-1} - \ell| \leq \dots \leq k^n |u_0 - \ell| \rightarrow 0$$

Donc directement $u_n \rightarrow \ell$, on a même une convergence exponentielle.

On peut parfois conclure rapidement grâce à l'inégalité des accroissements finis :

Théorème 4 : Inégalité des accroissements finis

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{K}$. On suppose que

H1 f est continue sur I

H2 f est dérivable sur $\overset{\circ}{I}$

H3 On a $k \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall x \in \overset{\circ}{I}, |f'(x)| \leq k$.

Alors f est k -lipschitzienne :

$$\forall x, x' \in [a, b], |f(x) - f(x')| \leq k|x - x'|.$$

Remarque

R6 – On peut démontrer que si ℓ est un point fixe de f de classe \mathcal{C}^1 , alors

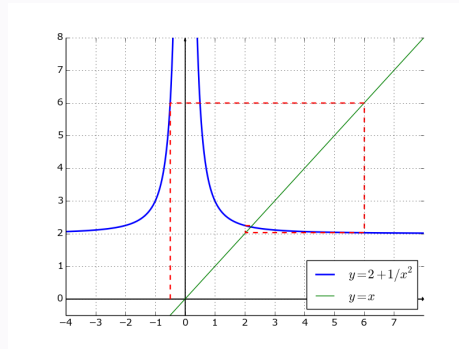
- si $|f'(\ell)| < 1$, le point fixe est **attractif**, en particulier si $f'(\ell) = 0$ (point **superattractif**), la convergence est quadratique, comme pour la méthode de Newton,
- si $|f'(\ell)| > 1$, le point fixe est **répulsif**,
- si $|f'(\ell)| = 1$, c'est le cas douteux. Tout peut arriver.

Exercice 3 : $u_0 \in \mathbb{R}^*$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2 + \frac{1}{u_n^2}$.

Par récurrence, (u_n) est définie et $u_n > 2$ à partir du rang 1.

$f : x \mapsto 2 + \frac{1}{x^2}$ est définie sur \mathbb{R}^* , paire, décroissante sur \mathbb{R}_+^* .

$[2, +\infty[$ est stable par f et comme $u_1 \in [2, +\infty[, \forall n \geq 1, u_n \in [2, +\infty[$.



$f(x) = x \iff x^3 - 2x^2 - 1 = 0$ et une rapide étude de fonction montre, à l'aide du théorème de la bijection, qu'il y a un unique point fixe $\alpha \in [2, +\infty[$ pour f .

f est continue sur $[2, +\infty[$, dérivable sur $]2, +\infty[$ et si $x > 2$, $f'(x) \leq \frac{1}{4} (< 1)$.

D'après l'inégalité des accroissements finis,

$$\forall x, x' \in [2, +\infty[, |f(x) - f(x')| \leq \frac{1}{4} |x - x'|.$$

On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} |u_1 - \alpha|$ donc $u_n \rightarrow \alpha$ (plutôt rapidement.)

VI RELATIONS DE COMPARAISON

1 Définition

Définition 7 : Relations de comparaison

Si $u, v \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et si v_n n'est jamais nul à partir d'un certain rang, on dit que

- u est **dominée** par v et on note $u = \mathcal{O}(v)$ lorsque $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_n$ est bornée.
- u est **négligeable** devant v et on note $u = o(v)$ ou $u_n \ll v_n$ lorsque $\frac{u_n}{v_n} \rightarrow 0$.
- u est **équivalente** à v et on note $u \sim v$ lorsque $\frac{u_n}{v_n} \rightarrow 1$, soit encore $u - v = o(v)$, c'est-à-dire $u = v + o(v)$.

Remarque

R7 – La définition se généralise au cas où $(v_n)_n$ est quelconque en écrivant $u_n = v_n \times w_n$ avec $(w_n)_n$ bornée (respectivement $\rightarrow 0, 1$).

R8 – $u = o(v)$ et $u = \mathcal{O}(v)$ traduisent une **appartenance**.

Exemple

E6 – $n = o(n^3)$ et $n^2 = o(n^3)$ mais $n \neq n^2$!

