Oral blanc n° 3

1 Banque CCINP 38 (Analyse)

1. On se place sur $E=\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$, muni de la norme $\|\|_1$ définie par : $\forall f\in E, \|f\|_1=\int_0^1|f(t)|dt$.

   Soit $u: \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ f & \longmapsto & u(f)=g \end{array}$ avec

   $$\forall x\in[0,1],\ g(x)=\int_0^x f(t)dt.$$

   On admet que u est un endomorphisme de E.

   Prouver que u est continue et calculer $|||u|||$.
   Indication : considérer, pour tout entier n non nul, la fonction f_n définie par $f_n(t)=ne^{-nt}$.
2. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Soit $(a_1,a_2,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^n$ un n-uplet **non nul**, **fixé**.

   Soit $u: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1,x_2,\dots,x_n) & \longmapsto & \sum\limits_{i=1}^n a_ix_i \end{array}$.

   (a) Justifier que u est continue quel que soit le choix de la norme sur $\mathbb{R}^n$.
   (b) On munit $\mathbb{R}^n$ de $\|\|_2$ où

   $$\forall x=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n,\ \|x\|_2=\sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}.$$

   Calculer $|||u|||$.
3. Déterminer un espace vectoriel E, une norme sur E et un endomorphisme de E non continu pour la norme choisie. Justifier.

Remarque : Les questions 1., 2. et 3. sont indépendantes.

2 CCINP (Algèbre)

Soit $A=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$ et $M\in\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $M^2+M=A$.

1. Montrer que toute valeur propre de M prend au plus quatre valeurs que l'on donnera.
2. a) Montrer que 0 ou -1 est valeur propre de M.
   Indication : utiliser $\det(A)$.
   b) Que peut-on en déduire pour le polynôme caractéristique de M ?
   c) La matrice M est-elle diagonalisable ?
3. a) Justifier que A est diagonalisable et diagonaliser A.
   b) Soit $X\in\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $X^2+X=A$.
   Montrer qu'il existe $P\in\mathscr{GL}_2(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP$ et $P^{-1}XP$ sont diagonales.
   c) Déterminer toutes les matrices $X\in\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $X^2+X=A$.

Oral blanc n° 3

1 Banque CCINP 6 (Analyse)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs et ℓ un réel positif strictement inférieur à 1.

1. Démontrer que si $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\ell$, alors la série $\sum u_n$ converge.
   Indication : écrire, judicieusement, la définition de $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\ell$, puis majorer, pour n assez grand, u_n par le terme général d'une suite géométrique.
2. Quelle est la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant1}\frac{n!}{n^n}$?

2 CCINP (Probabilités)

Soit $p\in]0,1[$. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathscr{A},\mathbb{P})$ suivant la loi géométrique de paramètre p.
On pose $T=\min\{X,Y\}$ et $Z=|X-Y|$.

1. Rappeler, pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X=k)$, puis l'espérance et la variance de X.
2. a) Calculer $\mathbb{P}(T\geqslant k)$ pour tout $k\in\mathbb{N}^*$.
   b) Donner, pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, une relation entre $\mathbb{P}(T=k)$, $\mathbb{P}(T\geqslant k)$ et $\mathbb{P}(T\geqslant k+1)$.
   c) En déduire la loi de T, la reconnaître et donner $\mathbb{E}(T)$.
   d) Calculer $\mathbb{E}\left(\frac{1}{T}\right)$.
3. a) Soit $(k,n)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}$. Calculer $\mathbb{P}((T=k)\cap(Z=n))$.
   b) Déterminer la loi de Z et calculer son espérance.
4. Les variables aléatoires Z et T sont-elles indépendantes ?
5. On pose $U=\max\{X,Y\}$. Calculer $\mathbb{E}\left(\frac{U}{T}\right)$.

Oral blanc n° 3

1 **Mines-Telecom** Soit $p \in]0,1[$. Soit $(U_i)_{i\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

On suppose que pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, U_i suit la loi géométrique de paramètre p.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire $T_n = \sum_{i=1}^{n} U_i$.

Indication : on pourra utiliser la fonction génératrice de T_n.

2 **Mines-Telecom**

Soit $a \in]-1,1[$ fixé et la fonction $S : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n+x}$.

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction S.
2. Calculer $\lim_{x\to+\infty} S(x)$ puis déterminer un équivalent de S au voisinage de $+\infty$.
3. Déterminer $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $S(x) = \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x^2} + \underset{x\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

Oral blanc n° 3

1 **Mines-Telecom** Soit $(a,b) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$.

1. Soit $t \in]0,1[$. Écrire $\frac{t^{a-1}}{1+t^b}$ sous la forme $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)$.
2. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 0} \int_0^1 |u_n(t)|\,\mathrm{d}t$.
3. Justifier l'existence de $\int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b}\,\mathrm{d}t$ et démontrer que $\int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a+nb}$.

2 **Mines-Telecom**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A^3 + A^2 + A = 0$.

1. Montrer que la matrice A est diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Est-elle diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$?
2. Démontrer que $\mathrm{rg}(A)$ est un entier pair.
3. Donner un exemple de matrice non nulle $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A^3 + A^2 + A = 0$.