# Oral blanc nº 1

## 1 Banque CCINP 53 (Analyse)

On considère, pour tout entier naturel $n$ non nul, la fonction $f_n$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \dfrac{x}{1+n^4x^4}$.

1. (a) Prouver que $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

   On pose alors : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

   (b) Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $0 < a < b$.
   $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge-t-elle normalement sur $[a,b]$ ? sur $[a,+\infty[$ ?

   (c) $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge-t-elle normalement sur $[0,+\infty[$ ?
2. Prouver que $f$ est continue sur $\mathbb{R}^*$.
3. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

## 2 CCINP (Algèbre)

On note $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 16 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 16 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 16 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 16 \end{pmatrix}$.

1. Diagonaliser $A$.
2. La matrice $B$ est-elle diagonalisable ? Si c'est le cas, la diagonaliser.
3. Déterminer le polynôme minimal de $B$.





# Oral blanc nº 1

## 1 Banque CCINP 18 (Analyse)

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ u_n(x) = \dfrac{(-1)^n x^n}{n}$.
On considère la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} u_n$.

1. Étudier la convergence simple de cette série.
   On note $D$ l'ensemble des $x$ où cette série converge et $S(x)$ la somme de cette série pour $x \in D$.
2. (a) Étudier la convergence normale, puis la convergence uniforme de cette série sur $D$.

   (b) La fonction $S$ est-elle continue sur $D$ ?

## 2 ENSEA (Algèbre)

Soit $E = \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. Si $(f,g) \in E^2$, on pose $\langle f,g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$.

Pour $f \in E$, on pose $v(f) : x \in [0,1] \mapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que $v \in \mathscr{L}(E)$, puis qu'il existe une unique fonction $v^* \in \mathscr{L}(E)$ telle que
$$\forall (f,g) \in E^2,\ \langle v(f), g\rangle = \langle f, v^*(g)\rangle.$$
2. Calculer les valeurs et vecteurs propres de $v \circ v^*$.

# Oral blanc nº 1

## 1 Banque CCINP 23 (Analyse)

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe telle que la suite $\left(\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite.

1. Démontrer que les séries entières $\sum a_n x^n$ et $\sum (n+1)a_{n+1}x^n$ ont le même rayon de convergence.
   On le note $R$.
2. Démontrer que la fonction $x \longmapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle $]-R,R[$.

## 2 Mines-Telecom (Algèbre)

Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^\intercal = -A$.

1. Montrer que pour tout $X\in\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X^\intercal AX = 0$.
2. (a) Que peut-on en déduire sur les valeurs propres de $A$ ?
   (b) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $A$ soit diagonalisante.
3. On pose $M = A + I_n$.
   (a) Montrer que $M$ est inversible.
   (b) La matrice $M$ est-elle diagonalisable ?
4. On pose $K = M^\intercal M^{-1}$. Montrer que $K\in\mathscr{SO}_n(\mathbb{R})$.





# Oral blanc nº 1

## 1 Banque CCINP 19 (Analyse)

1. (a) Justifier, oralement, à l'aide du théorème de dérivation terme à terme, que la somme d'une série entière de la variable réelle est dérivable sur son intervalle ouvert de convergence.
   **Remarque** : On pourra utiliser, sans le démontrer, que la série $\sum a_n x^n$ et la série $\sum n a_n x^n$ ont même rayon de convergence.
   (b) En déduire le développement en série entière à l'origine, de la fonction de la variable réelle :
   $x\mapsto \dfrac{1}{(1-x)^2}$.
2. (a) Donner le développement en série entière à l'origine de la fonction de la variable complexe : $z\mapsto \dfrac{1}{1-z}$.
   (b) Rappeler le produit de Cauchy de deux séries entières.
   (c) En déduire le développement en série entière à l'origine, de la fonction de la variable complexe :
   $z\mapsto \dfrac{1}{(1-z)^2}$.

