

# Banque CCINP 2024

## EXERCICE 1 analyse

On note  $E$  l'espace vectoriel des applications continues sur  $[0, 1]$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

On pose  $\forall f \in E$ ,  $\|f\|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)|$  et  $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt$ .

- Les normes  $\|\cdot\|_\infty$  et  $\|\cdot\|_1$  sont-elles équivalentes? Justifier.
- Dans cette question, on munit  $E$  de la norme  $\|\cdot\|_\infty$ .

(a) Soit  $u : \begin{cases} E & \rightarrow \mathbb{R} \\ f & \mapsto f(0) \end{cases}$   
Prouver que  $u$  est une application continue sur  $E$ .

(b) On pose  $F = \{f \in E / f(0) = 0\}$ .  
Prouver que  $F$  est une partie fermée de  $E$  pour la norme  $\|\cdot\|_\infty$ .

- Dans cette question, on munit  $E$  de la norme  $\|\cdot\|_1$ .

Soit  $c : \begin{cases} [0, 1] & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto 1 \end{cases}$

On pose  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $f_n(x) = \begin{cases} nx & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 1 & \text{si } \frac{1}{n} < x \leq 1 \end{cases}$

(a) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Calculer  $\|f_n - c\|_1$ .

(b) On pose  $F = \{f \in E / f(0) = 0\}$ .  
On note  $\overline{F}$  l'adhérence de  $F$ .  
Prouver que  $c \in \overline{F}$ .  
 $F$  est-elle une partie fermée de  $E$  pour la norme  $\|\cdot\|_1$ ?

## EXERCICE 2 analyse

On pose  $f(x) = \frac{3x+7}{(x+1)^2}$ .

- Décomposer  $f(x)$  en éléments simples.
- En déduire que  $f$  est développable en série entière sur un intervalle du type  $]-r, r[$  (où  $r > 0$ ).  
Préciser ce développement en série entière et déterminer, en le justifiant, le domaine de validité  $D$  de ce développement en série entière.

- (a) Soit  $\sum a_n x^n$  une série entière de rayon  $R > 0$ .

On pose, pour tout  $x \in ]-R, R[$ ,  $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ .

Exprimer, pour tout entier  $p$ , en le prouvant,  $a_p$  en fonction de  $g^{(p)}(0)$ .

(b) En déduire le développement limité de  $f$  à l'ordre 3 au voisinage de 0.

## EXERCICE 3 analyse

- On pose  $g(x) = e^{2x}$  et  $h(x) = \frac{1}{1+x}$ .

Calculer, pour tout entier naturel  $k$ , la dérivée d'ordre  $k$  des fonctions  $g$  et  $h$  sur leurs ensembles de définition respectifs.

- On pose  $f(x) = \frac{e^{2x}}{1+x}$ .

En utilisant la formule de Leibniz concernant la dérivée  $n^{\text{ième}}$  d'un produit de fonctions, déterminer, pour tout entier naturel  $n$  et pour tout  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ , la valeur de  $f^{(n)}(x)$ .

- Démontrer, dans le cas général, la formule de Leibniz, utilisée dans la question précédente.

## EXERCICE 4 analyse

- Énoncer le théorème des accroissements finis.

- Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  et soit  $x_0 \in ]a, b[$ .

On suppose que  $f$  est continue sur  $[a, b]$  et que  $f$  est dérivable sur  $]a, x_0[$  et sur  $]x_0, b[$ .

Démontrer que, si  $f'$  admet une limite finie en  $x_0$ , alors  $f$  est dérivable en  $x_0$  et  $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$ .

- Prouver que l'implication : ( $f$  est dérivable en  $x_0$ )  $\implies$  ( $f'$  admet une limite finie en  $x_0$ ) est fautive.

**Indication** : on pourra considérer la fonction  $g$  définie par :  $g(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$  si  $x \neq 0$  et  $g(0) = 0$ .

## EXERCICE 5 analyse

- On considère la série de terme général  $u_n = \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$  où  $n \geq 2$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

(a) **Cas  $\alpha \leq 0$**

En utilisant une minoration très simple de  $u_n$ , démontrer que la série diverge.

(b) **Cas  $\alpha > 0$**

Étudier la nature de la série.

**Indication** : on pourra utiliser la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^\alpha}$ .

- Déterminer la nature de la série  $\sum_{n \geq 2} \frac{\left(e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right) e^{\frac{1}{n}}}{(\ln(n^2 + n))^2}$ .

## EXERCICE 6 analyse

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de réels strictement positifs et  $\ell$  un réel positif strictement inférieur à 1.

- Démontrer que si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$ , alors la série  $\sum u_n$  converge.

**Indication** : écrire, judicieusement, la définition de  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$ , puis majorer, pour  $n$  assez grand,  $u_n$  par le terme général d'une suite géométrique.

- Quelle est la nature de la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{n!}{n^n}$ ?

