

1. Polynômes

1 Mines-Télécom 2019

Soit $(n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Démontrer que $X^n - 1$ divise $X^m - 1$ si et seulement si n divise m .

Variante : montrer que $X^{n \wedge m} - 1 = (X^n - 1) \wedge (X^m - 1)$.

2 Mines-Télécom 2019

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré $n \geq 2$, scindé à racines simples dans $\mathbb{R}[X]$.

1. Démontrer que P' est scindé à racines simples dans $\mathbb{R}[X]$.

2. On note $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ les racines de P et $\beta_1, \dots, \beta_{n-1}$ celles de P' . On pose $M = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \alpha_k$ et $m = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} \beta_k$.

Comparer M et m .

3 Mines-Ponts 2018

Soit a, b et c les trois racines complexes du polynôme $P = X^3 + X^2 + 1$.

Résoudre le système (S) :
$$\begin{cases} x + ay + a^2z = a^4 \\ x + by + b^2z = b^4 \\ x + cy + c^2z = c^4 \end{cases} \text{ d'inconnue } (x, y, z) \in \mathbb{C}^3.$$

4 Mines-Télécom 2018

1. Soit $m \in \mathbb{N}^*$, $P \in \mathbb{R}_{2m}[X]$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$.

On suppose que a et b sont racines d'ordre m de P . Montrer que pour tout $k \in \llbracket 1, m \rrbracket$, $P^{(k)}$ admet k racines distinctes dans $]a, b[$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $Q_n(X) = ((X^2 - 1)^n)^{(n)}$.

Quel est le degré de Q_n ? Montrer que Q_n admet n racines simples dans $] -1, 1[$.

5 CCINP 2017 Polynômes de Tchebychev

Soit $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de polynômes définie par $T_0(X) = 1$, $T_1(X) = X$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$T_{n+2}(X) = 2XT_{n+1}(X) - T_n(X).$$

1. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le degré et le coefficient dominant de T_n .

2. Démontrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta).$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note

$$E_n = \{P \in \mathbb{R}[X], (1 - X^2)P'' - XP' + n^2P = 0\}.$$

a) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$. Démontrer que si $P \in E_n$, alors $P = 0$ ou $\deg(P) = n$.

b) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_n \in E_n$.

6 Centrale - Polynômes de Tchebychev (suite)

Décomposer en éléments simples la fraction $\frac{1}{T_n}$.

7 Mines-Ponts 2017

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Démontrer que les deux propositions suivantes sont équivalentes

(\mathcal{P}_1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) \geq 0$.

(\mathcal{P}_2) Il existe $(A, B) \in \mathbb{R}[X]^2$ tel que $P = A^2 + B^2$.

8 TPE (Mines-Télécom) 2017 – Théorème de Gauß-Lucas

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré n et z_1, \dots, z_n les racines de P dans \mathbb{C} . L'ensemble :

$$\mathcal{C}_P = \left\{ \sum_{k=1}^n \lambda_k z_k \text{ avec } (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}_+)^n \text{ tel que } \sum_{k=1}^n \lambda_k = 1 \right\}$$

est appelé enveloppe convexe des racines de P .

Démontrer que toute racine complexe de P' appartient à \mathcal{C}_P .

9 Centrale 2019

1. Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que P' divise P .

2. Montrer que si $P \in \mathbb{R}[X]$ est scindé, il en est de même de P' .

3. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ non constant. On note z_1, \dots, z_r ses racines. Montrer que les racines non réelles de P' sont dans

$$\bigcup_{k=1}^r \{z \in \mathbb{C}, |z - \Re(z_k)| \leq |\Im(z_k)|\}.$$

10 Mines-Ponts

Décomposer en éléments simples la fraction $\frac{X^{n-1}}{X^n - 1}$.

2. Algèbre générale

11 CCINP

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(G, *)$ un groupe cyclique de cardinal n et a un générateur de $(G, *)$.

Soit $r \in \mathbb{N}^*$, $d = \text{PGCD}(n, r)$ et $f : \begin{cases} G & \longrightarrow G \\ x & \longmapsto x^r. \end{cases}$

1. Montrer que f est un morphisme de groupes.

2. Déterminer le noyau de f .

3. Montrer que l'image de f est le sous-groupe de $(G, *)$ engendré par a^d .

4. Soit $y \in \text{Im}(f)$. Déterminer les solutions de l'équation $x^r = y$ d'inconnue $x \in G$.

12 CCINP

Soit $(G, *)$, (H, \times) deux groupes et f un morphisme de groupes de $(G, *)$ vers (H, \times) .

1. Soit $x \in G$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que x est d'ordre fini égal à n . Montrer que $f(x)$ est d'ordre fini et que son ordre divise n .
2. Déterminer tous les morphismes de groupes de $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}, +)$ vers $(\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}, +)$.
3. Déterminer tous les morphismes de groupes de $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, +)$ vers $(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}, +)$.

13 Mines-Télécom 2019

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{N}^2$, on note $x \vee y$ le PPCM de x et y , et $x \wedge y$ le PGCD de x et y . Déterminer tous les couples $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ vérifiant

$$x \vee y + 11(x \wedge y) = 203.$$

14 Mines-Télécom 2019

Par combien de 0 se termine l'écriture décimale de l'entier naturel 2022! ?

15 Mines-Télécom 2018

Résoudre le système

$$(S) \begin{cases} x + y & \equiv 4 & [11] \\ x \cdot y & \equiv 10 & [11] \end{cases}$$

d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$.

16 Mines-Ponts 2017

Déterminer l'ensemble des entiers relatifs n tels que $n^{13} \equiv n \pmod{42}$.

3. Algèbre linéaire**17 Mines-Ponts 2022 (Théo) avec 15 minutes de préparation**

Soit E un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$. Soit $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g - g \circ f = f$.

1. Montrer que f est nilpotente.
2. On suppose $f^{n-1} \neq 0$. Montrer qu'il existe une base e

$$\text{de } E \text{ telle que } \text{Mat}_e(f) = \begin{pmatrix} 0 & & & & (0) \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ (0) & & & & 1 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

18 CCINP 2021 (Marcelin)

\mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} , E est un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension n .

Soient f et g deux endomorphismes de E .

Montrer que les deux propositions suivantes sont équivalentes

- (i) $\text{rg}(f + g) = \text{rg} f + \text{rg} g$.
- (ii) $\text{Im} f \cap \text{Im} g = \{0\}$ et $E = \text{Ker} f + \text{Ker} g$.

19 CCINP 2021 (Mailane)

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension $n > 1$, f endomorphisme de E .

1. Soit f un projecteur, la condition « $\text{rg} f = 1$ » est elle nécessaire ? Suffisante ?
2. Soit f tel que $\text{rg} f = 1$ et $\text{tr} f = 1$. Montrer que f est un projecteur.
3. Déterminer une base de $\mathcal{L}(E)$ formée de projecteurs.

20 CCINP - Mines-Télécom 2019

Soit E un \mathbb{C} -espace vectoriel et p, q des projecteurs de E .

1. Montrer que les trois propositions suivantes sont équivalentes :

(P1) $p + q$ est un projecteur ;

(P2) $p \circ q = 0 = q \circ p$;

(P3) $\text{Im}(q) \subset \text{Ker}(p)$ et $\text{Im}(p) \subset \text{Ker}(q)$.

2. On suppose que $p + q$ est un projecteur. Démontrer que

$$\text{Ker}(p + q) = \text{Ker}(p) \cap \text{Ker}(q) \quad \text{et} \quad \text{Im}(p + q) = \text{Im}(p) + \text{Im}(q).$$

21 Mines-Télécom 2019

Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer le déterminant de taille n défini par :

$$D_n = \begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & ab \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a+b \end{vmatrix}.$$

22 CCINP 2019

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ et g_n l'endomorphisme de $\mathbb{R}_{n+1}[X]$ défini par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_{n+1}[X], g_n(P) = P(X+1) - P(X).$$

Déterminer le noyau et l'image de g_n .

2. Soit g l'endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ vers $\mathbb{R}[X]$ défini par :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], g(P) = P(X+1) - P(X).$$

Montrer que g est surjectif.

23 CCINP 2018

Soit $(a, m) \in \mathbb{R}^2$. Résoudre le système

$$(S) \begin{cases} 3x + my + z = 1 \\ (m-3)x - z = -1 \\ x + y + mz = a \end{cases}$$

d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ en discutant selon les valeurs de m et a .

24 Mines-Télécom 2018

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et

$$M = \begin{pmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{pmatrix}.$$

Calculer M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

25 CCINP 2018

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ fixée et

$$u : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ X & \longmapsto -X + \text{tr}(X)A. \end{cases}$$

1. Montrer que u est une application linéaire.
2. Montrer que u est injective si et seulement si $\text{tr}(A) \neq 1$.
3. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que u ne soit pas bijective.
4. Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ fixée. Résoudre l'équation linéaire $u(X) = B$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

26 Mines-Télécom 2018

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note f_k et g_k les fonctions de \mathbb{R} vers \mathbb{R} définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_k(x) = \cos(kx) \text{ et } g_k(x) = \sin(kx).$$

Montrer que $(f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_n)$ est une famille libre de l'espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

27 Mines-Télécom 2018

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer, pour tout entier $n \geq 2$, le déterminant de taille n défini par :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 2\cos(\theta) & 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 2\cos(\theta) \end{vmatrix}.$$

28 Mines-Télécom 2022 (Lilian) Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

1. n est pair.
2. Il existe $A, B \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB + BA = 0_n$.
3. Il existe $A, B \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB + BA = 0_n$.

29 Mines-Télécom 2018

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$. Soit u et v deux endomorphismes de E tels que $u+v = \text{id}_E$ et $\text{rg}(u) + \text{rg}(v) \leq n$.

Démontrer que $E = \text{Im}(u) \oplus \text{Im}(v)$ puis en déduire que u et v sont des projecteurs.

30 TPE (Mines-Télécom) 2018

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A^3 = 0$.

1. Montrer que $I_n + A$ est inversible.
2. Soit $B \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $AB = BA$. Démontrer que $A+B$ est inversible.

31 CCINP 2021 (Maximilien)

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $f^2 \neq 0$ et $f^3 = 0$.

1. Montrer qu'il existe une base à déterminer dans laquelle

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer B^n .

3. Soient $(u_n), (v_n), (w_n)$ telles que $u_0 = 0, v_0 = w_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + v_n \\ v_{n+1} = v_n + w_n \\ w_{n+1} = w_n \end{cases}$$

Exprimer ces suites en fonction de n .

32 Mines-Ponts 2021 (Maximilien)

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie de dimension n et $\mathcal{F} = (f_i)_{1 \leq i \leq p}$ une famille de formes linéaires.

Montrer que \mathcal{F} est libre si et seulement si

$$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p, \exists x_0 \in E, (f_1(x_0), \dots, f_p(x_0)) = (\lambda_1, \dots, \lambda_p).$$

4. Réduction des endomorphismes**33 CCINP 2022 (Aure) couplé avec 20** Soit

$u : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ X & \longmapsto -X + \text{tr}(X)I_n \end{cases}$. Montrer que u est diagonalisable et donner ses sous-espaces propres.

34 CCINP 2022 (Greg) couplé avec 17 Soit $n \geq 2$ et

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $A^2 = I_n, A \neq I_n$ et $A \neq -I_n$.

1. Montrer que $\text{tr} A \equiv n[2]$.
2. Montrer que $\text{tr} A \leq n-2$.

35 CCINP 2022 (Guillaume) couplé avec 11 Soit $n \geq 3$

un entier naturel. On pose $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 1 & & & & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

et f l'endomorphisme canoniquement associé.

1. Déterminer le rang de M .
2. Trouver les valeurs propres de M ainsi que les sous-espaces propres associés.

3. Donner la matrice de la projection orthogonale sur $\mathcal{I}mf$ dans la base canonique de \mathbb{R}_n .

36 Mines-Telecom 2022 (Guillaume) Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$

telle que $rg(A) = 1$.

1. Donner le polynôme caractéristique de A .
2. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que A soit diagonalisable.
3. Bonus : montrer que $A^2 = tr(A) \cdot A$.