R9 – $u = \mathcal{O}(v)$ signifie qu'il existe $K \in \mathbb{R}$ et un rang à partir duquel $|u_n| \leq K|v_n|$.

$u = o(v)$ signifie que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang à partir duquel $|u_n| \leq \varepsilon|v_n|$.

R10 – Il n'y a pas unicité de l'équivalent d'une suite. En général, on choisit le plus simple.

R11 – Cela ne donne que des informations asymptotiques sur les suites : au voisinage de $+\infty$, donc à partir d'un certain rang.

**Propriété 13 : Croissances comparées des suites usuelles**

Si $\alpha > 0, \beta > 0, q > 1,$

$$\ln^\beta n \ll n^\alpha \ll q^n \ll n! \ll n^n$$

$$\frac{1}{n^n} \ll \frac{1}{n!} \ll \frac{1}{q^n} \ll \frac{1}{n^\alpha} \ll \frac{1}{\ln^\beta n}.$$

Exemple

$$\ln n \ll n \ll n \ln n \ll n^2.$$

Propriété 14

$$u \sim v \iff u = v + o(v)$$

Démonstration

$$\frac{u_n}{v_n} \rightarrow 1 \iff \frac{u_n - v_n}{v_n} \rightarrow 0.$$

2 Propriétés**Propriété 15 : Propriétés de o et \mathcal{O}**

Solent $u, v, w, a, b \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, v, w, b ne s'annulant pas à partir d'un certain rang, et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

(i) Si $\alpha \neq 0$, $u = o(\alpha v) \implies u = o(v)$ et $u = \mathcal{O}(\alpha v) \implies u = \mathcal{O}(v)$.

(ii) $u = o(1) \iff u \rightarrow 0$ et $u = \mathcal{O}(1) \iff u$ bornée.

(iii) Si $u = o(v)$ ou $u \sim v$, alors $u = \mathcal{O}(v)$ et la réciproque est fausse.

(iv) **Transitivité**

$$u = o(v) \text{ et } v = o(w) \implies u = o(w)$$

$$u = \mathcal{O}(v) \text{ et } v = \mathcal{O}(w) \implies u = \mathcal{O}(w)$$

(v) **Combinaison linéaire**

$$u = o(w) \text{ et } v = o(w) \implies \alpha u + \beta v = o(w)$$

$$u = \mathcal{O}(w) \text{ et } v = \mathcal{O}(w) \implies \alpha u + \beta v = \mathcal{O}(w)$$

(vi) **Produit**

$$u = o(v) \text{ et } a = o(b) \implies ua = o(vb)$$

$$u = \mathcal{O}(v) \text{ et } a = \mathcal{O}(b) \implies ua = \mathcal{O}(vb)$$

Démonstration


Toutes ces propriétés se démontrent facilement en passant par le quotient qui doit être bornée / $\rightarrow 0$.


Propriété 16 : Propriétés de \sim

Soient $u, v, w, a, b \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, v, w, b ne s'annulant pas à partir d'un certain rang.

- (i) \sim est une relation d'équivalence.
- (ii) Si $u \sim v$ et $v \rightarrow \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ ou \mathbb{C} , alors $u \rightarrow \ell$.
- (iii) $u \rightarrow \ell \neq 0 \iff u \sim \ell$.
- (iv) Si $u \sim v$, alors à partir d'un certain rang, u_n et v_n sont de même signe.
- (v) Si $u \sim v$ et $a \sim b$, alors $ua \sim vb$ et $\frac{u}{a} \sim \frac{v}{b}$.
- (vi) Si $u \sim v$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ **fixé**, ($u_n > 0$ et $v_n > 0$ si $\alpha \notin \mathbb{N}$, non nuls si $\alpha \in \mathbb{Z}^-$), $u^\alpha \sim v^\alpha$.
- (vii) Si $u_n \sim v_n$ et φ extractrice, $u_{\varphi(n)} \sim v_{\varphi(n)}$.