## EXERCICE 7 analyse

- Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites réelles telles que  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est non nulle à partir d'un certain rang.

(a) Prouver que si  $u_n \sim_{+\infty} v_n$  alors  $u_n$  et  $v_n$  sont de même signe à partir d'un certain rang.

(b) Dans cette question, on suppose que  $(v_n)$  est positive.  
Prouver que

$$u_n \sim_{+\infty} v_n \implies \sum u_n \text{ et } \sum v_n \text{ sont de même nature.}$$

- Étudier la convergence de la série  $\sum_{n \geq 2} \frac{((-1)^n + i) \sin\left(\frac{1}{n}\right) \ln n}{(\sqrt{n+3}-1)}$ .

**Remarque 1** :  $i$  désigne le nombre complexe de carré égal à  $-1$ .

## EXERCICE 8 analyse

- Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite décroissante positive de limite nulle.

(a) Démontrer que la série  $\sum (-1)^k u_k$  est convergente.

**Indication** : on pourra considérer  $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  avec  $S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k u_k$ .

(b) Donner une majoration de la valeur absolue du reste de la série  $\sum (-1)^k u_k$ .

- On pose :  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $f_n(x) = \frac{(-1)^n e^{-nx}}{n}$ .

(a) Étudier la convergence simple sur  $\mathbb{R}$  de la série de fonctions  $\sum_{n \geq 1} f_n$ .

(b) Étudier la convergence uniforme sur  $[0, +\infty[$  de la série de fonctions  $\sum_{n \geq 1} f_n$ .

**EXERCICE 9 analyse**

- Soit  $X$  un ensemble,  $(g_n)$  une suite de fonctions de  $X$  dans  $\mathbb{C}$  et  $g$  une fonction de  $X$  dans  $\mathbb{C}$ .  
Donner la définition de la convergence uniforme sur  $X$  de la suite de fonctions  $(g_n)$  vers la fonction  $g$ .
- On pose  $f_n(x) = \frac{n+2}{n+1} e^{-nx^2} \cos(\sqrt{nx})$ .
  - Étudier la convergence simple de la suite de fonctions  $(f_n)$ .
  - La suite de fonctions  $(f_n)$  converge-t-elle uniformément sur  $]0, +\infty[$  ?
  - Soit  $a > 0$ . La suite de fonctions  $(f_n)$  converge-t-elle uniformément sur  $[a, +\infty[$  ?
  - La suite de fonctions  $(f_n)$  converge-t-elle uniformément sur  $]0, +\infty[$  ?

**EXERCICE 10 analyse**

On pose  $f_n(x) = (x^2 + 1) \frac{ne^x + xe^{-x}}{n+x}$ .

- Démontrer que la suite de fonctions  $(f_n)$  converge uniformément sur  $[0, 1]$ .
- Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 (x^2 + 1) \frac{ne^x + xe^{-x}}{n+x} dx$ .

**EXERCICE 11 analyse**

- Soit  $X$  une partie de  $\mathbb{R}$ ,  $(f_n)$  une suite de fonctions de  $X$  dans  $\mathbb{R}$  convergeant simplement vers une fonction  $f$ .  
On suppose qu'il existe une suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $X$  telle que la suite  $(f_n(x_n) - f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$  ne tende pas vers 0.

Démontrer que la suite de fonctions  $(f_n)$  ne converge pas uniformément vers  $f$  sur  $X$ .

- Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on pose  $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{1+n^2x^2}$ .
  - Étudier la convergence simple de la suite  $(f_n)$ .
  - Étudier la convergence uniforme de la suite  $(f_n)$  sur  $[a, +\infty[$  (avec  $a > 0$ ), puis sur  $]0, +\infty[$ .

**EXERCICE 12 analyse**

- Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions de  $[a, b]$  dans  $\mathbb{R}$ .  
On suppose que la suite de fonctions  $(f_n)$  converge uniformément sur  $[a, b]$  vers une fonction  $f$ , et que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n$  est continue en  $x_0$ , avec  $x_0 \in [a, b]$ .  
Démontrer que  $f$  est continue en  $x_0$ .
- On pose :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0, 1], g_n(x) = x^n$ .  
La suite de fonctions  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge-t-elle uniformément sur  $[0, 1]$  ?

**EXERCICE 13 analyse**

- Rappeler, oralement, la définition, par les suites de vecteurs, d'une partie compacte d'un espace vectoriel normé.
- Démontrer qu'une partie compacte d'un espace vectoriel normé est une partie fermée de cet espace.
- Démontrer qu'une partie compacte d'un espace vectoriel normé est une partie bornée de cet espace.  
**Indication** : On pourra raisonner par l'absurde.
- On se place sur  $E = \mathbb{R}[X]$  muni de la norme  $\| \cdot \|_1$  définie pour tout polynôme  $P = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$  de  $E$  par :  $\|P\|_1 = \sum_{i=0}^n |a_i|$ .
  - Justifier que  $S(0, 1) = \{P \in \mathbb{R}[X] / \|P\|_1 = 1\}$  est une partie fermée et bornée de  $E$ .
  - Calculer  $\|X^n - X^m\|_1$  pour  $m$  et  $n$  entiers naturels distincts.  
 $S(0, 1)$  est-elle une partie compacte de  $E$  ? Justifier.

