Oral blanc n° 2

1 Banque CCINP 62 (Algèbre)

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f^2 - f - 2\mathrm{Id} = 0$.

1. Prouver que f est bijectif et exprimer f^{-1} en fonction de f.
2. Prouver que $E = \mathrm{Ker}(f+\mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(f-2\mathrm{Id})$:
   (a) en utilisant le lemme des noyaux.
   (b) sans utiliser le lemme des noyaux.
3. Dans cette question, on suppose que E est de dimension finie.
   Prouver que $\mathrm{Im}(f+\mathrm{Id}) = \mathrm{Ker}(f-2\mathrm{Id})$.

2 CCINP (Analyse)

Soit $S : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$.

1. Montrer que S est définie sur $]0,+\infty[$.
2. Calculer $S(1)$ et en déduire que $\forall x > 0,\quad xS(x) = \dfrac{1}{\mathrm{e}} + S(x+1)$.
3. Montrer que $S(x) \sim \dfrac{1}{x}$ lorsque $x \to 0$.
4. Montrer que S est de classe $\mathscr{C}^\infty$.

Oral blanc n° 2

1 Banque CCINP 111 (Probabilités)

On admet, dans cet exercice, que : $\forall q \in \mathbb{N}$, $\forall x \in]-1,1[$, $\displaystyle\sum_{k\geqslant q} \binom{k}{q} x^{k-q}$ converge et que $\displaystyle\sum_{k=q}^{+\infty} \binom{k}{q} x^{k-q} = \frac{1}{(1-x)^{q+1}}$.

Soit $p \in]0,1[$.
Soit $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé.
Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On suppose que la loi de probabilité du couple (X,Y) est donnée par

$$\forall (k,n) \in \mathbb{N}^2,\ P((X=k)\cap(Y=n)) = \begin{cases} \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n p(1-p)^n & \text{si } k \leqslant n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Vérifier qu'il s'agit bien d'une loi de probabilité.
2. (a) Déterminer la loi de Y.
   (b) Prouver que $1+Y$ suit une loi géométrique.
   (c) Déterminer l'espérance de Y.
3. Déterminer la loi de X.

2 Mines-Telecom (Analyse)

Soit $f : x \in [-1,1] \mapsto \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$.

1. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[-1,1]$.
2. Montrer par deux méthode différentes que f est développable en série entière au voisinage de 0.

Oral blanc n° 2

1 Banque CCINP 77 (Algèbre)

Soit E un espace euclidien.

1. Soit A un sous-espace vectoriel de E. Démontrer que $\left(A^{\perp}\right)^{\perp} = A$.
2. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
   (a) Démontrer que $(F+G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}$.
   (b) Démontrer que $(F \cap G)^{\perp} = F^{\perp} + G^{\perp}$.

2 Mines-Telecom (Analyse)

Soit $f : t \mapsto \displaystyle\int_0^{\pi/2} e^{-t\sin x}\,dx$ et (E) l'équation différentielle $t\,y'' + y' - t\,y + 1 = 0$.

1. Montrer que f est solution de (E).
2. Trouver toutes les solutions de (E) développables en série entière.
3. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{\pi/2} (\sin x)^n\,dx$.