Remarque

R 12 –  $u_n \sim v_n \not\iff u_n - v_n \rightarrow 0$

R 13 –  Si α n'est pas fixe : $1 + \frac{1}{n} \sim 1$ mais $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \sim e$ donc $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \not\sim 1^n = 1$.

R 14 –  On n'ajoute pas les équivalents.

R 15 –  Si on trouve une suite équivalente à 0, on s'est trompé! (En général, on a ajouté/soustrait des équivalents...)

Cela n'a pas de sens avec la définition du programme, et même avec la généralisation, cela voudrait dire qu'on peut écrire à partir d'un certain rang $u_n = 0 \times w_n = 0$ donc que la suite est nulle à partir d'un certain rang.

En particulier, si $u_n \rightarrow 0$, on ne peut pas donner facilement un équivalent en général.

R 16 –  On ne compose pas des équivalents par la gauche avec des fonctions, même continues.

La propriété suivante n'est pas officiellement au programme mais à savoir retrouver :

- $e^{u_n} \sim e^{v_n} \iff u_n - v_n \rightarrow 0$
- Si $u_n \sim v_n$ avec pour tout n , $u_n > 0$ et $v_n > 0$, à partir d'un certain rang $v_n \neq 1$ et si $v_n \rightarrow \ell \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ avec $\ell \neq 1$, alors $\ln u_n \sim \ln v_n$.

Exercice 4 : Intégrales de Wallis : Très classique!

Détermination d'un équivalent de l'intégrale de Wallis $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t \, dt$

- **Relation de récurrence,**
- **Expression de I_{2n}, I_{2n+1}**
- **Décroissance,**
- $I_n \sim I_{n-1}$,
- $nI_n I_{n-1}$ **constant,**
- **Équivalent de I_n .**



3 Équivalents usuels

Propriété 17 : Formule de Stirling

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n} = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Démonstration

Admis provisoirement. Les séries permettent de montrer que $n! \sim K\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ et les intégrales de Wallis permettent de voir que $K = \sqrt{2\pi}$. ■

Exercice 5 : Équivalent de $u_n = \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!^2} \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$.

Propriété 18 : Équivalents usuels

Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$ fixé et $h_n \rightarrow 0$.

- $\sin h_n \sim h_n$
- $\tan h_n \sim h_n$
- $\cos h_n - 1 \sim -\frac{h_n^2}{2}$
- $\ln(1 + h_n) \sim h_n$
- $e^{h_n} - 1 \sim h_n$
- $(1 + h_n)^\alpha - 1 \sim \alpha h_n$
- $\text{Arctan } h_n \sim h_n$
- $\text{Arcsin } h_n \sim h_n$
- $\text{sh } h_n \sim h_n$
- $\text{th } h_n \sim h_n$

Démonstration

Conséquences de la propriété précédente.

$$\cos x - 1 = -2 \sin^2 \frac{x}{2}. \quad \blacksquare$$

Remarque

R 17 – Lorsque l'on est au voisinage de a , on se ramène en général au voisinage de 0 en posant $x = a + h$ si a est fini et $x = \frac{1}{h}$ si a est infini.

Exercice 6 : Limite de $u_n = n \left(\left(1 - \sin \frac{1}{n^2}\right)^n - 1 \right)$.

4 Exemples de développements asymptotiques

Définition 8 : Développement asymptotique

On appelle **développement asymptotique** de $(u_n)_n$ toute expression de la forme

$$u_n = v_n^{(1)} + v_n^{(2)} + \dots + v_n^{(r)} + o(v_n^{(r)})$$

où $v^{(1)}, \dots, v^{(r)}$ sont des suites telles que $v_n^{(1)} \gg v_n^{(2)} \gg \dots \gg v_n^{(r)}$, c'est-à-dire telles que $\forall k \in \llbracket 1, r-1 \rrbracket, v_n^{(k+1)} = o(v_n^{(k)})$.

On dit que le développement asymptotique est **à la précision** $v_n^{(r)}$.

Remarque

R 18 – On a toujours que $u_n - v_n^{(1)} - \dots - v_n^{(r)} \sim v_n^{(k+1)}$. C'est un des moyen de former un développement asymptotique : par la recherche d'équivalents successifs.

