Oral blanc n° 1

1 Banque CCINP 33 (Analyse)

On pose : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $f(x,y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ et $f(0,0) = 0$.

1. Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Démontrer que f admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$.
3. f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$? Justifier.

2 CCINP 2023 (Algèbre)

Soit $\varphi \in \mathbb{R}$ et $M_n = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $m_{i,j} = 2\cos\varphi$ si $i = j$, $m_{i,j} = 1$ si $|i-j| = 1$, les autres cœfficients étant nuls.

1. On suppose que $\varphi \notin \pi\mathbb{Z}$. Trouver une relation de récurrence vérifiée par $D_n = \det(M_n)$ et exprimer D_n.
2. Déterminer D_n lorsque $\varphi \in \pi\mathbb{Z}$.

Oral blanc n° 1

1 Banque CCINP 17 (Analyse)

Soit $A \subset \mathbb{C}$ et (f_n) une suite de fonctions de A dans $\mathbb{C}$.

1. Démontrer l'implication :

$$\left(\text{la série de fonctions } \sum f_n \text{ converge uniformément sur } A\right)$$
$$\Downarrow$$
$$\left(\text{la suite de fonctions } (f_n) \text{ converge uniformément vers 0 sur } A\right)$$

2. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [0;+\infty[$, $f_n(x) = n x^2 \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$.
   Prouver que $\sum f_n$ converge simplement sur $[0;+\infty[$.
   $\sum f_n$ converge-t-elle uniformément sur $[0;+\infty[$? Justifier.

2 Mines-Télécom (Algèbre)

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f^2 = -\mathrm{id}$.

1. Montrer que $\dim E$ est pair.
2. Montrer que pour tout $x \in E$, $\mathrm{Vect}(x, f(x))$ est stable par f.
3. Montrer que si $\dim E = 2n$, il existe des vecteurs $e_1, \dots, e_n$ de E tels que la famille

$$\big(e_1, f(e_1), \dots, e_n, f(e_n)\big)$$

   soit une base de E. Donner la matrice de f dans cette base.

Oral blanc n° 1

1 Banque CCINP 54 (Analyse)

Soit E l'ensemble des suites à valeurs réelles qui convergent vers 0.

1. Prouver que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites à valeurs réelles.
2. On pose : $\forall\, u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in E,\ ||u||=\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}|u_n|$.
   (a) Prouver que $||\,.\,||$ est une norme sur E.
   (b) Prouver que : $\forall\, u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in E,\ \sum \dfrac{u_n}{2^{n+1}}$ converge.
   (c) On pose : $\forall\, u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in E,\ f(u)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{u_n}{2^{n+1}}$. Prouver que f est continue sur E.

2 Mines-Telecom 2023 (Algèbre)

Soit $(A,B)\in(\mathscr{M}_n(\mathbb{C}))^2$.

1. Montrer qu'il existe $p\in\mathbb{N}$ tel que $\forall\, k\geqslant p,\ \ A+\dfrac{1}{k}I_n\in\mathscr{GL}_n(\mathbb{C})$.
2. Montrer que $\chi_{AB}=\chi_{BA}$.