**EXERCICE 14 analyse**

- Soit  $a$  et  $b$  deux réels donnés avec  $a < b$ .  
Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions continues sur  $[a, b]$ , à valeurs réelles.  
Démontrer que si la suite  $(f_n)$  converge uniformément sur  $[a, b]$  vers  $f$ , alors la suite  $\left( \int_a^b f_n(x) dx \right)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\int_a^b f(x) dx$ .
- Justifier comment ce résultat peut être utilisé dans le cas des séries de fonctions.
- Démontrer que  $\int_0^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \right) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n}$ .

**EXERCICE 15 analyse**

Soit  $X$  une partie de  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

- Soit  $\sum f_n$  une série de fonctions définies sur  $X$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .  
Rappeler la définition de la convergence normale de  $\sum f_n$  sur  $X$ , puis celle de la convergence uniforme de  $\sum f_n$  sur  $X$ .
- Démontrer que toute série de fonctions, à valeurs dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , normalement convergente sur  $X$  est uniformément convergente sur  $X$ .
- La série de fonctions  $\sum \frac{n^2}{n!} z^n$  est-elle uniformément convergente sur le disque fermé de centre 0 et de rayon  $R \in \mathbb{R}_+^*$  ?

**EXERCICE 16 analyse**

On considère la série de fonctions de terme général  $u_n$  définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0, 1], u_n(x) = \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}.$$

On pose, lorsque la série converge,

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[ \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n} \right].$$

- Démontrer que  $S$  est dérivable sur  $[0, 1]$ .
- Calculer  $S'(1)$ .

**EXERCICE 17 analyse**

Soit  $A \subset \mathbb{C}$  et  $(f_n)$  une suite de fonctions de  $A$  dans  $\mathbb{C}$ .

- Démontrer l'implication :

$$\left( \text{la série de fonctions } \sum f_n \text{ converge uniformément sur } A \right) \\ \Downarrow$$

(la suite de fonctions  $(f_n)$  converge uniformément vers 0 sur  $A$ )

- On pose :  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0; +\infty[, f_n(x) = nx^2 e^{-x\sqrt{n}}$ .  
Prouver que  $\sum f_n$  converge simplement sur  $[0; +\infty[$ .  
 $\sum f_n$  converge-t-elle uniformément sur  $[0; +\infty[$  ? Justifier.

**EXERCICE 18 analyse**

On pose :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, u_n(x) = \frac{(-1)^n x^n}{n}$ .

On considère la série de fonctions  $\sum_{n \geq 1} u_n$ .

- Étudier la convergence simple de cette série.  
On note  $D$  l'ensemble des  $x$  où cette série converge et  $S(x)$  la somme de cette série pour  $x \in D$ .
- (a) La fonction  $S$  est-elle continue sur  $D$  ?  
(b) Étudier la convergence normale, puis la convergence uniforme de cette série sur  $D$ .
- (c) Étudier la convergence uniforme de cette série sur  $[0, 1]$ .

**EXERCICE 19 analyse**

- (a) Justifier, oralement, à l'aide du théorème de dérivation terme à terme, que la somme d'une série entière de la variable réelle est dérivable sur son intervalle ouvert de convergence.  
**Remarque** : On pourra utiliser, sans le démontrer, que la série  $\sum a_n x^n$  et la série  $\sum n a_n x^n$  ont même rayon de convergence.

- (b) En déduire le développement en série entière à l'origine, de la fonction de la variable réelle :

$$x \mapsto \frac{1}{(1-x)^2}.$$

2. (a) Donner le développement en série entière à l'origine de la fonction de la variable complexe :  $z \mapsto \frac{1}{1-z}$ .

- (b) Rappeler le produit de Cauchy de deux séries entières.

- (c) En déduire le développement en série entière à l'origine, de la fonction de la variable complexe :

$$z \mapsto \frac{1}{(1-z)^2}.$$

### EXERCICE 20 analyse

- Donner la définition du rayon de convergence d'une série entière de la variable complexe.
- Déterminer le rayon de convergence de chacune des séries entières suivantes :

(a)  $\sum \frac{(n!)^2}{(2n)!} z^{2n+1}$ .

(b)  $\sum n^{(-1)^n} z^n$ .

(c)  $\sum \cos nz^n$ .

### EXERCICE 21 analyse

- Donner la définition du rayon de convergence d'une série entière de la variable complexe.

- Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite bornée telle que la série  $\sum a_n$  diverge.

