17 **Mines-Ponts 2022 (Théo) avec 15 minutes de préparation** Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 2$. Soit $f, g \in \mathscr{L}(E)$ tels que $f \circ g - g \circ f = f$.

1. Montrer que f est nilpotente.
2. On suppose $f^{n-1} \neq 0$. Montrer qu'il existe une base e de E telle que $\mathrm{Mat}_e(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ (0) & & & 0 \end{pmatrix}$.

1)

$$\begin{cases} f^2 = f^2 \circ g - f \circ g \circ f & (1) \\ f^2 = f \circ g \circ f - g \circ f^2 & (2) \end{cases}$$

(1) + (2) : $2f^2 = f^2 \circ g - g \circ f^2$.

donc $f^2 = \dfrac{f^2 \circ g - g \circ f^2}{2}$

$$f^3 = f^2 \circ f = \frac{f^2 \circ g \circ f - g \circ f^3}{2}$$

or $\quad 2f^3 = f^2 \circ g \circ f - g \circ f^3$

Or $\quad f = f \circ g - g \circ f \quad$ i.e $\quad g \circ f = f \circ g - f$

or $\quad 2f^3 = f^3 \circ g - f^3 - g \circ f^3$

donc $\quad 3f^3 = f^3 \circ g - g \circ f^3$

Montrons par récurrence simple la propriété suivante pour $k \in \mathbb{N}^*$,

$\mathcal{P}(k)$: « $f^k = \dfrac{f^k \circ g - g \circ f^k}{k}$ »

Initialisation : Si $k = 1$,

$f = \dfrac{f \circ g - g \circ f}{1}$ d'où $\mathcal{P}(1)$

Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{P}(k)$.
Montrons $\mathcal{P}(k+1)$.

$$f^{k+1} = f^k \circ f = \frac{f^k \circ g - g \circ f^k}{k} \circ f \quad \text{par H.R}$$

donc $k f^{k+1} = f^k \circ g \circ f - g \circ f^{k+1}$

Or $g \circ f = f \circ g - f$

donc $k f^{k+1} = f^{k+1} \circ g - f^{k+1} - g \circ f^{k+1}$

d'où $(k+1)f^{k+1} = f^{k+1} \circ g - g \circ f^{k+1}$

Récurrence établie

Ainsi $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $k f^k = f^k \circ g - g \circ f^k$

Soit $d \leq n$ ~~tel que~~,

$$\Pi_f = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$$ On a ~~tel que~~ $\Pi_f(f) = 0$

$$\Pi'_f = \sum_{k=0}^{d} k a_k X^{k-1}$$

donc $f \circ \Pi'_f(f) = f\left(\sum_{k=0}^{d} k a_k f^{k-1}\right)$

$$= \sum_{k=0}^{d} k a_k f^k$$

$$= \sum_{k=0}^{d} a_k \left(f^k \circ g - g \circ f^k \right)$$

$$= \sum_{k=0}^{d} a_k f^k \circ g \quad - \quad \sum_{k=0}^{d} a_k \, g \circ f^k$$

$$= \Pi_f(f) \circ g \quad - \quad g\left(\Pi_f(f)\right)$$

$$= 0_{\mathcal{L}(E)}$$

donc $X \circ \Pi'_f$ est un polynôme annulateur de f

donc $\Pi_f \mid X \Pi'_f$

or $\deg(\Pi_f) = \deg(X \Pi'_f)$

donc $\Pi_f = X \Pi'_f$ car Π_f unitaire

Puis

~~Or~~ $\Pi'_f = \Pi'_f + X\Pi''_f$

donc $\Pi''_f = 0_{\mathbb{C}[X]}$

donc $\deg(\Pi'_f) = 0$ car $\underline{\Pi_f \neq 0_{\mathbb{C}[X]}}$

Ne suffit pas : Π_f n'est pas constant.
(pour avoir $\underline{\Pi'_f} \neq 0_{\mathbb{C}[X]}$)

donc $\Pi_f = X$

$\boxed{\text{d'où } f \text{ nilpotente}}$

2)

$e = (e_1, \ldots, e_n)$

? Vous faites une analyse ? Dites-le !
Mal rédigé.

On a $e_1 \in \mathrm{Ker}(f)$ car $f(e_1) = 0$

$f(e_2) = e_1$

$f(e_3) = e_2$

$\vdots$

$f(e_{n-1}) = e_{n-2}$ i.e $e_{n-2} = f^2(e_n)$

$f(e_n) = e_{n-1}$

$f^2(e_2) = f(e_1) = 0$

donc $f^2(e_3) = f(e_2) = e_1$

donc $\forall k \in [\![2;n]\!],\ e_k = f^{n-k}(e_n)$

Soit $e_n \in E$, quelconque ?

Montrons que $e = (f^{n-1}(e_n), f^{n-2}(e_n), \dots, e_n)$ base de E

Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$,

tel que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f^{n-i}(e_n) = 0$

Alors

$\lambda_1 f^{n-1}(e_n) + \dots + \lambda_n e_n = 0$

donc $f^{n-1}(\lambda_1 f^{n-1}(e_n) + \dots + \lambda_n e_n) = 0$

Ne suffit pas !

$\lambda_n f^{n-1}(e_n) = 0$ donc $\lambda_n = 0$ car $f^{n-1} \neq 0_E$

Il faut que $f^{n-1}(e_n) \neq 0$

donc $\lambda_1 f^{n-1}(e_n) + \dots + \lambda_{n-2} f(e_n) = 0$

donc $\lambda_{n-2} f^{n-1}(e_n) = 0$ donc $\lambda_{n-2} = 0$

On procède ainsi par récurrence et on obtient

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots \lambda_n = 0$$

donc e famille libre de n vecteurs de E

d'où e base de E.

Puis $f(e_1) = f^n(e_n) = 0$ car f nilpotent

donc $e_1 \in \operatorname{Ker} f$

d'où $\operatorname{Mat}_e(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ 0 & \ddots & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$