37 Mines-Télécom 2022 (Aure) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

une matrice nilpotente d'indice de nilpotence $p \in \mathbb{N}^*$.

1. Donner son polynôme minimal.
2. (a) On suppose que e^N est diagonalisable. Montrer que $e^N - I_n$ est diagonalisable et nilpotente.
(b) En déduire que $N = 0_n$.

38 CCINP 2022 (Louise) couplé avec 9 Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ où

E est un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension n . On suppose que u admet n valeurs propres distinctes.

1. Soit $v \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $u \circ v = v \circ u \iff u$ et v possèdent une base de vecteurs propres en commun.
2. Soit A la matrice de u dans une base e . Discuter du nombre de solutions de l'équation $X^2 = A$.

39 CCINP 2021 (Lucas)

1. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Que pensez-vous de l'affirmation

$$AB = 0 \implies A = 0 \text{ ou } B = 0$$

Question bonus hors exercice : trouver une condition supplémentaire à $AB = 0$ pour que cela implique $A = 0$.

2. (a) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A(A - I_n)^2 = 0$. Montrer que $tr A \in \mathbb{N}$.
(b) Déterminer A dans le cas où $tr A = 0$.
3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $A(A - I_n)^2 = 0$. A est-elle toujours diagonalisable ?

40 Mines Telecom 2021 (Éléonore)

Soit $n \geq 3$. On pose A la matrice carrée de taille n avec des 1 sur la première ligne, la première colonne et la diagonale et des 0 ailleurs.

Montrer que 1 est valeur propre de A et calculer son sous-espace propre.

Déterminer les autres valeurs propres de A et leurs sous-espaces propres.

41 Mines Telecom 2021 (Mariette) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Mon-

trer que

$$tr I_n = tr A = tr A^2 = \dots = tr A^n$$

si et seulement si $Sp A = \{1\}$.

42 CCINP 2019

Soit $b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. On considère dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} b & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \dots & \dots & b \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad J = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

1. a) Exprimer A en fonction de I_n et J .
b) Montrer que $P(X) = X^2 + (2 - 2b - n)X + (b - 1)(n + b - 1)$ est un polynôme annulateur de A .
- a) Déterminer les valeurs propres et la dimension des sous-espaces propres de A .
b) Calculer $\det(A)$.

43 CCINP 2019

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et A, B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$AB = BA. \text{ On pose } M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & A \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k B = B A^k$. Calculer M^k pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
2. Montrer que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $P(M) = \begin{pmatrix} P(A) & B P'(A) \\ 0 & P(A) \end{pmatrix}$.
3. Soit Q un polynôme annulateur de A , scindé à racines simples.
Montrer que $Q'(A)$ est une matrice inversible.
4. Montrer que si M est diagonalisable, alors A est diagonalisable et $B = 0$.
5. Établir la réciproque.

44 TPE (Mines-Télécom) 2019

$$\text{Soit } z \in \mathbb{C} \text{ et } A = \begin{pmatrix} 0 & z & z \\ 1 & 0 & z \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur z pour que A soit diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

45 CCINP 2019 Soit dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer $A^2 - 4A$. En déduire un polynôme annulateur et le polynôme minimal de A . En déduire l'unique valeur propre de A . La matrice A est-elle diagonalisable ? Est-elle inversible ?
2. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $(X - 2)^2$.
3. Exprimer A^n en fonction de A, I_3 et n .
4. L'expression obtenue à la question 3) est-elle toujours vraie pour $n = 0$? $n = 1$? $n = -1$?

46 TPE (Mines-Télécom) 2019 Soit E le \mathbb{R} -espace vec-

toriel défini par

$$E = \left\{ f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}), f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \right\}.$$

Soit T l'endomorphisme de E défini par :

$$\forall f \in E, \forall x \in \mathbb{R}_+, T(f)(x) = f(x+1).$$

Déterminer l'ensemble des valeurs propres de f .

47 CCINP 2019 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Dans cette question, on considère A comme matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Calculer les valeurs propres de A et déterminer une base de chaque sous-espace propre de A .

La matrice A est-elle diagonalisable? Déterminer le polynôme minimal de A .

2. Dans cette question, on considère A comme matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

Calculer les valeurs propres de A et déterminer une base de chaque sous-espace propre de A .

La matrice A est-elle diagonalisable? Déterminer le polynôme minimal de A .

3. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

48 Mines-Télécom 2019

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

1. Exprimer A^2 en fonction de A et I_3 .

2. Justifier que A est diagonalisable et diagonaliser A .

3. Soit λ_1 et λ_2 les deux valeurs propres de A . On pose $B = A - \lambda_1 I_3$ et $C = A - \lambda_2 I_3$.

Calculer BC , CB et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, B^n et C^n .

Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, A^n en fonction de B et C , puis calculer A^n .

49 CCINP 2019

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie et f, g deux endomorphismes de E .

1. Démontrer que si f est bijectif, alors $f \circ g$ et $g \circ f$ ont même polynôme caractéristique.

2. Démontrer que si f, g sont bijectifs et $f \circ g$ est diagonalisable, alors $g \circ f$ est diagonalisable.

3. Démontrer que $f \circ g$ et $g \circ f$ ont les mêmes valeurs propres.

4. Donner deux matrices A, B de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ non diagonalisables et telle que AB est diagonalisable.

50 Mines-Télécom 2019

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 + A + 4I_n = 0$.

1. Montrer que A n'admet aucune valeur propre réelle.

2. Montrer que n est pair.

3. Déterminer $\text{tr}(A)$ et $\det(A)$.

51 CCINP 2019 Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. La matrice A est-elle diagonalisable?

2. On suppose qu'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ telle que $B^2 = A$.

Déterminer le polynôme caractéristique de B . En déduire une contradiction. Conclure.

3. Montrer que A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

52 CCINP 2019

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension 3 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E .

Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont la matrice dans la

$$\text{base } \mathcal{B} \text{ est } A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -12 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Pour tout vecteur $x \in E$, on pose $E(x) = \text{Vect}\{f^k(x), k \in \mathbb{N}\}$.

1. Déterminer $E(e_1)$.

2. Calculer le polynôme caractéristique de f et vérifier que 2 est valeur propre de f .

3. Déterminer les valeurs propres de f et les sous-espaces propres associés.

L'endomorphisme f est-il diagonalisable?

4. Déterminer tous les vecteurs x de E tels que $E(x) \neq E$.

53 CCINP 2019

Soit f un endomorphisme de \mathbb{R}^3 tel que $f^3 + f = 0$ et $f \neq 0$.

1. Soit A la matrice de f dans la base canonique de \mathbb{R}^3 . Montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

2. Déterminer le rang de f .

3. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$.

4. En utilisant le lemme des noyaux, montrer que $\mathbb{R}^3 = \text{Ker}(f) \oplus \text{Ker}(f^2 + \text{id}_E)$.

5. Montrer que $\text{Im}(f) = \text{Ker}(f^2 + \text{id})$.

6. Montrer qu'il existe une base de \mathbb{R}^3 dans laquelle la

$$\text{matrice de } f \text{ est } A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

54 CCINP 2019

$$\text{Soit } a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}_+ \text{ et } c \in \mathbb{R}_+. \text{ On pose } A = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & a & 0 \\ c & 0 & a \end{pmatrix}.$$

1. La matrice A est-elle diagonalisable? Diagonaliser A lorsque A est diagonalisable.

2. On suppose $c = 0$. Calculer $\exp(A)$.

3. On suppose $bc \neq 0$. Expliquer comment on peut calculer $\exp(A)$.

55 CCINP 2019

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\text{tr} : \begin{cases} E & \longrightarrow \mathbb{R} \\ M & \longmapsto \text{tr}(M) \end{cases}$.

- Montrer que $\text{Im}(\text{tr}) = \mathbb{R}$.
 - Déterminer $\dim(\text{Ker}(\text{tr}))$.
 - Montrer que $E = \text{Ker}(\text{tr}) \oplus \text{Vect}(I_n)$.
- Montrer que l'endomorphisme $f : \begin{cases} E & \longrightarrow E \\ M & \longmapsto M + \text{tr}(M)I_n \end{cases}$ est diagonalisable.
- Soit $J \in E$ telle que $\text{tr}(J) = 0$ et l'endomorphisme $g : \begin{cases} E & \longrightarrow E \\ M & \longmapsto M + \text{tr}(M)J \end{cases}$.
Montrer que $X^2 - 2X + 1$ est un polynôme annulateur de g . L'endomorphisme g est-il diagonalisable ?

56 Mines-Télécom 2019

Soit $a \in \mathbb{R}^*$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ 1/a & 0 & a \\ 1/a^2 & 1/a & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

- Montrer que A est diagonalisable sur \mathbb{R} .
- Calculer $\exp(A)$ sans chercher à diagonaliser A .

57 CCINP 2019 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

- Justifier que A est diagonalisable.
 - Déterminer les valeurs propres de A et une base de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de A .
- Résoudre l'équation $X^2 + X = A$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- Quelle solution de cette équation aurait pu être immédiatement obtenue à l'aide du théorème de Cayley-Hamilton ?

58 CCINP 2019

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

On suppose que $A^n = I_n$ et que (I_n, A, \dots, A^{n-1}) est une famille libre. Montrer que $\text{tr}(A) = 0$.

59 TPE (Mines-Télécom) - CCINP 2019

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Montrer de deux manières différentes que A et B sont semblables.

60 CCINP 2019 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$A^3 = A + I_n.$$

- Montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
- Montrer que le polynôme $X^3 - X - 1$ admet une unique racine réelle λ , puis que $\lambda > 0$.
- En déduire que $\det(A) > 0$.

61 CCINP 2019 Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ et f l'application définie

sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), f(M) = M + 2M^T$.

- Vérifier que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de f .
- L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?
- Calculer $\text{tr}(f)$ et $\det(f)$.

62 Mines-Télécom 2018

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$ et u un endomorphisme de E .

- Démontrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$,
$$\dim(\text{Ker}(u^{k+1})) \leq \dim(\text{Ker}(u^k)) + \dim(\text{Ker}(u)).$$
- Dans la suite de cet exercice, on suppose que $u^n = 0$ et $\text{rg}(u) = n - 1$.
Démontrer que pour tout $k \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$, $\dim(\text{Ker}(u^k)) = k$.
- Soit $k \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$ et F un sous-espace vectoriel de E de dimension k . Démontrer que $F = \text{Ker}(u^k)$.

63 CCINP 2018 Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}[X]$ par

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \forall x \in \mathbb{R}, f(P)(x) = \int_x^{x+1} P(t) dt.$$

- Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose $f_n(P) = f(P)$.
 - Montrer que f_n est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
 - Calculer le déterminant de f_n .
 - L'endomorphisme f_n est-il diagonalisable ?

64 CCINP 2018 Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, on pose

$$f(P) = (2X + 1)P - (X^2 - 1)P'.$$

- Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
- Pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$, on pose $\varphi(P) = f(P)$.
 - Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
 - Écrire la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
- Soit Q un vecteur propre de f . Montrer que $Q' \neq 0$ et déterminer le degré de Q .
 - Déterminer les éléments propres de f .

65 CCINP 2018

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 16 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 16 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 16 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 16 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

- Justifier que A est diagonalisable et diagonaliser A .
- En déduire que B est diagonalisable et diagonaliser B .
- Donner deux polynômes annulateurs de la matrice B ainsi que son polynôme minimal.

66 CCINP - Mines-Télécom 2018

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $M^2 + M = A$.

- Montrer que toute valeur propre de M prend au plus quatre valeurs que l'on donnera.
- Montrer que 0 ou -1 est valeur propre de M .
Indication : utiliser $\det(A)$.
 - Que peut-on en déduire pour le polynôme caractéristique de M ?
 - La matrice M est-elle diagonalisable ?
- Justifier que A est diagonalisable et diagonaliser A .
 - Soit $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $X^2 + X = A$.
Montrer qu'il existe $P \in \mathcal{GL}_2(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP$ et $P^{-1}XP$ sont diagonales.
 - Déterminer toutes les matrices $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $X^2 + X = A$.