Quel est le rayon de convergence de la série entière  $\sum a_n z^n$  ? Justifier.

- Quel est le rayon de convergence de la série entière

$$\sum_{n \geq 1} (\sqrt{n})^{(-1)^n} \ln \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) z^n ?$$

### EXERCICE 22 analyse

- Que peut-on dire du rayon de convergence de la somme de deux séries entières ? Le démontrer.

- Développer en série entière au voisinage de 0, en précisant le rayon de convergence, la fonction

$$f : x \mapsto \ln(1+x) + \ln(1-2x).$$

La série obtenue converge-t-elle pour  $x = \frac{1}{4}$  ?  $x = \frac{1}{2}$  ?

$$x = -\frac{1}{2} ?$$

En cas de convergence, la somme de cette série est-elle continue en ces points ?

### EXERCICE 23 analyse

Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite complexe telle que la suite  $\left( \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \right)_{n \in \mathbb{N}}$  admet une limite.

- Démontrer que les séries entières  $\sum a_n x^n$  et  $\sum (n+1)a_{n+1} x^n$  ont le même rayon de convergence. On le note  $R$ .

- Démontrer que la fonction  $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  est de classe  $C^1$  sur l'intervalle  $] -R, R[$ .

### EXERCICE 24 analyse

- Déterminer le rayon de convergence de la série entière  $\sum \frac{x^n}{(2n)!}$ .

On pose  $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$ .

- Rappeler, sans démonstration, le développement en série entière en 0 de la fonction  $x \mapsto \operatorname{ch}(x)$  et préciser le rayon de convergence.

- (a) Déterminer  $S(x)$ .

- (b) On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(0) = 1, \quad f(x) = \operatorname{ch} \sqrt{x} \text{ si } x > 0, \quad f(x) = \cos \sqrt{-x} \text{ si } x < 0.$$

Démontrer que  $f$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ .

### EXERCICE 25 analyse

- Démontrer que, pour tout entier naturel  $n$ , la fonction  $t \mapsto \frac{1}{1+t^2+t^n e^{-t}}$  est intégrable sur  $]0, +\infty[$ .

- Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $u_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2+t^n e^{-t}}$ . Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ .

### EXERCICE 26 analyse

Pour tout entier  $n \geq 1$ , on pose  $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} dt$ .

- Justifier que  $I_n$  est bien définie.

- (a) Étudier la monotonie de la suite  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .

- (b) Déterminer la limite de la suite  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .

- La série  $\sum_{n \geq 1} (-1)^n I_n$  est-elle convergente ?

### EXERCICE 27 analyse

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $f_n(x) = \frac{e^{-x}}{1+n^2 x^2}$  et

$$u_n = \int_0^1 f_n(x) dx.$$

- Étudier la convergence simple de la suite de fonctions  $(f_n)$  sur  $]0, 1[$ .
- Soit  $a \in ]0, 1[$ . La suite de fonctions  $(f_n)$  converge-t-elle uniformément sur  $[a, 1]$  ?
- La suite de fonctions  $(f_n)$  converge-t-elle uniformément sur  $]0, 1]$  ?
- Trouver la limite de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .

### EXERCICE 28 analyse

*N.B. : les deux questions sont indépendantes.*

- La fonction  $x \mapsto \frac{e^{-x}}{\sqrt{x^2-4}}$  est-elle intégrable sur  $]2, +\infty[$  ?

- Soit  $a$  un réel strictement positif.

La fonction  $x \mapsto \frac{\ln x}{\sqrt{1+x^{2a}}}$  est-elle intégrable sur  $]0, +\infty[$  ?

### EXERCICE 29 analyse

On pose :  $\forall x \in ]0, +\infty[, \forall t \in ]0, +\infty[, f(x, t) = e^{-t} t^{x-1}$ .

- Démontrer que :  $\forall x \in ]0, +\infty[$ , la fonction  $t \mapsto f(x, t)$  est intégrable sur  $]0, +\infty[$ .

On pose alors :  $\forall x \in ]0, +\infty[, \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$ .

- Pour tout  $x \in ]0, +\infty[$ , exprimer  $\Gamma(x+1)$  en fonction de  $\Gamma(x)$ .

- Démontrer que  $\Gamma$  est de classe  $C^1$  sur  $]0, +\infty[$  et exprimer  $\Gamma'(x)$  sous forme d'intégrale.

### EXERCICE 30 analyse

- Énoncer le théorème de dérivation sous le signe intégrale.
- Démontrer que la fonction

$$f : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(xt) dt$$

est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$ .

- (a) Trouver une équation différentielle linéaire  $(E)$  d'ordre 1 dont  $f$  est solution.

- (b) Résoudre  $(E)$ .

### EXERCICE 31 analyse

- Déterminer une primitive de  $x \mapsto \cos^4 x$ .
- Résoudre sur  $\mathbb{R}$  l'équation différentielle :  $y'' + y = \cos^3 x$  en utilisant la méthode de variation des constantes.

