Oral blanc n° 2

1 Banque CCINP 77 (Algèbre)

Soit E un espace euclidien.

1. Soit A un sous-espace vectoriel de E.
   Démontrer que $\left(A^{\perp}\right)^{\perp} = A$.
2. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
   (a) Démontrer que $(F+G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}$.
   (b) Démontrer que $(F \cap G)^{\perp} = F^{\perp} + G^{\perp}$.

2 CCINP (Analyse)

Soit $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^x}{x^n}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Étudier sa continuité.
3. Calculer $f(2)$.

Oral blanc n° 2

1 Banque CCINP 102 (Probabilités)

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Soit $p \in]0,1[$. On pose $q = 1-p$.

On considère N variables aléatoires $X_1, X_2, \cdots, X_N$ définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, mutuellement indépendantes et de même loi géométrique de paramètre p.

1. Soit $i \in [\![1, N]\!]$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer $P(X_i \leqslant n)$, puis $P(X_i > n)$.
2. On considère la variable aléatoire Y définie par $Y = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant N}(X_i)$ c'est-à-dire

$$\forall \omega \in \Omega,\ Y(\omega) = \min(X_1(\omega), \cdots, X_N(\omega)),$$

   $\min$ désignant « le plus petit élément de ».
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $P(Y > n)$. En déduire $P(Y \leqslant n)$, puis $P(Y = n)$.
   (b) Reconnaître la loi de Y. En déduire $E(Y)$.

2 Mines-Ponts (Analyse)

Soit $(u_n)_{n \geqslant 1}$ une suite réelle ne prenant pas la valeur -1. On définit une suite $(v_n)_{n \geqslant 1}$ en posant $v_n = \dfrac{u_n}{\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(1+u_k)}$.

1. On suppose ici que $u_n \geqslant 0$ pour tout n. Quelle est la nature de la série de terme général v_n ? Calculer sa somme dans le cas où la série de terme général u_n diverge.
2. On suppose ici que $u_n = a^{2^n}$ où a est un élément fixé de $[0,1[$. Calculer la somme de la série de terme général v_n.
3. Étudier la série de terme général v_n pour $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$, puis pour $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$.

Oral blanc n° 2

1 Banque CCINP 97 (Probabilités)

Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^2$ dont la loi est donnée par :

$$\forall (j,k)\in\mathbb{N}^2,\ P\big((X,Y)=(j,k)\big)=\frac{(j+k)\left(\frac{1}{2}\right)^{j+k}}{\mathrm{e}\, j!\, k!}.$$

1. Déterminer les lois marginales de X et de Y.
   Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
2. Prouver que $E\left[2^{X+Y}\right]$ existe et la calculer.

2 Mines-Telecom (Analyse)

Soit E un espace euclidien et $\mathscr{K}$ l'ensemble des projecteurs orthogonaux de E. Soit p un projecteur.

1. Montrer que
$$p\in\mathscr{K} \iff \forall\, x\in E,\ \ \|p(x)\|\leqslant\|x\|.$$
2. Montrer que $\mathscr{K}$ est compact.

Oral blanc n° 2

1 Banque CCINP 99 (Probabilités)

1. Rappeler l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
2. Soit (Y_n) une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi et et telle que $\forall n\in\mathbb{N},\ Y_n\in L^2$.
   On pose $S_n=\sum_{k=1}^{n} Y_k$.
   Prouver que
$$\forall\, a\in\,]0,+\infty[,\ P\left(\left|\frac{S_n}{n}-E(Y_1)\right|\geqslant a\right)\leqslant\frac{V(Y_1)}{na^2}.$$
3. **Application**
   On effectue des tirages successifs, avec remise, d'une boule dans une urne contenant 2 boules rouges et 3 boules noires.
   À partir de quel nombre de tirages peut-on garantir à plus de 95% que la proportion de boules rouges obtenues restera comprise entre $0{,}35$ et $0{,}45$?
   Indication : considérer la suite (Y_i) de variables aléatoires de Bernoulli où Y_i mesure l'issue du $i^{\text{ème}}$ tirage.

2 CCINP (Analyse)

Pour $x\in\mathbb{R}$, on note $S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-(nx)^2}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de S.
2. Étudier la continuité de S sur son domaine de définition.
3. Calculer la limite de $S(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
4. On admet que $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$. Déterminer $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-(xt)^2}\,\mathrm{d}t$ pour $x>0$.
5. En déduire un équivalent de $S(x)$ quand x tend vers 0^+.

Oral blanc n° 2

1 Banque CCINP 82 (Algèbre)

Soit E un espace préhilbertien et F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie $n>0$.

On admet que, pour tout $x\in E$, il existe un élément unique y_0 de F tel que $x-y_0$ soit orthogonal à F et que la distance de x à F soit égale à $\|x-y_0\|$.

Pour $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $A'=\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$, on pose

$$(A\mid A')=aa'+bb'+cc'+dd'.$$

1. Démontrer que $(.|.)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Calculer la distance de la matrice $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ au sous-espace vectoriel F des matrices triangulaires supérieures.

2 CCINP (Analyse)

Pour $x\in\mathbb{R}$, on note $S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-(nx)^2}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de S.
2. Étudier la continuité de S sur son domaine de définition.
3. Calculer la limite de $S(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
4. On admet que $\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$ converge et vaut $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$. Déterminer $\int_0^{+\infty} e^{-(xt)^2}\,dt$ pour $x>0$.
5. En déduire un équivalent de $S(x)$ quand x tend vers 0^+.

Oral blanc n° 2

1 Banque CCINP 75 (Algèbre)

On considère la matrice $A=\begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que A n'est pas diagonalisable.
2. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à A.

   Trouver une base (v_1,v_2) de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle la matrice de f est de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$.

   On donnera explicitement les valeurs de a, b et c.
3. En déduire la résolution du système différentiel $\begin{cases} x'=-x-4y \\ y'=x+3y \end{cases}$.

2 Mines-Ponts (Analyse)

1. Déterminer le domaine de définition de

$$f:x\mapsto \int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}e^{-xt}\,dt.$$

2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^+$.
3. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_*^+$.
4. Donner une expression de f' puis de f.
5. En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,dt$.

Oral blanc n° 2

1 Banque CCINP 59 (Algèbre)

Soit la matrice $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ défini par : $f(M)=AM$.

1. Déterminer une base de $\operatorname{Ker} f$.
2. f est-il surjectif ?
3. Déterminer une base de $\operatorname{Im} f$.
4. A-t-on $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})=\operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$?

2 CCINP (Analyse)

Soit $(E): x\,y''(x)+y'(x)+x\,y(x)=0$.

1. (a) Justifier l'existence de solutions de (E) développables en série entière.
   (b) Soit J_0 une solution de (E) développable en série entière qui vérifie $J_0(0)=1$. Expliciter J_0. Quel est son ensemble de définition ?
2. Soit $I_n=\displaystyle\int_0^{\pi}\sin^{2n}(t)\,\mathrm{d}t$. Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}, I_n=\dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\,\pi$.
3. Montrer que $J_0(x)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}\cos(x\sin(t))\,\mathrm{d}t$.