67 Mines-Télécom 2018 Soit $E = \mathcal{C}^0([0, +\infty[; \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0, +\infty[$ vers \mathbb{R} .

Pour toute fonction $f \in E$, on définit la fonction $\Phi(f) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ par $\Phi(f)(0) = f(0)$ et, pour tout $x > 0$,

$$\Phi(f)(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt.$$

- Montrer que Φ est un endomorphisme de E .
- Déterminer les éléments propres de Φ .

68 Mines-Télécom 2018 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et A, B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

On suppose que B est nilpotente et $AB = BA$.

- Démontrer que si A est inversible, alors $A^{-1}B$ est une matrice nilpotente.
- Démontrer que $\det(A+B) = \det(A)$.
- Démontrer que $A+B$ et A ont même polynôme caractéristique.

69 CCINP 2018 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ deux matrices non nulles de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. On pose $A = XY^t$.
 - Quelle est la taille de A ?
 - Calculer A .
 - Calculer le rang de A .
 - Déterminer la dimension de $\text{Ker}(A)$.
 - Exprimer $\text{tr}(A)$ en fonction de X et Y .
- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice de rang 1.
Montrer qu'il existe X et Y non nulles dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ telles que $A = XY^t$.
- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice de rang 1.
 - Quel est le spectre de A ?
 - Montrer que A est diagonalisable si et seulement si $\text{tr}(A) \neq 0$.

70 TPE (Mines-Télécom) 2018

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$. Soit f un endomorphisme de E admettant n valeurs propres distinctes. Démontrer qu'il existe $a \in E$ tel que $(a, f(a), f^2(a), \dots, f^{n-1}(a))$ est une base de E .

71 CCINP 2018 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On pose

$$B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix}.$$

- Calculer B^m pour tout $m \in \mathbb{N}$.
- Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Exprimer $P(B)$ en fonction de A , $P(A)$ et $P'(A)$.
- Montrer que si B est diagonalisable, alors A l'est aussi.
- Montrer que B est diagonalisable si et seulement si $A = 0$.

72 CCINP 2018 Soit E un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie. On note $\mathcal{Z} = \{f \in \mathcal{L}(E), \forall g \in \mathcal{L}(E), f \circ g = g \circ f\}$.

- Soit $f \in \mathcal{Z}$.
 - Montrer que pour tout $x \in E$, la famille $(x, f(x))$ est liée.
 - En déduire qu'il existe $k \in \mathbb{C}$ tel que pour tout $x \in E$, $f(x) = kx$.
- Déterminer \mathcal{Z} . Vérifier alors que \mathcal{Z} est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ et préciser sa dimension.
- Soit f et g deux endomorphismes de E . On suppose qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $f \circ g - g \circ f = \lambda f$.
Montrer que f et g ont un vecteur propre en commun. On étudiera d'abord le cas $\lambda = 0$.

73 CCINP 2018 Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 3$, et

$$(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n. \text{ Soit } J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \vdots & \vdots & \vdots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \text{ et}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1} & \vdots & \vdots & \vdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_2 & \vdots & \vdots & \vdots & a_1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix} \text{ dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{C}).$$

- Calculer J^k pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.
- Exprimer A en fonction des matrices de la famille $(J^k)_{0 \leq k \leq n-1}$.
- Soit Q un polynôme non nul de $\mathbb{C}[X]$ tel que $\deg(Q) < n$. Montrer que $Q(J) \neq 0_n$.
- Que peut-on en déduire sur le degré de π_J , polynôme minimal de J ?
- Déterminer π_J et χ_J .
- Montrer que A est diagonalisable et donner les valeurs propres de A .

81 Mines-Télécom 2018

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A^3 + A^2 + A = 0$.

1. Montrer que la matrice A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?
2. Démontrer que $\text{rg}(A)$ est un entier pair.
3. Donner un exemple de matrice non nulle $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A^3 + A^2 + A = 0$.

82 Mines-Télécom 2018

Soit $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$. Pour toute fonction $f \in E$ et pour tout $x \in [0, 1]$, on pose

$$\Phi(f)(x) = \int_0^1 \min(x, t) f(t) dt.$$

1. Montrer que Φ est un endomorphisme de E .
2. Déterminer les éléments propres de Φ .

5. Algèbre bilinéaire**83 Mines-Télécom 2022 (Cybélia)**

Soient $f, g \in E = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$. On définit

$$\langle f | g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t) dt + \int_0^1 f'(t)g'(t) dt.$$

On pose

$$V = \{f \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R}), f(0) = f(1) = 0\},$$

$$W = \{f \in \mathcal{C}^2([0, 1], \mathbb{R}), f'' = f\}.$$

1. Montrer que $\langle \cdot | \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur E .
2. Montrer que V et W sont des sous-espaces vectoriels de E et que $(t \mapsto e^t, t \mapsto e^{-t})$ est une base orthogonale de W .
3. Montrer que V et W sont orthogonaux.
4. Calculer $p_W(f)$ projeté orthogonal de $f \in E$ sur W .
5. Montrer que V et W sont supplémentaires.

84 CCINP 2021 (Hugo)

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien avec E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[a, b]$ à valeur dans \mathbb{R} , a, b réels, et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire tel que $\langle f, g \rangle = \int_a^b f g$.

On admet l'existence d'une suite orthonormale $(L_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_n[X])^{\mathbb{N}}$ de polynômes tels que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\deg L_k = k$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On note F_n le sous espace vectoriel des fonctions polynomiales engendré par L_0, \dots, L_n et $P_n(f)$ la projection orthogonale de f sur F_n .

1. Exprimer $P_n(f)$ et $\|P_n(f)\|^2$ en fonction des L_k .
2. Montrer que la suite $(\|f - P_n(f)\|^2)_n$ est décroissante.
3. Montrer que la suite $(L_n)_n$ est totale dans E .
4. Donnez la limite de la suite $(\|f - P_n(f)\|^2)_n$.

$$5. \text{ Montrez que } \|f\|^2 = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\int_a^b f(t)L_k(t) dt \right)^2.$$

85 Mines Telecom 2021 (Maryam)

Soit \mathcal{B} une base orthonormale directe. Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension 2.

1. Décrire l'ensemble des isométries vectorielles. Déterminer l'expression de la représentation matricielle d'une isométrie dans \mathbb{R}^2 .
2. Montrer que la représentation matricielle d'une isométrie vectorielle directe ne dépend pas de la base orthonormée choisie (à l'aide des règles de calcul usuelles sur $\mathcal{S}\mathcal{O}_2(\mathbb{R})$).
3. Trouver la nature et les éléments caractéristiques de l'isométrie représentée matriciellement par $A = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$.

86 CCINP 2019

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \geq 2$. Soit u un vecteur unitaire de E . Pour tout $a \in \mathbb{R}^*$ et tout $x \in E$, on pose $f_a(x) = x + a \langle x, u \rangle u$.

1. Soit $a \in \mathbb{R}^*$. Montrer que f_a est un endomorphisme symétrique de E .
2. a) Montrer qu'il existe un unique $b \in \mathbb{R}^*$ vérifiant

$$\forall x \in E, \|f_b(x)\| = \|x\|.$$

- b) Montrer que $\text{Ker}(f_b - \text{id}_E)$ et $\text{Ker}(f_b + \text{id}_E)$ sont supplémentaires dans E .
3. Soit $a \in \mathbb{R}^*$. Déterminer les valeurs propres et sous-espaces propres de f_a . Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $a \in \mathbb{R}^*$ pour que f_a soit bijectif.

87 CCINP 2019

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose

$$\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}), \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), X^T M X \geq 0\}.$$

1. Soit $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $M \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ si et seulement si toutes les valeurs propres de M sont positives.
2. Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.
 - a) Justifier que A est diagonalisable et diagonaliser A dans une base orthonormale de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
 - b) Montrer que $A \in \mathcal{S}_3^+(\mathbb{R})$.
 - c) Montrer qu'il existe $R \in \mathcal{S}_3^+(\mathbb{R})$ telle que $R^2 = A$.
3. Soit $B \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$.
 - a) Montrer que $B^2 \in \mathcal{S}_3^+(\mathbb{R})$.
 - b) Montrer que si $AB = BA$, alors $(AB)^2 \in \mathcal{S}_3^+(\mathbb{R})$.

88 CCINP 2019

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 + A^T = I_n$.

- Déterminer un polynôme annulateur de A de degré 4. Que peut-on en déduire pour A ?
- Démontrer que 0 et 1 ne sont pas valeurs propres de A .
Indication : on pourra considérer X^TAX où X est un vecteur de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ bien choisi.
- Montrer que A est une matrice symétrique. Que peut-on dire de ses valeurs propres ?
- Déterminer toutes les matrices M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $M^2 + M^T = I_n$.

89 CCINP 2019

Pour tout $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$, on pose $\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$.

- Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
- Déterminer une base orthonormée de $\mathbb{R}_1[X]$.
- On pose $\alpha = \min \left\{ \int_0^1 (t^2 - at - b)^2 dt, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

Justifier l'existence de α et déterminer α , ainsi que deux nombres réels a et b réalisant ce minimum, en utilisant deux méthodes différentes :

- ★ à l'aide de la base orthonormée de $\mathbb{R}_1[X]$ trouvée à la question précédente ;
- ★ en cherchant a et b de telle sorte que $X^2 - aX - b$ appartienne à $\mathbb{R}_1[X]^\perp$.

90 CCINP 2019

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $O_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $T_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients diagonaux sont strictement positifs.

- Montrer que $O_n(\mathbb{R})$ et $T_n^+(\mathbb{R})$ sont des sous-groupes de $(\mathcal{GL}_n(\mathbb{R}), \times)$.
- Montrer que $O_n(\mathbb{R}) \cap T_n^+(\mathbb{R}) = \{I_n\}$.
- Montrer que pour toute $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$, il existe un unique $(O, T) \in O_n(\mathbb{R}) \times T_n^+(\mathbb{R})$ tel que $A = OT$.

Indication : on pourra utiliser une base orthonormale construite à l'aide du procédé de Schmidt.

91 CCINP 2019

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et U, V deux vecteurs de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On pose $M = I_n + UV^T$ et $t = \text{tr}(UV^T)$.

- Montrer que $M^2 - (t+2)M + (t+1)I_n = 0$. *Indication : on pourra remarquer que $V^TU \in \mathbb{R}$.*
- Donner une condition nécessaire et suffisante sur t pour que M soit inversible.
Dans ce cas exprimer M^{-1} en fonction de t, U, V et I_n .
- Donner une condition nécessaire et suffisante sur t, U et V pour que M soit diagonalisable.
Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de M .

92 Mines-Télécom 2019

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \geq 2$.

Soit a, b deux vecteurs de E et f l'endomorphisme de E défini par $\forall x \in E, f(x) = \langle a, x \rangle b$.

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que f soit diagonalisable.

93 CCINP - Mines-Télécom 2019

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit \mathbb{R}^n du produit scalaire canonique $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Soit f un endomorphisme symétrique de \mathbb{R}^n dont toutes les valeurs propres sont strictement positives.

- Justifier qu'il existe une base orthonormale $\mathcal{B}' = (u_1, \dots, u_n)$ de \mathbb{R}^n formée de vecteurs propres de f .
- Démontrer que l'application $\Phi: \begin{cases} \mathbb{R}^n & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto \langle x, f(y) \rangle \end{cases}$ est un produit scalaire sur \mathbb{R}^n .
- Démontrer qu'il existe un unique endomorphisme symétrique g de \mathbb{R}^n tel que $g^2 = f$ et n'admettant que des valeurs propres strictement positives.
- Justifier que g est bijectif et démontrer que $(g^{-1}(u_1), \dots, g^{-1}(u_n))$ est une base orthonormale de \mathbb{R}^n pour le produit scalaire Φ .

94 Mines-Télécom 2018

Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 1$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E .

Soit F un sous-espace vectoriel de E et p le projecteur orthogonal sur F . Démontrer que $\sum_{i=1}^n \|p(e_i)\|^2$ est indépendant du choix de la base orthonormée \mathcal{B} .