**EXERCICE 32 analyse**

Soit l'équation différentielle :  $x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0$ .

1. Trouver les solutions de cette équation différentielle développables en série entière sur un intervalle  $]-r, r[$  de  $\mathbb{R}$ , avec  $r > 0$ .  
Déterminer la somme des séries entières obtenues.
2. Est-ce que toutes les solutions de  $x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0$  sur  $]0; 1[$  sont les restrictions d'une fonction développable en série entière sur  $]-1, 1[$ ?

**EXERCICE 33 analyse**

On pose :  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ ,  $f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$  et  $f(0, 0) = 0$ .

1. Démontrer que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}^2$ .
2. Démontrer que  $f$  admet des dérivées partielles en tout point de  $\mathbb{R}^2$ .
3.  $f$  est-elle de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ ? Justifier.

**EXERCICE 34 analyse**

Soit  $A$  une partie non vide d'un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel normé  $E$ .

1. Rappeler la définition d'un point adhérent à  $A$ , en termes de voisinages ou de boules.
2. Démontrer que :  $x \in \bar{A} \iff \exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que,  $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in A$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x$ .
3. Démontrer que, si  $A$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ , alors  $\bar{A}$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .
4. Démontrer que si  $A$  est convexe alors  $\bar{A}$  est convexe.

**EXERCICE 35 analyse**

$E$  et  $F$  désignent deux espaces vectoriels normés.

On note  $\| \cdot \|_E$  ( respectivement  $\| \cdot \|_F$ ) la norme sur  $E$  ( respectivement sur  $F$ ).

1. Soient  $f$  une application de  $E$  dans  $F$  et  $a$  un point de  $E$ .  
On considère les propositions suivantes :

**P1.**  $f$  est continue en  $a$ .

**P2.** Pour toute suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $E$  telle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = f(a)$ .

Prouver que les propositions P1 et P2 sont équivalentes.

2. Soit  $A$  une partie dense dans  $E$ , et soient  $f$  et  $g$  deux applications continues de  $E$  dans  $F$ .  
Démontrer que si, pour tout  $x \in A$ ,  $f(x) = g(x)$ , alors  $f = g$ .

**EXERCICE 36 analyse**

Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels normés sur le corps  $\mathbb{R}$ .

On note  $\| \cdot \|_E$  ( respectivement  $\| \cdot \|_F$ ) la norme sur  $E$  ( respectivement sur  $F$ ).

1. Démontrer que si  $f$  est une application linéaire de  $E$  dans  $F$ , alors les propriétés suivantes sont deux à deux équivalentes :

**P1.**  $f$  est continue sur  $E$ .

**P2.**  $f$  est continue en  $0_E$ .

**P3.**  $\exists k > 0$  tel que :  $\forall x \in E, \|f(x)\|_F \leq k \|x\|_E$ .

2. Soit  $E$  l'espace vectoriel des applications continues de  $[0; 1]$  dans  $\mathbb{R}$  muni de la norme définie par :  $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0; 1]} |f(x)|$ . On considère l'application  $\varphi$  de  $E$

dans  $\mathbb{R}$  définie par :  $\varphi(f) = \int_0^1 f(t) dt$ .

Démontrer que  $\varphi$  est linéaire et continue.

**EXERCICE 37 analyse**

On note  $E$  l'espace vectoriel des applications continues de  $[0; 1]$  dans  $\mathbb{R}$ .

On pose :  $\forall f \in E$ ,

$$N_\infty(f) = \sup_{x \in [0; 1]} |f(x)|$$

et

$$N_1(f) = \int_0^1 |f(t)| dt.$$

1. (a) Démontrer que  $N_\infty$  et  $N_1$  sont deux normes sur  $E$ .  
(b) Démontrer qu'il existe  $k > 0$  tel que, pour tout  $f$  de  $E$ ,  $N_1(f) \leq k N_\infty(f)$ .  
(c) Démontrer que tout ouvert pour la norme  $N_1$  est un ouvert pour la norme  $N_\infty$ .
2. Démontrer que les normes  $N_1$  et  $N_\infty$  ne sont pas équivalentes.

**EXERCICE 38 analyse**

1. On se place sur  $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ , muni de la norme  $\| \cdot \|_1$  définie par :  $\forall f \in E, \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt$ .

Soit  $u : \begin{matrix} E & \longrightarrow & E \\ f & \longmapsto & u(f) = g \end{matrix}$  avec

$$\forall x \in [0, 1], g(x) = \int_0^x f(t) dt.$$

On admet que  $u$  est un endomorphisme de  $E$ .

Prouver que  $u$  est continue et calculer  $\|u\|$ .