R 19 – On peut adapter la définition précédente pour des fonctions au voisinage d'un point : c'est une généralisation du développement limité.



Méthode 3 : Calcul de développement asymptotique

Chercher un développement asymptotique d'une suite est souvent délicat. On peut par exemple essayer de :

1. reconnaître un développement limité « déguisé » ;
2. chercher un équivalent $u_n \sim v_n$ qui donne $u_n = v_n + o(v_n)$, puis un équivalent de la différence $u_n - v_n \sim w_n$ qui donne $u_n = v_n + w_n + o(w_n)$ et ainsi de suite ;
3. réinjecter le développement partiel dans une expression du terme général de la suite pour obtenir le terme suivant.

Exercice 7 : Développement asymptotique en $+\infty$ de $f : n \mapsto e^{\sqrt{n^2+2n+4}}$ à la précision $\frac{e^n}{n}$.

$$e^{\sqrt{n^2+2n+4}} = e \cdot e^n + \frac{3e}{2} \cdot \frac{e^n}{n} + o\left(\frac{e^n}{n}\right)$$

Exercice 8 : Développement asymptotique en $+\infty$ de $f : x \mapsto \ln(\operatorname{ch} x)$ à la précision e^{-4x} . Asymptote ?

$$\ln(\operatorname{ch} x) = x - \ln 2 + e^{-2x} - \frac{1}{2}e^{-4x} + o(e^{-4x})$$

$y = x - \ln 2$ asymptote et la courbe est au-dessus.

Exercice 9 : Développement asymptotique à trois termes de $x^{1+\frac{1}{x}}$ en $+\infty$. Asymptote ?

$$x^{1+\frac{1}{x}} = xe^{\frac{\ln x}{x}} = x \left(1 + \frac{\ln x}{x} + \frac{\ln^2 x}{2x^2} + o\left(\frac{\ln^2 x}{x^2}\right) \right) = x + \ln x + \frac{\ln^2 x}{2x} + o\left(\frac{\ln^2 x}{x}\right)$$

avec $\frac{\ln^2 x}{2x} + o\left(\frac{\ln^2 x}{x}\right) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ donc $y = x + \ln x$ est asymptote et la courbe est au-dessus.

**Exercice 10**

On s'intéresse à u_n unique zéro de $f_n(x) = 1 + x + \frac{e^x}{n}$.

1. Vérifier que la suite (u_n) est bien définie, majorée par -1 et croissante.
2. Déterminer la limite de (u_n) .
3. Déterminer un développement asymptotique à 3 termes de (u_n) .

VII SUITES EXTRAITES, VALEURS D'ADHÉRENCE

Définition 9 : Suite extraite

Soit $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. On appelle **suite extraite** ou **sous-suite** de u toute suite $v \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ telle qu'il existe $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_{\varphi(n)}$.
 φ est appelée **extractrice**.

Lemme 1

Si φ est une extractrice, alors $\forall n \in \mathbb{N}, \varphi(n) \geq n$.

Démonstration

Par récurrence simple, c'est vrai pour $n = 0$ et si c'est vrai pour un $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n+1) > \varphi(n) \geq n$ donc $\varphi(n+1) \geq n+1$ car on est dans \mathbb{N} . ■

Propriété 19 : Cas des suites convergentes

Si $u \rightarrow \ell$, toute suite extraite de u converge vers ℓ .

Démonstration

Si $\ell \in \mathbb{R}$, soit $\varepsilon > 0$. On a $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geq N$, $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$.
Alors si $n \geq N$, $\varphi(n) \geq n \geq N$ et $|u_{\varphi(n)} - \ell| \leq \varepsilon$ donc $u_{\varphi(n)} \rightarrow \ell$.

Si $u_n \rightarrow +\infty$, soit $A \in \mathbb{R}$. On a $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geq N$, $u_n \geq A$.
Alors si $n \geq N$, $\varphi(n) \geq n \geq N$ et $u_{\varphi(n)} \geq A$ donc $u_{\varphi(n)} \rightarrow +\infty$.