95 CCINP - Mines-Télécom 2018

Soit E un espace préhilbertien et p un projecteur de E .

- Montrer que $E = \text{Ker}(p) \oplus \text{Im}(p)$.
- On suppose que p est un projecteur orthogonal. Démontrer que pour tout $x \in E, \|p(x)\| \leq \|x\|$.
- On suppose que pour tout $x \in E, \|p(x)\| \leq \|x\|$. Démontrer que p est un projecteur orthogonal.
- Dans cette question, $E = \mathbb{R}^2, \varepsilon_1 = (1, 0), \varepsilon_2 = (1, 1), D = \text{Vect}(\varepsilon_1)$ et $\Delta = \text{Vect}(\varepsilon_2)$.
Soit p le projecteur sur $\Delta = \text{Vect}(\varepsilon_2)$ parallèlement à $D = \text{Vect}(\varepsilon_1)$.

- Donner la matrice de p dans la base canonique de \mathbb{R}^2 .
- Trouver $x \in E$ tel que $\|p(x)\| > \|x\|$.

- Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associé à

$$A = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Démontrer que u est un projecteur orthogonal sur un plan dont on donnera un vecteur normal.

96 CCINP 2018

Soit $E = \mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{R})$ et Φ l'application définie sur E^2 par

$$\forall (f, g) \in E^2, \Phi(f, g) = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx.$$

On note P (resp. I) le sous-espace vectoriel de E des fonctions paires (resp. impaires).

1. Montrer que $E = P \oplus I$.
2. Montrer que Φ est un produit scalaire sur E .
3. Montrer que $P^\perp = I$.
4. Soit Ψ la symétrie orthogonale de E par rapport à P . Soit $f \in E$. On note $\hat{f} = \Psi(f)$. Déterminer $\hat{f}(x)$ pour tout $x \in [-1, 1]$.

97 Mines-Télécom 2018

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \geq 2$.

Soit a un vecteur unitaire de E . Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on note f_α l'endomorphisme de E défini par $\forall x \in E, f_\alpha(x) = x + \alpha \langle a, x \rangle a$.

1. Montrer que pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, f_\alpha \circ f_\beta = f_{\alpha+\beta+\alpha\beta}$.
2. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $\alpha \in \mathbb{R}$ pour que f_α soit bijectif.
3. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer les éléments propres de f_α . Justifier de deux façons que f_α est diagonalisable.
4. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur α pour que f_α soit une symétrie.

98 CCINP 2018

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, on pose $\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^T B)$.

On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices symétriques et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices antisymétriques.

1. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \perp \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.
3. Calculer la distance de $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ à $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$.
4. Soit $H_n = \{X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \text{tr}(X) = 0\}$.
 - a) Montrer que H_n est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et calculer sa dimension.
 - b) Calculer la distance de $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ à H_3 .
 - c) Calculer la distance de I_n à H_n .

99 CCINP 2022 (Théo) Soit E un espace euclidien de

dimension $n \geq 3$.

Soit a, b deux vecteurs unitaires et linéairement indépendants de E .

On pose, pour tout $x \in E, u(x) = \langle a, x \rangle a + \langle b, x \rangle b$.

1. Montrer que u est un endomorphisme symétrique de E .
2. Déterminer $\text{Ker}(u)$.

3. En déduire les valeurs propres et les sous-espaces propres de u .

100 ENS 2022 (Greg)

1. Soit $(s_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

On pose

$$S : \begin{cases} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ P = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n & \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n s_n \end{cases}$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note

$$\varphi_n : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X]^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (P, Q) & \longmapsto S(PQ) \end{cases}$$

$$H_n = (s_{i+j-2})_{i, j \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket}$$

$$d_n = \det H_n$$

Montrer que φ_n est une forme bilinéaire symétrique.

2. Montrer que φ_n est défini-positive.
Indication : trouver une relation entre H_n et φ_n .
3. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}, \varphi_n$ est un produit scalaire.
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P \neq 0$ et $\tilde{P} \geq 0$.
Montrer que $S(P) > 0$.

6. Espaces vectoriels normés**101 Mines Telecom 2021 (Marcelin)** Soit $E = \mathbb{C}[X]$,

$$P = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k X^k \in E.$$

On définit la norme $\|\cdot\|$ par

$$\forall P \in E, \|P\| = \sup_{k \in \mathbb{N}} |a_k|.$$

Soit $b \in \mathbb{N}$, on définit l'application

$$f : \begin{cases} E & \longrightarrow \mathbb{C} \\ P & \longmapsto P(b) \end{cases}$$

1. Montrer que f est linéaire.
2. Étudier la continuité de f .

102 Mines-Télécom 2019

Soit $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ et $\varphi \in E$. Pour toute fonction $f \in E$, on pose $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|$ et $N_\varphi(f) = \|f\varphi\|_\infty$.

Démontrer que N_φ est une norme sur E si et seulement si $\varphi^{(-1)}(\mathbb{R}^*)$ est dense dans $[0, 1]$.

103 CCINP 2019

Soit $f :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $\forall t \in]-1, 1[$,

$$f(t) = \begin{cases} (0, 0) & \text{si } t \in]-1, 0[\\ \left(t^2 \sin\left(\frac{1}{t}\right), t^2 \cos\left(\frac{1}{t}\right) \right) & \text{si } t \in]0, 1[\end{cases}$$

On note $\|\cdot\|_2$ la norme euclidienne associée au produit scalaire canonique sur \mathbb{R}^2 .

1. Montrer que f est dérivable sur $]-1, 1[$.
2. Calculer $\|f'(t)\|_2^2$ pour tout $t \in]-1, 1[$.
3. $f(]-1, 1[)$ est-il connexe par arcs? $f' (]-1, 1[)$ est-il connexe par arcs?

104 CCINP 2019

Soit $\ell^\infty = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée}\}$.

Pour toute suite $u \in \ell^\infty$, on pose $N_\infty(u) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$ et

$$N(u) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_{n+1} - u_n|.$$

1. Montrer que N_∞ est une norme sur ℓ^∞ .
2. Soit E le sous-espace vectoriel de ℓ^∞ défini par $E = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^\infty, u_0 = 0\}$.
Montrer que N est une norme sur E . L'application N est-elle une norme sur ℓ^∞ ?
3. Comparer les normes N_∞ et N sur E .
4. Soit $F = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E, \exists p \in \mathbb{N}, \forall n \geq p, u_n = 0\}$.
L'ensemble F est-il un fermé de E pour la norme N_∞ ? pour la norme N ?

105 CCINP 2018 Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ et

$$F = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), A^2 = A\}.$$

1. Démontrer que $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ est un ouvert dense de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
2. Démontrer que F est une partie fermée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
3. Démontrer que F n'est pas compact.
4. Démontrer que F est d'intérieur vide.

106 CCINP 2022 (Ammar) couplé avec 82

Soit $f : K \rightarrow K$ une application vérifiant

1. Soient E, F espaces vectoriels normés. Montrer que l'image d'un compact de E par une application continue $f : E \rightarrow F$ est un compact de F .
2. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, K un compact non vide de E , $f : K \rightarrow K$ continue telle que

$$\forall (x, y) \in K^2, x \neq y \implies \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|.$$

- a) Montrer que $g : x \mapsto \|f(x) - x\|$ est continue.
 - b) En déduire que f admet un point fixe et qu'il est unique. On le note ℓ .
 - c) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.
Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}}$ converge vers ℓ .
Indication : on pourra montrer que $(\|u_n - \ell\|)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et que sa limite ne peut être que 0.
3. Soit $f : x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \mapsto \cos x$. Montrer que f admet un point fixe $\ell \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

107 CCINP 2018

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie et A un fermé non vide de E .

Soit $f : A \rightarrow A$ une application vérifiant $\exists k \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, $\forall (x, y) \in A^2$,

$$\|f(x) - f(y)\| \leq k(\|f(x) - x\| + \|f(y) - y\|).$$

1. Montrer que f admet au plus un point fixe dans A .
2. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite définie par $x_0 \in A$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = f(x_n)$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq \left(\frac{k}{1-k}\right)^n \|x_1 - x_0\|.$$

3. Montrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.
4. Démontrer que f admet un unique point fixe dans A .

108 Mines-Télécom 2017

Soit $E = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$. Pour toute fonction $f \in E$, on pose :

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)| \text{ et } N(f) = \sqrt{f(0)^2 + \int_0^1 f'(t)^2 dt}.$$

1. Montrer que N est une norme sur E .
2. Comparer les normes N et $\|\cdot\|_\infty$.

109 Mines-Ponts 2022 (Greg) Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$.

1. Montrer que

$$N : P \in \mathbb{R}[X] \mapsto \sup_{x \in [a, b]} |P(x)|$$

est une norme.

2. Soit $P, Q \in \mathbb{R}[X]$.
Montrer qu'il existe $(F_n) \in \mathbb{R}[X]^{\mathbb{N}}$ et deux normes telles que F_n converge vers P pour l'une et Q pour l'autre.

110 TPE (Mines-Telecom) 2017

On note $\ell^\infty(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des suites complexes bornées.

Pour toute suite $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ appartenant à $\ell^\infty(\mathbb{C})$, on pose $\|u\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$.

Pour toute suite $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ appartenant à $\ell^\infty(\mathbb{C})$, on pose $\Phi(u) = (u_{n+1} - u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

1. Montrer que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur $\ell^\infty(\mathbb{C})$.
2. Montrer que Φ est un endomorphisme de $\ell^\infty(\mathbb{C})$.
3. Montrer que l'application Φ est continue pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.
4. Calculer la norme d'opérateur de Φ subordonnée à $\|\cdot\|_\infty$.

111 Mines-Telecom 2022 (Cybélia)

Soit $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y^2 - x^2 = 1\}$.

1. La partie H de \mathbb{R}^2 est-elle fermée?
2. Rappeler la définition d'une partie connexe par arcs.
3. La sphère unité S de \mathbb{R}^2 est-elle connexe par arcs?
4. Montrer que l'image de S par une fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ continue est un segment.

7. Dérivation, fonctions convexes et intégration sur un segment

112 CCINP 2021 (Clément)

Soit φ une fonction continue et convexe sur \mathbb{R} , f une fonction continue sur un segment $[a, b]$.

- Démontrer que

$$\varphi\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi(f(t))dt.$$

Indication : penser aux sommes de Riemann.

- Montrer que $\ln(1 + \frac{1}{x}) \leq \frac{1}{x}$.
- (...)

113 CCINP 2019

Pour tout $x \in]0, +\infty[$, on pose $g(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^3+t}}$.

- Montrer que g est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* et calculer $g'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.
- Dresser le tableau de variation de g .
- Étudier le comportement de g en 0^+ .
- Étudier le comportement de g en $+\infty$.
- Tracer l'allure de la représentation graphique de g .

114 CCINP 2019

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré impair et f une fonction de \mathbb{R} vers \mathbb{R} . On suppose que f est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} et que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}, |f^{(n)}(t)| \leq |P(t)|.$$

- Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(a) = 0$.
- En déduire que f est la fonction nulle sur \mathbb{R} .
- Ce résultat subsiste-t-il si P est de degré pair ?

115 Mines-Télécom 2018

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que

$$\int_0^1 f(t)dt = 0.$$

- Justifier l'existence de $m = \inf_{x \in [0,1]} f(x)$, $M = \sup_{x \in [0,1]} f(x)$ et montrer que $mM \leq 0$.
- Montrer que f s'annule sur $[0, 1]$.
- Montrer que $\int_0^1 f(x)^2 dx \leq -mM$.

Indication : on pourra considérer la fonction $g : x \mapsto (M - f(x))(f(x) - m)$.

116 CCINP 2018

Soit f la fonction de \mathbb{R} vers \mathbb{R} définie par $f(0) = 1$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $F_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\sin(kx)}{k}$.

- Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre l'équation $F_n'(x) = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note

$$x_n = \min\{x \in \mathbb{R}_+, F_n'(x) = 0\}.$$

Montrer que $F_n(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi f(t)dt$.

117 CCINP 2018

Soit la fonction $f : x \mapsto \int_x^{2x} \frac{dt}{1+t^4}$.