**Indication** : considérer, pour tout entier  $n$  non nul, la fonction  $f_n$  définie par  $f_n(t) = ne^{-nt}$ .

2. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Soit  $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$  un  $n$ -uplet **non nul, fixé**.

$$\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

Soit  $u : (x_1, x_2, \dots, x_n) \longmapsto \sum_{i=1}^n a_i x_i$ .

- (a) Justifier que  $u$  est continue quel que soit le choix de la norme sur  $\mathbb{R}^n$ .
- (b) On munit  $\mathbb{R}^n$  de  $\| \cdot \|_2$  où

$$\forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}.$$

Calculer  $\|u\|$ .

3. Déterminer un espace vectoriel  $E$ , une norme sur  $E$  et un endomorphisme de  $E$  non continu pour la norme choisie. Justifier.

**Remarque** : Les questions 1., 2. et 3. sont indépendantes.

**EXERCICE 39 analyse**

On note  $\ell^2$  l'ensemble des suites  $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de nombres réels telles que la série  $\sum x_n^2$  converge.

1. (a) Démontrer que, pour  $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2$  et  $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2$ , la série  $\sum x_n y_n$  converge.

On pose alors  $(x|y) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_n$ .

- (b) Démontrer que  $\ell^2$  est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites de nombres réels.

Dans la suite de l'exercice, on admet que  $( \cdot | \cdot )$  est un produit scalaire dans  $\ell^2$ .

On suppose que  $\ell^2$  est muni de ce produit scalaire et de la norme euclidienne associée, notée  $\| \cdot \|$ .

2. Soit  $p \in \mathbb{N}$ . Pour tout  $x = (x_n) \in \ell^2$ , on pose  $\varphi(x) = x_p$ . Démontrer que  $\varphi$  est une application linéaire et continue de  $\ell^2$  dans  $\mathbb{R}$ .

3. On considère l'ensemble  $F$  des suites réelles presque nulles c'est-à-dire l'ensemble des suites réelles dont tous les termes sont nuls sauf peut-être un nombre fini de termes. Déterminer  $F^\perp$  (au sens de  $( \cdot | \cdot )$ ). Comparer  $F$  et  $(F^\perp)^\perp$ .

**EXERCICE 40 analyse**

Soit  $A$  une algèbre de dimension finie admettant  $e$  pour élément unité et munie d'une norme notée  $\| \cdot \|$ .

On suppose que :  $\forall (u, v) \in A^2, \|u \cdot v\| \leq \|u\| \cdot \|v\|$ .

1. Soit  $u$  un élément de  $A$  tel que  $\|u\| < 1$ .

(a) Démontrer que la série  $\sum u^n$  est convergente.

(b) Démontrer que  $(e - u)$  est inversible et que

$$(e - u)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} u^n.$$

2. Démontrer que, pour tout  $u \in A$ , la série  $\sum \frac{u^n}{n!}$  converge.

**EXERCICE 41 analyse**

Soit  $f$  l'application de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$  définie par

$$f : (x, y) \mapsto 4x^2 + 12xy - y^2.$$

Soit  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 = 13\}$ .

1. Justifier que  $f$  atteint un maximum et un minimum sur  $C$ .

2. Soit  $(u, v) \in C$  un point où  $f$  atteint un de ses extremums.

(a) Justifier avec un théorème du programme qu'il existe un réel  $\lambda$  tel que le système  $(S)$  suivant soit vérifié :

$$(S) : \begin{cases} 4u & +6v & = \lambda u \\ 6u & -v & = \lambda v \end{cases}$$

(b) Montrer que  $(\lambda - 4)(\lambda + 1) - 36 = 0$ .

En déduire les valeurs possibles de  $\lambda$ .

3. Déterminer les valeurs possibles de  $(u, v)$ , puis donner le maximum et le minimum de  $f$  sur  $C$ .

**EXERCICE 42 analyse**

On considère les deux équations différentielles suivantes :

$$2xy' - 3y = 0 \quad (H)$$

$$2xy' - 3y = \sqrt{x} \quad (E)$$

1. Résoudre l'équation  $(H)$  sur l'intervalle  $]0, +\infty[$ .

2. Résoudre l'équation  $(E)$  sur l'intervalle  $]0, +\infty[$ .

3. L'équation  $(E)$  admet-elle des solutions sur l'intervalle  $]0, +\infty[$  ?

**EXERCICE 43 analyse**

Soit  $x_0 \in \mathbb{R}$ .

On définit la suite  $(u_n)$  par  $u_0 = x_0$  et,

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \text{Arctan}(u_n).$$

1. (a) Démontrer que la suite  $(u_n)$  est monotone et déterminer, en fonction de la valeur de  $x_0$ , le sens de variation de  $(u_n)$ .

(b) Montrer que  $(u_n)$  converge et déterminer sa limite.

2. Déterminer l'ensemble des fonctions  $h$ , continues sur  $\mathbb{R}$ , telles que :  $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = h(\text{Arctan } x)$ .