Si $u_n \rightarrow -\infty$, $-u_n \rightarrow +\infty$... ■

Définition 10 : Valeur d'adhérence

On appelle **valeur d'adhérence** de $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ toute limite (dans \mathbb{K}) de suite extraite de u .

Exemple

E7 – Valeurs d'adhérence de $(-1)^n$.

Corollaire 3 : Reformulation

Une suite convergente a une unique valeur d'adhérence : sa limite.

Remarque

R 20 – Réciproque fausse.

Exemple

E 8 – $u_n = n$ si n est pair et 0 sinon.

Corollaire 4 : Contraposée

Si une suite a plusieurs valeurs d'adhérence, elle diverge.

Propriété 20 : Condition suffisante de convergence

Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers une même limite, alors u converge vers cette limite.

Démonstration

Pour $\ell \in \mathbb{R}$. Soit $\varepsilon > 0$. On a $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tels que si $n \geq N_1$, $|u_{2n} - \ell| \leq \varepsilon$ et si $n \geq N_2$, $|u_{2n+1} - \ell| \leq \varepsilon$.
Alors si $n \geq N = \max(2N_1, 2N_2 + 1)$,

- soit n est pair et $n = 2k$ avec $k \geq N_1$,
- soit n est impair et $n = 2k + 1$ avec $k \geq N_2$,

donc $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$.

Donc $u_n \rightarrow \ell$.

Idem si $\ell = \pm\infty$. ■

Théorème 5 : de Bolzano-Weierstraß dans \mathbb{R} ou \mathbb{C}

Toute suite réelle ou complexe bornée a au moins une valeur d'adhérence.

Démonstration**Cas réel**

$u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ bornée.

- **1ère étape : Dichotomie.** Comme u est bornée, on a $a_0 \leq b_0$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_0 \leq u_n \leq b_0$.

Soit $c_0 = \frac{a_0 + b_0}{2}$. Parmi les segments $[a_0, c_0]$ et $[c_0, b_0]$, pour au moins l'un des deux le nombre d'indices k tel que u_k est dedans est infini. Soit $[a_1, b_1]$ un tel segment.

Puis, par récurrence, on construit de la même manière deux suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

- * $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$,
- * $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_n - a_n}{2}$,
- * l'ensemble $\{p \in \mathbb{N}, u_p \in [a_n, b_n]\}$ est infini.

Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n} \rightarrow 0$ et $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ sont adjacentes.

Elles convergent donc vers une même limite $\ell \in \mathbb{R}$.

- **2ème étape : Extraction.** On construit $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{\varphi(n)} \in [a_n, b_n]$.

- * $\varphi(0) \in \mathbb{N} : u_{\varphi(0)} \in [a_0, b_0]$.
- * $\varphi(1) = \min\{p \in \mathbb{N}, u_p \in [a_1, b_1]\} \setminus \llbracket 0, \varphi(0) \rrbracket$ qui existe car $\{p \in \mathbb{N}, u_p \in [a_1, b_1]\}$ est infini.
- * puis par récurrence, ayant trouvé $\varphi(n-1)$,

$$\varphi(n) = \min\{p \in \mathbb{N}, u_p \in [a_n, b_n]\} \setminus \llbracket 0, \varphi(n-1) \rrbracket$$



qui existe car $\{p \in \mathbb{N}, u_p \in [a_n, b_n]\}$ est infini.

Par construction, $(u_{\varphi(n)})$ est une suite extraite de u .

- **3ème étape : Conclusion.** On a alors par définition,

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq u_{\varphi(n)} \leq b_n$$

donc par encadrement $u_{\varphi(n)} \rightarrow \ell$.

2° méthode : En extrayant une suite monotone (lemme des pics).

On considère les termes de la suite comme des immeubles au bord de mer (en $+\infty$). Deux catégories :

- Ceux qui ont vu sur la mer, c'est-à-dire d'indice n tel que $\forall p > n, u_p < u_n$.
- Les autres : d'indice n tel que $\exists p > n, u_p \geq u_n$.