- Étudier la parité de f .
- Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et exprimer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- Étudier le sens de variation de f sur \mathbb{R}_+ puis tracer son graphe.
- Donner un équivalent de $f'(x)$ quand x tend vers $+\infty$, puis déterminer un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

118 TPE (Mines-Telecom) 2017

Soit I un intervalle de \mathbb{R} et f une fonction de I vers \mathbb{R} .

- Démontrer que si f est convexe sur I , alors pour tout $(a, b) \in I^2$, f est majorée sur $[a, b]$ et atteint son maximum en a ou b .
- Démontrer que les deux propositions suivantes sont équivalentes :
 - f est convexe sur I .
 - Pour tout $(a, b) \in I^2$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto f(x) + \lambda x$ est majorée sur $[a, b]$ et atteint son maximum en a ou b .

119 TPE (Mines-Telecom) 2017

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une solution sur \mathbb{R} de l'équation différentielle

$$y'' + (2 - \cos(t^2))y = 0.$$

- Dans cette question, on suppose que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t) < 0$.
 - Montrer que f est convexe sur \mathbb{R} .
 - On note \mathcal{C}_f le graphe de f . Soit $a \in \mathbb{R}$. Écrire l'équation de la tangente à \mathcal{C}_f au point d'abscisse a . En déduire une contradiction.
- Montrer que l'équation $f(t) = 0$ admet au moins une racine réelle.

120 CCINP 2022 (Anatol) couplé avec 102

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow E$ continue avec E espace vectoriel de dimension finie, F l'unique primitive de f s'annulant en 0. On pose

$$\forall x \in \mathbb{R}, G_f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2x} \int_{-x}^x f(t)dt & \text{si } x \neq 0, \\ f(0) & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. (a) Montrer que

$$\forall x \neq 0, G_f(x) = \frac{1}{2x} (F(x) - F(-x)).$$

- (b) Pour $x \in \mathbb{R}$, montrer que $G_f(x) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(xu) du$.
- (c) Montrer que G_f est paire et donner l'ensemble des réels en lesquels elle est continue.
- (d) Montrer que G_f est nulle si et seulement si f est impaire.
2. Soit $\phi : f \mapsto G_f$.
- (a) Montrer que ϕ est un endomorphisme.
- (b) ϕ est-elle injective ?
- (c) ϕ est-elle surjective ?

121 Mines-Telecom 2022 (Perrine) Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tel que

$$a < b. \text{ Soit } f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R}) \text{ tel que } \int_a^b f = 1.$$

$$\text{Comparer } \left(\int_a^b t f(t) dt \right)^2 \text{ et } \int_a^b t^2 f(t) dt.$$

8. Suites et séries numériques

122 Mines-Télécom 2022 (Aure) Soit $x \in]-1, 1[$.

1. Montrer que la famille $(x^{k\ell})_{(k,\ell) \in (\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $d(n)$ le nombre de diviseurs de n dans \mathbb{N} .

$$\text{Démontrer que } \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{1-x^k} = \sum_{n=1}^{+\infty} d(n)x^n.$$

123 CCINP 2021 (Mathieu)

$$\text{On pose pour tout } n \in \mathbb{N}^*, u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \text{ et } v_n = u_n - \ln n.$$

1. Montrer que $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ existe puis en trouver un équivalent.
2. Trouver un équivalent de $v_{n+1} - v_n$ puis en déduire que (v_n) converge vers une limite γ .
3. Trouver pour quelles valeurs de α la série de terme général $a_n = \alpha^{u_n}$ converge.

124 Mines Telecom 2021 (Malette)

$$\text{Soit } f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}), f > 0, f' < 0, f(0) = 1.$$

$$\text{Soit } (x_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \text{ telle que } x_0 \in \mathbb{R}_+^+ \text{ et pour tout entier } n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = x_n f(x_n).$$

1. Étudier la suite $(x_n)_{n \geq 1}$.
2. Étudier la série de terme général x_n .

125 TPE (Mines-Telecom) 2019

Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que

$$\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^z.$$

126 Mines-Télécom 2019

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Déterminer un équivalent de $\sum_{k=2}^n \ln^\alpha(k)$.

127 Mines-Télécom 2019

Étudier la nature de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{n + (-1)^n}$.

128 CCINP 2019 Soit $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie

$$\text{par } u_0 = 1 \text{ et, pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{n+a}{n+b} u_n.$$

1. a) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.
- b) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $x_n = \ln(n^\alpha u_n)$. Déterminer une valeur α pour que la série $\sum_{n \geq 1} (x_{n+1} - x_n)$ converge.
2. Étudier la nature de la série $\sum_{n \geq 0} u_n$.

129 CCINP 2019

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$.

1. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle convergente. On pose ℓ sa limite et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $y_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} x_k$. Démontrer que la suite $(y_n)_{n \geq 1}$ converge vers ℓ .
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et calculer sa limite.
3. Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}$. Montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 1.
4. En déduire un équivalent de u_n . La série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge-t-elle ?

130 Mines-Télécom 2018

$$\text{Soit, pour tout } n \in \mathbb{N}^*, v_n = \sum_{k=1}^n \sqrt[k]{k} - n.$$

1. Étudier sur \mathbb{R}_+^* la fonction $f : x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$.
2. Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$, $|e^x - 1 - x| \leq 2x^2$.
3. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ puis donner un équivalent de v_n quand n tend vers $+\infty$.

131 Mines-Télécom 2018

$$\text{Soit, pour tout entier } n \geq 2, u_n = \ln\left(\frac{(2n-1)n}{(2n+1)(n-1)}\right).$$

Montrer que la série $\sum_{n \geq 2} u_n$ converge et calculer sa somme.

132 Mines-Télécom 2018

Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \int_n^{2n} \frac{dt}{1+t^{3/2}}$.
 Étudier la nature de la série $\sum_{n \geq 0} u_n$.

133 Mines-Ponts 2022 (Greg)

- Soit $(p_n) \in \llbracket 2, +\infty \rrbracket^{\mathbb{N}}$ croissante.
 Montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{p_1 \dots p_n}$ converge vers $x \in]0, 1]$.
- Inversement, soit $x \in]0, 1]$. Montrer l'existence et unicité des p_n .
- Montrer que si $x \in]0, 1] \cup \mathbb{Q}$ alors (p_n) est stationnaire.
- Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

9. Suites et séries de fonctions**134 CCINP 2021 (Jéhanne)**

On définit $Z(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^t}$.

- Donner l'ensemble de définition de Z et son sens de variation.
- Calculer la limite de Z en $+\infty$.
- Montrer que $Z(t) \sim_{t \rightarrow 1^+} \frac{1}{t-1}$.
- Étudier la convexité de Z sur son ensemble de définition.

135 CCINP 2021 (Amaury)

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \mapsto \frac{1-x^{2n+2}}{1+x}$ et
 $f : x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \mapsto \frac{1}{1+x}$.

- Étudier la convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- Donner les intervalles sur lesquels il y a convergence uniforme.
- Déterminer une majoration de $\left| \int_0^1 (f_n(x) - f(x)) dx \right|$ et en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(t) dt$.
- Proposer une autre méthode pour déterminer cette limite.
- Montrer que $f_n : x \mapsto \sum_{k=0}^n x^{2k} - \sum_{k=0}^n x^{2k+1}$.
- Justifier la convergence de la série $\sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{1+k}$ et expliquer comment calculer la somme avec les questions précédentes.

136 Mines Telecom 2021 (Éléonore)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit, sur \mathbb{R}^+ , $f_n : x \mapsto \frac{ne^{-x} + x^3}{n+x}$.

- Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
 - On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \int_0^1 f_n(t) dt$. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- Autre question posée à l'oral : On note f la limite de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $g_n = f_n - f$. Étudier la convergence de la série $\sum g_n$.

137 CCINP 2019

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \frac{n(x-1)^n}{2^n(3n-1)}$.

- Déterminer l'ensemble D de convergence simple de la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$.
- Montrer que la fonction $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur D .
- La série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge-t-elle uniformément sur D ?

138 CCINP 2019 Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in \mathbb{R}$, on pose

$$u_n(t) = \frac{e^{-nt^2}}{n^2+1}.$$

- Justifier que $f : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)$ est définie et continue sur \mathbb{R} .
- Montrer que $f(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 1$.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Étudier les variations de u'_n sur \mathbb{R}_+ et en déduire $\|u'_n\|_{\infty} = \sup_{t \in \mathbb{R}} |u'_n(t)|$.
- Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .
- Étudier le sens de variation de la fonction f et donner l'allure de sa représentation graphique.
- Démontrer que la fonction $g : t \mapsto f(t) - 1$ est intégrable sur \mathbb{R}_+ .

139 CCINP 2019

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$u_n(x) = \prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{x}{2^k}\right).$$

- Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n(x) \sin\left(\frac{x}{2^n}\right) = \frac{\sin(x)}{2^n}.$$

En déduire qu'il existe $N_x \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geq N_x$,

$$u_n(x) = \frac{\sin(x)}{2^n \sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}.$$

- Étudier la convergence simple sur \mathbb{R} de la suite de fonctions $(u_n)_{n \geq 1}$.
- En étudiant la suite $(u_n(2^{n+1}\pi))_{n \geq 1}$, montrer que $(u_n)_{n \geq 1}$ ne converge pas uniformément sur \mathbb{R} .

4. Soit $\varphi : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$\varphi(0) = 0 \text{ et, pour tout } x \in [-1, 1] \setminus \{0\}, \varphi(x) = \frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x}.$$

Justifier que φ est bornée sur $[-1, 1]$.

5. Démontrer que $(u_n)_{n \geq 1}$ converge uniformément sur $[-1, 1]$. Cela se généralise-t-il à $[-a, a]$ avec $a > 0$?

Indication : on pourra utiliser la fonction φ .

140 CCINP 2019

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0, 2]$, on pose

$$f_n(x) = n^2 x(1-x)^n + \text{Arcsin}(x-1).$$

- Déterminer le domaine D de convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- Soit $\alpha \in]0, 1[$. Étudier la convergence uniforme sur $[\alpha, 2-\alpha]$ de la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- Étudier la convergence uniforme de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur $[0, 1]$ par deux méthodes différentes :

- en étudiant les variations de $f_n - f$ sur $[0, 1]$, où $f = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n$;

- en calculant $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(t) dt$.

141 CCINP 2019

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in [0, 1]$, on pose

$$g_n(t) = e^t \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n.$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Montrer que pour tout $t \in [0, 1]$, $|g'_n(t)| \leq \frac{e^t}{n}$.

b) Montrer que pour tout $t \in [0, 1]$,

$$\left| e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \right| \leq \frac{t}{n}.$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0, 1]$, on pose

$$h_n(x) = \int_0^x g_n(t) dt.$$

Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite de fonctions $(h_n)_{n \geq 1}$ sur $[0, 1]$.

142 Mines-Télécom 2019

Soit la fonction $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\text{Arctan}(nx)}{n^2}$.

- Déterminer le domaine de définition D de la fonction f .
- Étudier la continuité de f sur D .
- Étudier la dérivabilité de f sur D .

143 Mines-Télécom 2019

Soit $a \in]-1, 1[$ fixé et la fonction $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n+x}$.

- Déterminer le domaine de définition de la fonction S .
- Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} S(x)$ puis déterminer un équivalent de S au voisinage de $+\infty$.
- Déterminer $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $S(x) = \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x^2} + o_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^2}\right)$.

144 Mines-Télécom 2019

Soit $(u_n)_{n \geq 2}$ la suite de fonctions de \mathbb{R} vers \mathbb{R} définies par

$$\forall n \geq 2, \forall x \in \mathbb{R}, u_n(x) = \frac{x e^{-nx}}{\ln(n)}.$$

- Déterminer le domaine D de convergence simple de la série de fonctions $\sum_{n \geq 2} u_n$.
- Étudier la convergence normale de la série de fonctions $\sum_{n \geq 2} u_n$ sur D .
- Étudier la convergence uniforme de la série de fonctions $\sum_{n \geq 2} u_n$ sur D .

