Simon
THOMAS
MPI

Exercice 154

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$f_n : t \mapsto \frac{1}{(1+t^4)^n}$$

qui est continue sur $\mathbb{R}^+$ et soit $t \in \mathbb{R}^+$,

$$0 \leq f_n(t) \leq \frac{1}{t^{4n}+1}$$

Or $t \mapsto \dfrac{1}{t^{4n}+1}$ est intégrable sur $[0;+\infty[$

par critère de Riemann

avec $4n > 1$ car $n \in \mathbb{N}^*$.

Par comparaison, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n \text{ existe}}$

2) Soit $n \geqslant 1$

$$I_n - I_{n-1} = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^4)^{n-1}} \left[\frac{1}{1+t^4} - 1\right] dt$$

$$= -\int_0^{+\infty} \frac{t^4}{(1+t^4)^n}\, dt \leq 0$$

et $\forall n \geqslant 1, I_n \geqslant 0$ donc $\boxed{(I_n) \text{ est décroissante et converge}}$

3) Intégration par partie :

avec $t \mapsto t$ et f_n de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$.

$$I_n = \left[\frac{t}{(1+t^4)^n} \right]_0^{+\infty} + n \int_0^{+\infty} \frac{4t^4}{(1+t^4)^{n+1}} dt$$

comme $\frac{t}{(1+t^4)^n} \xrightarrow[t \to 0]{} 0$

et $\frac{t}{(1+t^4)^n} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$

donc $I_n = 4n \int_0^{+\infty} \frac{t^4}{(1+t^4)^{n+1}} dt$

$$= 4n \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^4)^n} dt - 4n \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^4)^{n+1}} dt$$

$$= 4n \, I_n - 4n \, I_{n+1}$$

d'où $\boxed{I_{n+1} = \frac{4n-1}{4n} . I_n}$

Scanné avec CamScanner

4) Soit $t \in \mathbb{R}^*$

$$f_n(t) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

et $f_n(0) = 1 \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$

donc $\boxed{f_n(t) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \begin{cases} 0 & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}}$

Elle ne converge pas uniformément car elle tend vers une fonction non continue

Que faites-vous ?

5) H1- La suite (f_n) converge simplement vers f

Dans la question : ok

H2- $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in \mathbb{R}^+,$

$$|f_n(t)| \leq \frac{1}{1+t^4} = \phi(t)$$

avec $\phi \in L^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ comme à la question ①

donc $\boxed{I_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0}$ par ...