## 2 CCINP (Probabilités)

Soit $X$ et $Y$ deux variables aléatoires sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathscr{A},\mathbb{P})$ à valeurs dans $[\![1,n+1]\!]$ et telles que

$$\forall (i,j)\in[\![1,n+1]\!]^2,\quad \mathbb{P}(X=i, Y=j) = \lambda\binom{n}{i-1}\binom{n}{j-1}.$$

1. Montrer que $\lambda = \dfrac{1}{4^n}$.
2. Déterminer les lois de probabilité de $X$ et $Y$.
3. Les variables aléatoires $X$ et $Y$ sont-elles indépendantes ?
4. Déterminer, à l'aide de la variable aléatoire $Z = X-1$, l'espérance et la variance de $X$.
5. On note $B = \left(b_{i,j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ où, pour tout $(i,j)\in[\![1,n+1]\!]^2$, $b_{i,j} = \mathbb{P}(Y=i|X=j)$. Calculer $B^2$.
6. Déterminer les valeurs propres de $B$. La matrice $B$ est-elle diagonalisable ? Déterminer la dimension de chaque sous-espace propre de $B$.

# Oral blanc n° 1

## 1 Banque CCINP 32 (Analyse)

Soit l'équation différentielle : $x(x-1)y''+3xy'+y=0$.

1. Trouver les solutions de cette équation différentielle développables en série entière sur un intervalle $]-r,r[$ de $\mathbb{R}$, avec $r>0$.
   Déterminer la somme des séries entières obtenues.
2. Est-ce que toutes les solutions de $x(x-1)y''+3xy'+y=0$ sur $]0;1[$ sont les restrictions d'une fonction développable en série entière sur $]-1,1[$ ?

## 2 CCINP (Algèbre)

Soit $n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$ et $J_n\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les cœfficients valent 1.

1. Soit $f_n$ l'endomorphisme canoniquement associé à $J_n$. Déterminer $\operatorname{Ker} f_n$ et $\operatorname{Im} f_n$.
2. Montrer que $J_n$ est diagonalisable et trouver une matrice diagonale $D_n$ semblable à $J_n$.
3. (a) Donner la définition et une caractérisation d'une matrice appartenant à $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$.
   (b) Justifier qu'il existe $P_n\in\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $J_n=P_nD_nP_n^{-1}$.
4. Déterminer $P_2$ et $P_3$.





# Oral blanc n° 1

## 1 Banque CCINP 38 (Analyse)

1. On se place sur $E=\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$, muni de la norme $\|\|_1$ définie par : $\forall f\in E,\ \|f\|_1=\int_0^1|f(t)|dt$.

   Soit $u:\begin{array}{ccc}E&\longrightarrow&E\\ f&\longmapsto&u(f)=g\end{array}$ avec

   $$\forall x\in[0,1],\ g(x)=\int_0^x f(t)dt.$$

   On admet que $u$ est un endomorphisme de $E$.

   Prouver que $u$ est continue et calculer $|||u|||$.
   **Indication** : considérer, pour tout entier $n$ non nul, la fonction $f_n$ définie par $f_n(t)=n\mathrm{e}^{-nt}$.
2. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Soit $(a_1,a_2,...,a_n)\in\mathbb{R}^n$ un $n$-uplet **non nul**, **fixé**.

   Soit $u:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^n&\longrightarrow&\mathbb{R}\\ (x_1,x_2,...,x_n)&\longmapsto&\displaystyle\sum_{i=1}^n a_ix_i\end{array}$.

   (a) Justifier que $u$ est continue quel que soit le choix de la norme sur $\mathbb{R}^n$.
   (b) On munit $\mathbb{R}^n$ de $\|\|_2$ où

   $$\forall x=(x_1,x_2,...,x_n)\in\mathbb{R}^n,\ \|x\|_2=\sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}.$$

   Calculer $|||u|||$.
3. Déterminer un espace vectoriel $E$, une norme sur $E$ et un endomorphisme de $E$ non continu pour la norme choisie. Justifier.

**Remarque** : Les questions 1., 2. et 3. sont indépendantes.

## 2 Mines-Ponts (Algèbre)

Soit $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente.

1. Calculer $\det(A+I_n)$.
2. Soit $M\in\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $AM=MA$. Calculer $\det(A+M)$. On commencera par le cas où $M\in\mathscr{GL}_n(\mathbb{C})$.
3. Le résultat est-il toujours vrai si $AM\neq MA$ ?