145 CCINP 2018

Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [0, 1]$, $f_n(t) = \frac{(t^2-1)^{n+1}}{n+1}$.

- Montrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge simplement sur $[0, 1]$.
- Étudier la convergence normale de $\sum_{n \geq 0} f_n$ sur $[0, 1]$.
- Étudier la convergence uniforme de $\sum_{n \geq 0} f_n$ sur $[0, 1]$.
- Donner le développement en série entière de $x \mapsto \ln(1-x)$. En déduire $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$ pour tout $t \in [0, 1]$.
- Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \int_0^1 \frac{(t^2-1)^{n+1}}{n+1} dt$. Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.
- Calculer $\int_0^1 \ln(2-t^2) dt$ et en déduire $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

146 Mines-Télécom 2018

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note f_n la fonction de $[0, 1]$ vers \mathbb{R} définie par

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } x \in \left] \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$.

147 CCINP 2018

Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0, \pi]$,

$$f_n(x) = \cos^n(x) \sin(x).$$

1. Étudier les convergences simple et uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur $[0, \pi]$.
2. Étudier les convergences simple, uniforme et normale de la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$ sur $[0, \pi]$.

La fonction $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est-elle définie sur $[0, \pi]$? Est-elle continue sur $[0, \pi]$?

148 Mines-Télécom 2018

Soit $(f_n)_{n \geq 1}$ la suite de fonctions de \mathbb{R}_+^* vers \mathbb{R} définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, f_n(x) = \frac{1}{n + n^2 x}.$$

1. Montrer que la fonction $f = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}_+^* .
2. Démontrer que $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi^2}{6x}$.

149 Mines-Télécom 2018

Soit la fonction $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}}$.

1. Déterminer le domaine de définition D_f de la fonction f .
2. Montrer que f est de classe \mathcal{C}^∞ sur D_f .
3. Déterminer un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers 0^+ .

150 Mines-Télécom 2018

Soit $(f_n)_{n \geq 1}$ la suite de fonctions de \mathbb{R}_+^* vers \mathbb{R} définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, f_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{x} \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right).$$

1. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur \mathbb{R}_+^* .
2. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

10. Intégrales généralisées, convergence dominée et intégrales à paramètre**151 CCINP 2002 (Gabriel) couplé avec 61** Soit

$$F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\text{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)} dt.$$

- (a) Montrer que F est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .
- (b) Déterminer F .

2. Soit $G : x \mapsto \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{Arctan}(x \tan \theta)}{\tan \theta} d\theta$. Déterminer le domaine de définition de G .

3. Trouver une relation entre F et G .

4. En déduire $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\theta}{\tan \theta} d\theta$.

152 Mines-Télécom 2019

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Étudier la nature de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} x^\alpha \ln(x + e^{\alpha x}) dx.$$

153 CCINP 2021 (Théo)

Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue π -périodique telle que $\int_0^\pi f(x) dx = 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $u_n = \int_0^\pi f(x) e^{-x/n} dx$ et $v_n = \int_0^{+\infty} f(x) e^{-x/n} dx$.

1. Justifier l'existence de u_n et v_n .
2. Montrer qu'il existe $(a_{k,n})_{(k,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = u_n S_n$ où $S_n = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{k,n}$.
3. Montrer que $S_n \sim \frac{n}{\pi}$.
4. Montrer que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.
5. Étudier la limite de (v_n) .

154 CCINP 2019

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^4)^n}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, I_n existe.
2. Montrer que la suite $(I_n)_{n \geq 1}$ est décroissante et converge.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1} .
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in [0, +\infty[$, on pose $f_n(t) = \frac{1}{(1+t^4)^n}$. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 1}$ sur $[0, +\infty[$. La suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 1}$ converge-t-elle uniformément sur $[0, +\infty[$?
5. Calculer la limite de la suite $(I_n)_{n \geq 1}$ en appliquant le théorème de convergence dominée.

155 CCINP 2019

Soit la fonction $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin(tx)e^{-t}}{t} dt$.

1. Déterminer le domaine de définition D de la fonction f .
2. Démontrer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur D .

- Calculer explicitement $f'(x)$ pour tout $x \in D$.
- En déduire $f(x)$ pour tout $x \in D$.

156 CCINP 2019

Soit les fonctions

$$f : x \mapsto \left(\int_0^x e^{-t^2} dt \right)^2$$

et

$$g : x \mapsto \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt.$$

- Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- Montrer que g est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et calculer $g'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) + g'(x) = 0$.
- En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\pi}{4} - g(x)$.
- Démontrer que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ converge et calculer $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

157 CCINP 2019

Soit $p \in \mathbb{N}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \int_0^{+\infty} \frac{x^{p+1}}{e^x - 1} e^{-nx} dx$.

- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, S_n existe.
- Soit $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$. On pose $\Gamma(a, b) = \int_0^{+\infty} x^a e^{-bx} dx$.
 - Justifier l'existence de $\Gamma(a, b)$.
 - Calculer $\Gamma(a, b)$ sachant que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt = n!.$$

- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_0 = (p+1)! \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^{p+2}} + S_n.$$

En déduire que $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

- Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{x^{p+1}}{e^x - 1} dx = (p+1)! \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{p+2}}$.

158 Mines-Télécom 2019

Soit $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$.

- Soit $t \in]0, 1[$. Écrire $\frac{t^{a-1}}{1+t^b}$ sous la forme $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)$.
- Étudier la nature de la série $\sum_{n \geq 0} \int_0^1 |u_n(t)| dt$.
- Justifier l'existence de $\int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b} dt$ et démontrer que $\int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a+nb}$.

159 CCINP 2018

- Justifier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'existence de

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^3)^n}.$$

- Montrer que la suite $(I_n)_{n \geq 1}$ converge et déterminer sa limite.
- La série $\sum_{k \geq 1} (-1)^k I_k$ converge-t-elle ? Si tel est le cas, calculer $\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k I_k$.

160 Mines-Ponts 2018

- Justifier l'existence de $\int_0^{1/2} \frac{\ln(1-t)}{t} dt$ et montrer que

$$\int_0^{1/2} \frac{\ln(1-t)}{t} dt = \int_{1/2}^1 \frac{\ln(t)}{1-t} dt.$$

- En déduire la valeur de la somme $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n n^2}$.

161 Mines-Télécom 2018

Étudier la nature de $\int_0^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) dx$ et si elle converge, calculer cette intégrale.

162 Mines-Télécom 2018

Soit $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^3(x)}{x^2} dx$.

- Justifier que l'intégrale I est convergente.
- Montrer que la fonction $g : x \mapsto \int_x^{3x} \frac{\sin(t)}{t^2} dt$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* et calculer sa dérivée.
- Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$.
- En déduire la valeur de I .

163 Mines-Télécom 2018

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0, 1]$, on pose $f_n(x) = x^n (1 - \sqrt{x})$.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\int_0^1 f_n(x) dx$.
- En déduire $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(2n+3)}$.

164 TPE (Mines-Télécom) 2018

Soit $x \in]1, +\infty[$. On pose $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ et

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}.$$

Justifier l'existence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{e^t - 1} dt$ et montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{e^t - 1} dt = \Gamma(x)\zeta(x)$.

165 CCINP 2021 (Pierre-Louis et Éléonore)

Soit $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt} \sin t}{t} dt$.

1. Montrer que F est continue sur \mathbb{R}_*^+ .
2. Montrer que F est dérivable sur \mathbb{R}_*^+ .
3. Calculer F' puis en déduire F .

166 CCINP 2018 Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe

\mathcal{C}^1 . On suppose que les fonctions $t \mapsto t^2 f(t)^2$ et $t \mapsto f'(t)^2$ sont intégrables sur \mathbb{R}_+ .

1. Montrer que la fonction $t \mapsto t f(t) f'(t)$ est intégrable sur \mathbb{R}_+ .
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$x f(x)^2 = \int_0^x f(t)^2 dt + 2 \int_0^x t f(t) f'(t) dt.$$

3. Montrer que la fonction $t \mapsto f(t)^2$ est intégrable sur \mathbb{R}_+ et que $x f(x)^2 \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.
4. En déduire que

$$\left(\int_0^{+\infty} f(t)^2 dt \right)^2 \leq 4 \left(\int_0^{+\infty} t^2 f(t)^2 dt \right) \left(\int_0^{+\infty} f'(t)^2 dt \right).$$

167 CCINP 2018

1. Énoncer le théorème de convergence dominée.
2. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n e^{-2t} dt$.
3. À l'aide du théorème de caractérisation séquentielle de la continuité et du théorème de convergence dominée, démontrer le théorème de continuité d'une fonction définie par une intégrale à paramètre.

168 Mines-Télécom 2018

Soit $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t)) dt$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(t)) dt$.

1. Justifier l'existence de I .
2. Montrer que $I = J$.
3. Montrer que $I + J = I - \frac{\pi \ln(2)}{2}$ et en déduire I .

169 Centrale 2022 (Greg)

1. Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha(1+x^\beta)}$$

À quelles conditions sur α et β l'intégrale converge-t-elle ?

2. On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$g_n : \lambda \mapsto \int_1^n \frac{dx}{x^\alpha(1+\lambda x^\beta)}$$

(g_n) converge-t-elle uniformément ? Répondre selon les valeurs de α et β .

3. On suppose que $g_n \xrightarrow{CS} g$. Donner un développement asymptotique de $g(\lambda)$ lorsque $\lambda \rightarrow 0^+$.

170 Mines-Ponts 2021 (Patrick)

Soit $f : x \mapsto \int_0^1 t^{tx} dt$.

1. Déterminer le domaine de définition de f .
2. Montrer que f est de classe \mathcal{C}^∞ .
3. Déterminer l'allure du graphe de f .

171 Mines-Ponts 2021 (Maximilien)

Soit $f : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t = 0 \\ t^2 \sin\left(\frac{1}{t^2}\right) & \text{si } t \in]0, 1] \end{cases}$

1. L'intégrale de f' converge-t-elle sur $]0, 1]$?
2. f' est-elle intégrable sur $]0, 1]$?

11. Séries entières

172 CCINP

Soit $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $d_0 = 1, d_1 = \frac{1}{2}$ et, pour tout $n \geq 2$:

$$d_n = \begin{vmatrix} \frac{n}{n+1} & \frac{1}{\sqrt{n+1}} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{n+1}} & \frac{n}{n-1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \dots & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{2} \end{vmatrix}_{(n)}.$$

1. Calculer d_2 et d_3 .
2. Montrer que pour tout $n \geq 2$, $(n+1)d_n = nd_{n-1} + d_{n-2}$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, |d_n| < 1$.
Que peut-on en déduire sur le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n \geq 0} d_n x^n$?

4. Soit $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} d_n x^{n+1}$. Montrer que pour tout $x \in]-R, R[$,

$$(1-x)S'(x) - xS(x) = 1.$$

5. En déduire que pour tout $x \in]-1, 1[$, $S(x) = \frac{1-e^{-x}}{1-x}$.
6. Déterminer d_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

173 CCINP

Soit la fonction $f : x \mapsto \sum_{n=2}^{+\infty} \ln(n)x^n$.

- Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n \geq 2} \ln(n)x^n$.
- Montrer que pour tout $x \in]-R, R[$,

$$(x-1)f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)x^n.$$

- Soit $x \in]0, 1[$.

En remarquant que pour tout $n \geq 2$, $\ln\left(\frac{n}{n-1}\right) = \int_{n-1}^n \frac{dt}{t}$,
donner un encadrement de $(x-1)f(x)$.

- Déterminer un équivalent de f en R^- .

174 CCINP

Soit la fonction $f : x \mapsto \frac{\text{Arcsin}(x)}{\sqrt{1-x^2}}$.

- Donner l'ensemble de définition de f .
- Montrer que f est solution sur $] -1, 1[$ d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1.
- Déterminer le développement en série entière de f sur $] -1, 1[$.
- En déduire le développement en série entière de la fonction $g : x \mapsto \text{Arcsin}^2(x)$ sur $] -1, 1[$.