Notons

$$E = \{n \in \mathbb{N}, \forall p > n, u_p < u_n\}.$$

Alors

- soit E est infini et on peut extraire une suite décroissante (la suite des immeubles avec vue sur la mer, dans l'ordre).
Plus formellement, il suffit de poser $\varphi(0) \in E$, puis, par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\varphi(n) = \min(E \setminus \llbracket 0, \varphi(n-1) \rrbracket)$$

- soit E est fini et à partir d'un certain rang, tous les termes seront de la deuxième catégorie, ce qui permet de former une suite extraite croissante.

Plus formellement, en notant $M = \max E$ si E non vide, n'importe quel entier sinon, on pose $\varphi(0) = M + 1 \notin E$ donc on a $\varphi(1) > \varphi(0)$ tel que $u_{\varphi(1)} \geq u_{\varphi(0)}$.

Et par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a bien $\varphi(n) > \varphi(n-1) \notin E$ tel que $u_{\varphi(n)} \geq u_{\varphi(n-1)}$.

Dans tous les cas on extrait une suite monotone et bornée, donc convergente.

Cas complexe Si (z_n) est bornée, alors soit $(x_n) = (\Re z_n)$ et $(y_n) = (\Im z_n)$. Ces deux suites sont bornées. Par le théorème réel, on peut extraire une suite convergente $(x_{\varphi(n)})$ de x . Puis $(y_{\varphi(n)})$ est bornée en tant que suite extraite d'une suite bornée, on peut donc en extraire une suite convergente : $(y_{\varphi \circ \psi(n)})$. Alors par extraction, $(x_{\varphi \circ \psi(n)})$ est également convergente et donc $(z_{\varphi \circ \psi(n)})$ converge. ■

VIII THÉORÈME DE CESÀRO

Théorème 6 : de Cesàro

Si $u_n \rightarrow \ell \in \mathbb{K}$ (éventuellement infinie) et $v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k$ alors $v_n \rightarrow \ell$.

Démonstration

Voir TD ou chapitre sur les séries. ■

Une application classique est la recherche d'équivalent d'une suite récurrente.

Exercice 11 : Oral CCINP

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$.

1. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle convergente. On pose ℓ sa limite et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $y_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} x_k$.

Démontrer que la suite $(y_n)_{n \geq 1}$ converge vers ℓ .

2. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et calculer sa limite.

3. Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}$. Montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 1.

4. En déduire un équivalent de u_n . La série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge-t-elle ?

IX RÉCURRENCES LINÉAIRES D'ORDRE 1 ET 2

Propriété 21 : Suites arithmético-géométrique

Soit une suite $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ telle qu'on ait $a, b \in \mathbb{K}$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b$$

Alors, si \tilde{u} est solution particulière, on a $u = v + \tilde{u}$ où v est solution de (H) $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = av_n$, équation homogène associée.

On cherche \tilde{u} constante en général.

Propriété 22 : récurrence linéaire d'ordre 2 homogène à coefficients constants

On considère une suite $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ **récurrence linéaire d'ordre 2 homogène à coefficients constants**, c'est-à-dire telle qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

On appelle **équation caractéristique** associée (E) $r^2 = ar + b$.

On suppose $(a, b) \neq (0, 0)$. Alors

- Soit (E) admet deux solutions distinctes r_1 et r_2 dans \mathbb{K} , alors on a $A, B \in \mathbb{K}$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = Ar_1^n + Br_2^n.$$

- Soit (E) admet une unique solution (double) r dans \mathbb{K} , alors on a $A, B \in \mathbb{K}$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (A + nB)r^n.$$

- Soit (E) n'admet pas de solution dans \mathbb{K} , c'est-à-dire $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et (E) admet deux solutions complexes conjuguées $\rho e^{\pm i\theta}$ avec $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$. Alors on a $A, B \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (A \cos(n\theta) + B \sin(n\theta))\rho^n$$

c'est-à-dire qu'on a $K, \varphi \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = K \cos(n\theta + \varphi)\rho^n.$$