**EXERCICE 44 analyse**

Soit  $E$  un espace vectoriel normé. Soient  $A$  et  $B$  deux parties non vides de  $E$ .

1. (a) Rappeler la caractérisation de l'adhérence d'un ensemble à l'aide des suites.

(b) Montrer que :  $A \subset B \implies \overline{A} \subset \overline{B}$ .

2. Montrer que :  $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

**Remarque** : une réponse sans utiliser les suites est aussi acceptée.

3. (a) Montrer que :  $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$ .

(b) Montrer, à l'aide d'un exemple, que l'autre inclusion n'est pas forcément vérifiée (on pourra prendre  $E = \mathbb{R}$ ).

**EXERCICE 45 analyse**

**Les questions 1. et 2. sont indépendantes.**

Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel normé. On note  $\| \cdot \|$  la norme sur  $E$ .

Soit  $A$  une partie non vide de  $E$ .

On note  $\overline{A}$  l'adhérence de  $A$ .

1. (a) Donner la caractérisation séquentielle de  $\overline{A}$ .

(b) Prouver que, si  $A$  est convexe, alors  $\overline{A}$  est convexe.

2. On pose :  $\forall x \in E, d_A(x) = \inf_{a \in A} \|x - a\|$ .

(a) Soit  $x \in E$ . Prouver que  $d_A(x) = 0 \implies x \in \overline{A}$ .

(b) On suppose que  $A$  est fermée et que :  $\forall (x, y) \in E^2, \forall t \in [0, 1], d_A(tx + (1-t)y) \leq td_A(x) + (1-t)d_A(y)$ . Prouver que  $A$  est convexe.

**EXERCICE 46 analyse**

On considère la série :  $\sum_{n \geq 1} \cos(\pi \sqrt{n^2 + n + 1})$ .

1. Prouver que, au voisinage de  $+\infty$ ,

$$\pi \sqrt{n^2 + n + 1} = n\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha \frac{\pi}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

où  $\alpha$  est un réel que l'on déterminera.

2. En déduire que  $\sum_{n \geq 1} \cos(\pi \sqrt{n^2 + n + 1})$  converge.

3.  $\sum_{n \geq 1} \cos(\pi \sqrt{n^2 + n + 1})$  converge-t-elle absolument ?

**EXERCICE 47 analyse**

Pour chacune des séries entières de la variable réelle suivantes, déterminer le rayon de convergence et calculer la somme de la série entière sur l'intervalle ouvert de convergence :

$$1. \sum_{n \geq 1} \frac{3^n x^{2n}}{n}.$$

$$2. \sum a_n x^n \text{ avec } \begin{cases} a_{2n} = 4^n \\ a_{2n+1} = 5^{n+1} \end{cases}$$

**EXERCICE 48 analyse**

$C^0([0, 1], \mathbb{R})$  désigne l'espace vectoriel des fonctions continues sur  $[0, 1]$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

Soit  $f \in C^0([0, 1], \mathbb{R})$  telle que :  $\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^1 t^n f(t) dt = 0$ .

1. Énoncer le théorème de Weierstrass d'approximation par des fonctions polynomiales.

2. Soit  $(P_n)$  une suite de fonctions polynomiales convergeant uniformément sur le segment  $[0, 1]$  vers  $f$ .

(a) Montrer que la suite de fonctions  $(P_n f)$  converge uniformément sur le segment  $[0, 1]$  vers  $f^2$ .

(b) Démontrer que  $\int_0^1 f^2(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 P_n(t) f(t) dt$ .

(c) Calculer  $\int_0^1 P_n(t) f(t) dt$ .

3. En déduire que  $f$  est la fonction nulle sur le segment  $[0, 1]$ .

**EXERCICE 49 analyse**

Soit  $\sum a_n$  une série absolument convergente à termes complexes. On pose  $M = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$ .

On pose :  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0, +\infty[, f_n(t) = \frac{a_n t^n}{n!} e^{-t}$ .

1. (a) Justifier que la suite  $(a_n)$  est bornée.

(b) Justifier que la série de fonctions  $\sum f_n$  converge simplement sur  $[0, +\infty[$ .

On admettra, pour la suite de l'exercice, que

$$f : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \text{ est continue sur } [0, +\infty[.$$

2. (a) Justifier que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la fonction  $g_n : t \mapsto t^n e^{-t}$  est intégrable sur  $[0, +\infty[$  et calculer  $\int_0^{+\infty} g_n(t) dt$ .

En déduire la convergence et la valeur de  $\int_0^{+\infty} |f_n(t)| dt$ .

(b) Prouver que  $\int_0^{+\infty} \left( \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n t^n}{n!} e^{-t} \right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ .

**EXERCICE 50 analyse**

On considère la fonction  $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-2t}}{x+t} dt$ .