175 Mines-Télécom 2018

- Donner le développement en série entière de la fonction Arctan .
- Exprimer, pour tout $x \in]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[$, $\tan(2x)$ en fonction de $\tan(x)$.
- Montrer que $\pi = 8 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (\sqrt{2}-1)^{2n+1}}{2n+1}$.
- Soit $N \in \mathbb{N}$. Donner une majoration de l'erreur commise lorsqu'on approche π par la somme partielle :

$$S_N = 8 \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n (\sqrt{2}-1)^{2n+1}}{2n+1}.$$

176 CCINP 2017

Soit la fonction $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)x^n$.

- Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 1} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)x^n$.
- Déterminer le domaine de définition D_f de la fonction f .
- Montrer que f est continue sur D_f .
- Déterminer $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$.
- Démontrer que $(1-x)f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} 0$.

177 CCINP 2017

Soit $n \in \mathbb{N}$ la suite définie par $u_0 = u_1 = 1$ et, pour tout entier $n \geq 2$,

$$u_n = u_{n-1} + 2u_{n-2} + (-1)^n.$$

- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 1$.
- Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante puis que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 4^n$.
- Montrer que le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n \geq 0} u_n x^n$ est strictement positif.

- Soit $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$.

Calculer $f(x)$ pour tout $x \in]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[$.

- Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n en fonction de n .
Indication : on pourra décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $\frac{X^2 + X + 1}{(1+X)^2(1-2X)}$.

178 Mines-Télécom 2017

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \int_0^1 x^n \ln(1-x) dx$.

- Justifier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'existence de a_n .
- Montrer que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et calculer sa limite. h
- Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} a_n$ diverge.
- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(n+1)a_n - n a_{n-1} = -\frac{1}{n+1}$.
- Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ puis exprimer sa somme à l'aide d'une intégrale.

179 TPE (Mines-Télécom) 2017

Soit la fonction $f : x \mapsto \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)} x^n$.

- Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{n(n-1)} x^n$.
- Calculer $f(x)$ pour tout $x \in]-R, R[$.
- Étudier f en R et $-R$ (existence et valeur).

12. Équations différentielles**180 Mines-Telecom 2022 (Guillaume)**

Soit $n \geq 2$ un entier naturel.

- Résoudre l'équation $y'' + y = \sin(nt)$.
- On suppose que la série $\sum_{n \geq 2} a_n$ converge absolument.
Résoudre l'équation $y'' + y = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n \sin(nt)$.

181 Mines Telecom 2022 (Maryam)

- Résoudre sur $]0, +\infty[$, $ty' - y = -1$.
- Soit $(x, y) \in]0, +\infty[\times \mathbb{R}$. Exprimer r et θ en fonction de x et y en coordonnées polaires.
- En posant $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$, montrer que résoudre

$$1 + x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) - f(x, y) = 0 \quad (E)$$

avec $g(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$ revient à résoudre

$$1 + r \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) - g(r, \theta) = 0$$

- Terminer la résolution de l'équation aux dérivées partielles (E).

182 Mines-Ponts 2021 (Maximilien)

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et (E) $y'' - 2xy' + \lambda y = 0$.

- Montrer que les solutions de (E) sont toutes développables en série entière.
- Soit f solution de (E) telle que $f(x) = \underset{x \rightarrow +\infty}{\mathcal{O}}(x^k)$ avec $k \in \mathbb{N}^*$.

(a) Montrer que $\lambda \in \mathbb{R}^+$.

On pourra utiliser $A = \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(t)} f(t) e^{-t^2} dt$.

(b) Montrer que f est polynomiale.

183 CCINP 2019

Résoudre le système différentiel

$$(S) \begin{cases} x' = x + 2y - z \\ y' = 2x + 4y - 2z \\ z' = -x - 2y + z. \end{cases}$$

184 CCINP 2019

Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $u \in E$. Pour toute fonction $f \in E$, on pose $L_u(f) = f' + uf$.

- Montrer que L_u est un endomorphisme de E .
- Calculer $(L_u \circ L_u)(f)$ pour toute fonction $f \in E$.
- Justifier que l'ensemble des fonctions de \mathbb{R} vers \mathbb{R} solutions de l'équation différentielle

$$y'' + 2xy' + (x^2 + 1)y = 0$$

est inclus dans E .

- Résoudre l'équation différentielle

$$y'' + 2xy' + (x^2 + 1)y = 0.$$

185 TPE (Mines-Télécom) 2019

Déterminer toutes les fonctions f de \mathbb{R} vers \mathbb{R} , deux fois dérivables sur \mathbb{R} , vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) + f(-x) = x.$$

186 Mines-Télécom 2019

- Déterminer les solutions sur \mathbb{R} de l'équation différentielle (E) : $y'' + y = e^{-\sqrt{x}}$.
Indication : on pourra exprimer chaque solution de (E) à l'aide d'une intégrale.
- Montrer qu'une seule des solutions de (E) admet une limite finie en $+\infty$.
Exprimer cette solution à l'aide d'une intégrale et donner sa limite en $+\infty$.

187 Mines-Ponts 2019

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$, et $q : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$.

Soit f une solution non nulle sur $[a, b]$ de l'équation différentielle (E) : $y'' + q(x)y = 0$.

Démontrer que f admet un nombre fini de zéros sur $[a, b]$.

188 CCINP 2018

Soit F l'ensemble des fonctions f de \mathbb{R} vers \mathbb{R} vérifiant

(H1) f est deux fois dérivable sur \mathbb{R} ;

(H2) f ne s'annule pas sur \mathbb{R} ;

(H3) pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$.

- Soit $f \in F$. Démontrer qu'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) + kf(x) = 0$.
- Déterminer F .

189 CCINP 2018

Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $u_n(x) = \frac{x^{3n}}{(3n)!}$.

- Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$.
- Montrer que $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est solution d'une équation différentielle de la forme $y'' + ay' + by = f(x)$, où a, b sont deux nombres réels et f est une fonction que l'on précisera.
- Résoudre (E) et en déduire S .

190 CCINP 2018 Résoudre l'équation différentielle

$$\cos(x)y' - \sin(x)y = \cos^3(x) \quad (E)$$

sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ puis sur $[0, \pi]$.

191 CCINP 2017

Soit l'équation différentielle (E) : $xy'' + 2y' + xy = 0$.

- Résoudre (E) sur \mathbb{R}_+^* . Indication : on pourra commencer par rechercher toutes les solutions de (E) développables en série entière sur un voisinage de 0.
- Résoudre (E) sur \mathbb{R} .

13. Calcul différentiel

192 TPE (Mines-Télécom)

Soit la fonction $f : \begin{cases} (\mathbb{R}_+^*)^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \longrightarrow \frac{xy}{(1+x)(1+y)(x+y)}. \end{cases}$

Démontrer que f admet un maximum global sur \mathbb{R}_+^* et le déterminer.

193 CCINP

Soit f l'application de \mathbb{R}^2 vers \mathbb{R} définie par $f(0,0) = 0$ et $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$.

1. Montrer que f est continue sur \mathbb{R}^2 .
2. Soit $\theta \in]-\pi, \pi[$. On pose $u_\theta = (\cos(\theta), \sin(\theta))$.
En discutant selon la valeur θ , étudier l'existence de la dérivée de f en $(0,0)$ selon u_θ .
3. La fonction f admet-elle des dérivées partielles premières en $(0,0)$?
4. Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
La fonction f admet-elle des dérivées partielles du second ordre en $(0,0)$?

194 CCINP 2019

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit \mathbb{R}^n du produit scalaire canonique $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Soit f un endomorphisme symétrique de \mathbb{R}^n , dont toutes les valeurs propres sont strictement positives.

Soit u un vecteur fixé de \mathbb{R}^n et g l'application de \mathbb{R}^n vers \mathbb{R} définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, g(x) = \frac{1}{2} \langle f(x), x \rangle - \langle u, x \rangle.$$

1. Montrer que pour tout $h \in \mathbb{R}^n$, $\langle f(h), h \rangle \geq 0$.
2. Montrer que g est différentiable sur \mathbb{R}^n et déterminer la différentielle de g en tout point de \mathbb{R}^n .
3. Montrer que g admet sur \mathbb{R}^n un unique point critique a et que $a = f^{-1}(u)$.
4. Montrer que g admet un extremum global en a .
Indication : on pourra étudier le signe de l'application $h \mapsto g(a+h) - g(a)$.

195 TPE (Mines-Télécom) 2019

Soit f l'application de $[0,1]^2$ vers \mathbb{R} définie par $f(1,1) = 0$ et $\forall (x, y) \in [0,1]^2 \setminus \{(1,1)\}, f(x, y) = \frac{xy(1-x)(1-y)}{1-xy}$.

1. Montrer que f est continue sur $[0,1]^2$.
2. Justifier que f admet un maximum sur $[0,1]^2$, puis déterminer ce maximum ainsi que tout point en lequel il est atteint.

196 CCINP 2019

Soit $f : (x, y) \mapsto x^2 + (y^3 - y)^2$.
Déterminer les extremums de f ainsi que tous les points en lesquels ces extremums sont atteints.

197 CCINP 2019

Soit f l'application de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ vers \mathbb{R}

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, f(x, y) = x(\ln^2(x) + y^2).$$

1. Déterminer les points critiques de f .
2. Déterminer les extremums locaux de f . La fonction f admet-elle des extremums globaux?
3. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et \mathcal{S} la surface de \mathbb{R}^3 d'équation $z = f(x, y)$.
Donner l'équation du plan affine tangent à \mathcal{S} au point $(a, b, f(a, b))$.
Quelle est l'équation du plan affine tangent à \mathcal{S} au point $(1, 0, f(1, 0))$?
4. Exprimer la différentielle de f au point $(1, 1)$.

198 CCINP 2018

Soit l'ouvert $\Omega = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 \mid r > 0 \text{ et } \theta \in]-\pi, \pi[\}$.

On considère l'application $\varphi : \begin{cases} \Omega & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (r, \theta) & \longrightarrow (r \cos(\theta), r \sin(\theta)). \end{cases}$

1. Prouver que φ établit une bijection de Ω sur un ouvert U de \mathbb{R}^2 que l'on précisera.
2. Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 et $F = f \circ \varphi$.
Ainsi, pour tout $(r, \theta) \in \Omega$, $F(r, \theta) = f(x, y)$ où $x = r \cos(\theta)$ et $y = r \sin(\theta)$.
Donner les dérivées partielles de F en fonction de celles de f .
3. Déterminer toutes les fonctions $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 vérifiant

$$\forall (x, y) \in U, x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

199 TPE (Mines-Télécom) 2017

Soit la fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \longrightarrow x^4 + y^4 - 2(x-y)^2. \end{cases}$

Déterminer les extremums locaux de la fonction f .

200 TPE (Mines-Télécom) 2017

Soit la fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \longrightarrow x^4 + y^3 - 3y - 2. \end{cases}$

Déterminer les extremums locaux et globaux de la fonction f .

14. Probabilités

201 Mines-Ponts 2022 (Théo) sans préparation

On choisit au hasard $A, B \in \mathcal{P}(\llbracket 1, n \rrbracket)$. Déterminer $\mathbb{P}(A \subset B \text{ ou } B \subset A)$.

202 CCINP 2021 (Mariette)

On considère un arbre dont N représente le nombre de fleurs à chaque saison. $N + 1$ suit une loi géométrique de paramètre $p = 0,1$.

La probabilité pour qu'une fleur devienne un fruit est de $2/3$ et la probabilité pour qu'un fruit parvienne à maturation est de $3/4$.

- Calculer la probabilité d'avoir, à partir d'une fleur, un fruit qui arrive à maturation.

Calculer $\mathbb{P}(N = n)$.

Combien de fleurs y a-t-il en moyenne chaque saison sur l'arbre ?

- Montrer que $\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^n = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}$.

- Calculer $\mathbb{P}(M = k)$ où M est le nombre de fruits arrivés à maturation.

203 Mines Telecom 2021 (Marcelin)

Soient $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{N}^*$.

On dispose de n urnes dans lesquelles sont réparties na boules de manière aléatoire et indépendante.

On définit Y_n le nombre d'urnes vides, et $S_n = \frac{Y_n}{n}$

- Calculer $\mathbb{E}(Y_n)$, puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(Y_n)$.

