Oral blanc n° 3

1

Soit $\mathscr{S}$ l'ensemble des couples $(P,Q)\in\mathbb{R}[X]^2$ tels que

$$(X-1)^n Q + X^n P = 1.$$

1. Montrer l'existence et l'unicité d'un couple $(P_0,Q_0)\in\mathbb{R}_{n-1}[X]^2$ dans $\mathscr{S}$.
2. Déterminer $\mathscr{S}$.

2

On cherche les fonctions continues $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f(x)+\int_0^x (x-t)f(t)\,\mathrm{d}t = 1+x. \tag{1}$$

1. Trouver toutes les solutions de (1) DSE au voisinage de 0.
2. Montrer que si f vérifie (1), alors elle est de classe $\mathscr{C}^2$ et vérifie $(E)\ :\ y''+y=0$.
3. Résoudre (E).
4. À l'aide du théorème de Cauchy, trouver toutes les solutions de (1).

Oral blanc n° 3

1

Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{x^2} \frac{\ln(1+t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que f est dérivable sur $]0,1[$ et exprimer sa dérivée.
2. Montrer que f est continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $[0,1[$. Est-elle dérivable en 1 ? Pourquoi ?
3. Donner un développement limité à l'ordre 2 de f en 0.

2

1. Soit $q\in\mathbb{N}$. On pose $I_q = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^q \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$. Montrer que I_q est bien définie et que $I_q = q!$.
2. Pour $P,Q\in\mathbb{R}[X]$, on pose $\langle P,Q\rangle = \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.
   Montrer que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire.
3. Pour $P\in\mathbb{R}_n[X]$, on définit $\phi(P) = XP'' + (1-X)P'$. Montrer que ϕ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
4. Soient $P,Q\in\mathbb{R}[X]$. Montrer que
   $$\big\langle \phi(P),Q\big\rangle = -\int_0^{+\infty} tP'(t)Q'(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$
   Montrer que ϕ est autoadjoint.