On pourra définir, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, X_i la variable de Bernoulli qui vaut 1 si et seulement si l'urne numéro i est vide.

- Calculer $\mathbb{E}(S_n)$ et $\mathbb{V}(S_n)$.

204 Mines Telecom 2021 (Amaury)

Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi(n) = |\{k \in \llbracket 1, n \rrbracket, k \wedge n = 1\}|$.

On écrit la décomposition primaire de n : $n = \prod_{i=1}^N p_i^{\alpha_i}$

On tire aléatoirement k dans $\llbracket 1, n \rrbracket$.

On note A l'événement «le nombre tiré est premier avec n » et, pour tout i entre 1 et N , A_i l'événement «le nombre tiré est divisible par p_i ».

- Donner un espace probabilisé décrivant l'expérience.
- Exprimer $\mathbb{P}(A)$ en fonction de $\varphi(n)$ et n .
- Montrer que $\mathbb{P}(A_i) = \frac{1}{p_i}$.
- Montrer que la famille $(A_i)_{1 \leq i \leq N}$ est une famille d'événements mutuellement indépendants.
- En déduire une expression de $\varphi(n)$ à l'aide de n et des p_i .

205 Mines-Télécom 2019

On lance 1000 fois un dé équilibré.

Montrer que la probabilité que la moyenne des lancers soit supérieure ou égale à 4 est inférieure à 2%.

206 CCINP 2019

Soit X une variable aléatoire discrète sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

On suppose que $X(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X \geq n) > 0$.

On appelle **taux de panne** de X la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, x_n = \mathbb{P}(X = n | X \geq n).$$

- Soit Y une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telle que

$$Y(\Omega) \subset \mathbb{N}^* \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(Y = n) = \frac{1}{n(n+1)}.$$

- Montrer que l'on définit bien ainsi une loi de probabilité.

- Calculer le taux de panne $(y_n)_{n \geq 1}$ de Y .

- Montrer que pour tout $n \geq 2$, $\mathbb{P}(X \geq n) = \prod_{k=1}^{n-1} (1 - x_k)$.

- En déduire, pour tout $n \geq 2$, $\mathbb{P}(X = n)$ en fonction de x_1, \dots, x_{n-1}, x_n .

- Déterminer toutes les lois de probabilités pour lesquelles le taux de panne est constant.

207 CCINP 2019

Soit $p \in]0, 1[$. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires discrètes mutuellement indépendantes. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $Y_n = X_n X_{n+1}$.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la loi de probabilité de Y_n . En déduire $\mathbb{E}(Y_n)$ et $\mathbb{V}(Y_n)$.

- Soit $(i, j) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $i \neq j$. Calculer $\text{Cov}(Y_i, Y_j)$.

La suite $(Y_n)_{n \geq 1}$ est-elle une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes ?

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer l'espérance et la variance de

$$S_n = \sum_{k=1}^n Y_k.$$

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $Z_n = \frac{S_n}{n}$.

Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$, $\mathbb{P}(|Z_n - p^2| \geq a) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.

208 CCINP 2019

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient n boules blanches et n boules noires indiscernables les unes des autres. On tire n boules simultanément.

- Quel est le nombre de tirages possibles ?

- Montrer que $\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$.

- Une puce se déplace sur une droite. Elle effectue des sauts de même amplitude, à intervalles de temps successifs égaux. Elle se déplace dans les deux sens avec la même probabilité. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note c_n la probabilité qu'elle se trouve à l'origine O (sa position initiale) après le n -ième saut.

- Calculer c_{2n-1} et c_{2n} pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

- Déterminer un équivalent de c_{2n} à l'aide de la formule de Stirling.

En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} c_{2n}$.

Interpréter ce résultat.

- La puce se déplace désormais dans un plan. Elle effectue des sauts de même amplitude, à intervalles de temps successifs égaux. Elle se déplace dans les quatre sens (gauche, droite, haut et bas) avec la même probabilité. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note d_n la probabilité qu'elle se trouve à l'origine O (sa position initiale) après le n -ième saut.

- a) Calculer d_{2n-1} et d_{2n} pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
 b) Déterminer un équivalent de d_{2n} .
 En déduire $\lim_{n \rightarrow \infty} d_{2n}$.
 Interpréter ce résultat.

209 CCINP 2019

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. Soit X, Y et Z trois variables aléatoires discrètes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On suppose que X, Y, Z sont mutuellement indépendantes et suivent chacune la loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$.

- Montrer que si $k \in \llbracket 2, n+1 \rrbracket$, $\mathbb{P}(X+Y=k) = \frac{k-1}{n^2}$.
- Montrer que si $k \in \llbracket n+2, 2n \rrbracket$,

$$\mathbb{P}(X+Y=k) = \frac{2n-k+1}{n^2}.$$

- En utilisant la formule des probabilités totales, calculer $\mathbb{P}(X+Y=Z)$.
- Calculer $\mathbb{P}(X+Y+Z=n)$.

210 CCINP 2022 (Perrine) couplé avec 36 - posé aussi à Mines-Ponts en 2023

Soit $p \in]0, 1[$, $n \in \mathbb{N}^*$, X_1, \dots, X_n des v.a. de loi $\mathcal{B}(p)$,
 $S = \sum_{k=1}^n X_k$, $U = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$, $A = U \times U^t$.

- Calculer A puis A^2 . En déduire un polynôme annulateur de A .
 A est-elle diagonalisable ?
- Déterminer la loi de $\text{tr} A$. Que valent son espérance et sa variance ?
 Quelle est la probabilité que A soit une matrice de projection ?
- Déterminer la loi de $\text{rg} A$.
 Quelle est la probabilité que A ait au moins deux valeurs propres distinctes ?

211 CCINP 2021 (Patrick) Soit X, Y, Z trois variables

aléatoires mutuellement indépendantes suivant une loi géométrique de même paramètre $p \in]0, 1[$.

- Déterminer $\mathbb{P}(X=Y)$. En déduire $\mathbb{P}(X \leq Y)$ puis que $\mathbb{P}(X \leq Y) > \frac{1}{2}$.
- Déterminer la loi de $X+Y$.
- Calculer $\mathbb{P}(Z > n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
 En déduire $\mathbb{P}(Z > X+Y)$.

212 Mines-Télécom 2018

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, telles que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n(\Omega) = \{-1, 1\}$ et $\mathbb{P}(X_n = -1) = \mathbb{P}(X_n = 1)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$, $Y_n = \frac{1}{2}(1 + X_n)$ et
 $Z_n = \sum_{k=1}^n Y_k$.

- Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la loi de Y_n .
- Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la loi de Z_n .
- Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la loi de S_n .
- Soit $(d, t) \in \mathbb{R}_+^* \times [1, +\infty[$. Déterminer la variance de $dS_{\lfloor t \rfloor}$.

213 CCINP 2018

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, $p \in]0, 1[$, $q = 1-p$ et $(\lambda, \mu) \in]0, 1[^2$.

On pose $\Omega = \llbracket 1, n+1 \rrbracket$ et on note $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2$ les deux applications définies sur Ω par

- pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\mathbb{P}_1(k) = pq^{k-1}$ et $\mathbb{P}_1(n+1) = \lambda$;
- $\mathbb{P}_2(1) = 0$, pour tout $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$, $\mathbb{P}_2(k) = (k-1)p^2q^{k-2}$ et $\mathbb{P}_2(n+1) = \mu$.

- Déterminer λ et μ pour que \mathbb{P}_1 et \mathbb{P}_2 définissent une loi de probabilité sur Ω .
- Soit $(a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Une urne contient a boules blanches et b boules noires. On effectue n tirages successifs avec remise. On note X et Y les variables aléatoires respectivement égales au rang du premier tirage d'une boule blanche et au rang du deuxième tirage d'une boule blanche. Si aucune boule blanche n'est tirée, X prend la valeur $n+1$, et si une seule boule blanche est tirée, Y prend la valeur $n+1$.

- Déterminer les lois de probabilité de X et Y .
- Calculer l'espérance de X .

214 CCINP 2018

Soit $p \in]0, 1[$. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ suivant la loi géométrique de paramètre p .

On pose $T = \min\{X, Y\}$ et $Z = |X - Y|$.

- Rappeler, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X=k)$, puis l'espérance et la variance de X .
- Calculer $\mathbb{P}(T \geq k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
 - Donner, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, une relation entre $\mathbb{P}(T=k)$, $\mathbb{P}(T \geq k)$ et $\mathbb{P}(T \geq k+1)$.
 - En déduire la loi de T , la reconnaître et donner $\mathbb{E}(T)$.
 - Calculer $\mathbb{E}\left(\frac{1}{T}\right)$.
- Soit $(k, n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$. Calculer $\mathbb{P}((T=k) \cap (Z=n))$.
 - Déterminer la loi de Z et calculer son espérance.
- Les variables aléatoires Z et T sont-elles indépendantes ?
- On pose $U = \max\{X, Y\}$. Calculer $\mathbb{E}\left(\frac{U}{T}\right)$.

215 Mines-Télécom 2017

Soit $p \in]0, 1[$. Soit $(U_i)_{i \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

On suppose que pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, U_i suit la loi géométrique de paramètre p .

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire $T_n = \sum_{i=1}^n U_i$.

Indication : on pourra utiliser la fonction génératrice de T_n .

216 CCINP 2018

Soit $p \in]0, 1[$. Soit $(X_i)_{i \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ suivant toutes la loi géométrique de paramètre p . Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $Y_n = \min_{1 \leq i \leq n} X_i$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
 - a) Calculer $\mathbb{P}(Y_n > k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
 - b) Déterminer la loi de Y_n , la reconnaître puis donner $\mathbb{E}(Y_n)$ et $\mathbb{V}(Y_n)$.
2. Soit Z une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs dans \mathbb{N} .
 - a) Montrer que Z admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{k \geq 0} \mathbb{P}(Z > k)$ converge.
 - b) Montrer que si Z admet une espérance, alors $\mathbb{E}(Z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Z > k)$.
 - c) Retrouver, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'espérance de Y_n .

217 CCINP 2018

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Soit X et Y deux variables aléatoires sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, à valeurs dans $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$, et telles que $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket^2$, $\mathbb{P}(X = i, Y = j) = \lambda \binom{n}{i-1} \binom{n}{j-1}$.

1. Montrer que $\lambda = \frac{1}{4^n}$.
2. Déterminer les lois de probabilité de X et Y .
3. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Déterminer, à l'aide de la variable aléatoire $Z = X - 1$, l'espérance et la variance de X .
5. On note $B = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n+1}$ où, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket^2$, $b_{ij} = \mathbb{P}(Y = i | X = j)$. Calculer B^2 .
6. Déterminer les valeurs propres de B . La matrice B est-elle diagonalisable ? Déterminer la dimension de chaque sous-espace propre de B .

218 CCINP 2017

Soit $X_{1,1}, X_{1,2}, X_{2,1}, X_{2,2}$ quatre variables aléatoires discrètes mutuellement indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On suppose que pour tout $(i, j) \in \{1, 2\}^2$, $\mathbb{P}(X_{i,j} = 1) = \mathbb{P}(X_{i,j} = -1) = \frac{1}{2}$. On pose $M = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} X_{1,1} & X_{1,2} \\ X_{2,1} & X_{2,2} \end{pmatrix}$.

1.
 - a) Calculer $\mathbb{E}(\det(M))$.
 - b) Justifier que les variables aléatoires $\det(M)$ et $-\det(M)$ suivent la même loi.
 - c) Calculer $\mathbb{V}(\det(M))$.
2.
 - a) Calculer la probabilité pour que M soit une matrice orthogonale.
 - b) Calculer la probabilité pour que M soit une matrice inversible.
 - c) Calculer la probabilité pour que M soit une matrice diagonalisable.

219 Mines-Ponts 2021 (Patrick) Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On a un

générateur aléatoire « idéal » de nombres entiers entre 1 et N^2 .

Soit X la variable aléatoire du moment où l'on obtient, pour la première fois, la deuxième apparition d'un entier.

1. Déterminer la loi de X .
2. Quelle est la valeur de X la plus probable ?