1. Prouver que  $F$  est définie et continue sur  $]0; +\infty[$ .
2. Prouver que  $x \mapsto xF(x)$  admet une limite en  $+\infty$  et déterminer la valeur de cette limite.
3. Déterminer un équivalent, au voisinage de  $+\infty$ , de  $F(x)$ .

**EXERCICE 51 analyse**

1. Montrer que la série  $\sum \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{4n} (2n+1)}$  converge.  
On se propose de calculer la somme de cette série.
2. Donner le développement en série entière en 0 de

$$t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t}}$$

en précisant le rayon de convergence.

**Remarque** : dans l'expression du développement, on utilisera la notation factorielle.

3. En déduire le développement en série entière en 0 de  $x \mapsto \text{Arcsin } x$  ainsi que son rayon de convergence.
4. En déduire la valeur de  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{4n} (2n+1)}$ .

**EXERCICE 52 analyse**

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

On considère l'application définie sur  $\mathbb{R}^2$  par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^4}{x^2 + y^2 - xy} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ \alpha & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

1. Prouver que :  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 - xy \geq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ .
2. (a) Justifier que le domaine de définition de  $f$  est bien  $\mathbb{R}^2$ .  
(b) Déterminer  $\alpha$  pour que  $f$  soit continue sur  $\mathbb{R}^2$ .
3. Dans cette question, on suppose que  $\alpha = 0$ .
  - (a) Justifier l'existence de  $\frac{\partial f}{\partial x}$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}$  sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  et les calculer.
  - (b) Justifier l'existence de  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$  et donner leur valeur.
  - (c)  $f$  est-elle de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^2$  ?

**EXERCICE 53 analyse**

On considère, pour tout entier naturel  $n$  non nul, la fonction  $f_n$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f_n(x) = \frac{x}{1+n^4x^4}$ .

1. (a) Prouver que  $\sum_{n \geq 1} f_n$  converge simplement sur  $\mathbb{R}$ .

On pose alors :  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ .

- (b) Soit  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  avec  $0 < a < b$ .  
 $\sum_{n \geq 1} f_n$  converge-t-elle normalement sur  $[a, b]$  ? sur  $[a, +\infty[$  ?
- (c)  $\sum_{n \geq 1} f_n$  converge-t-elle normalement sur  $[0, +\infty[$  ?

2. Prouver que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}^*$ .

3. Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

**EXERCICE 54 analyse**

Soit  $E$  l'ensemble des suites à valeurs réelles qui convergent vers 0.

1. Prouver que  $E$  est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites à valeurs réelles.
2. On pose :  $\forall u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E, \|u\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$ .
  - (a) Prouver que  $\|\cdot\|$  est une norme sur  $E$ .
  - (b) Prouver que :  $\forall u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E, \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{u_n}{2^{n+1}}$  converge.
  - (c) On pose :  $\forall u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E, f(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{2^{n+1}}$ .  
Prouver que  $f$  est continue sur  $E$ .

**EXERCICE 55 analyse**

Soit  $a$  un nombre complexe.

On note  $E$  l'ensemble des suites à valeurs complexes telles que :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2au_{n+1} + 4(ia-1)u_n$  avec  $(u_0, u_1) \in \mathbb{C}^2$ .

1. (a) Prouver que  $E$  est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites à valeurs complexes.  
(b) Déterminer, en le justifiant, la dimension de  $E$ .
2. Dans cette question, on considère la suite de  $E$  définie par :  $u_0 = 1$  et  $u_1 = 1$ .  
Exprimer, pour tout entier naturel  $n$ , le nombre complexe  $u_n$  en fonction de  $n$ .  
**Indication** : discuter suivant les valeurs de  $a$ .

**EXERCICE 56 analyse**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^2$  par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = 2x^3 + 6xy - 3y^2 + 2.$$

1.  $f$  admet-elle des extrema locaux sur  $\mathbb{R}^2$  ? Si oui, les déterminer.
2.  $f$  admet-elle des extrema globaux sur  $\mathbb{R}^2$  ? Justifier.
3. On pose  $K = [0, 1] \times [0, 1]$ .  
Justifier, oralement, que  $f$  admet un maximum global sur  $K$  puis le déterminer.

**EXERCICE 57 analyse**

1. Soit  $f$  une fonction de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$ .

- (a) Donner, en utilisant des quantificateurs, la définition de la continuité de  $f$  en  $(0, 0)$ .
- (b) Donner la définition de «  $f$  différentiable en  $(0, 0)$  ».

2. On considère l'application définie sur  $\mathbb{R}^2$  par

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- (a) Montrer que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}^2$ .
- (b) Montrer que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ .

**EXERCICE 58 analyse**

1. Soit  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels normés de dimension finie.  
Soit  $a \in E$  et soit  $f : E \rightarrow F$  une application.  
Donner la définition de «  $f$  différentiable en  $a$  ».

2. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n$ . Soit  $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$  une base de  $E$ .

On pose :  $\forall x \in E, \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$ , où  $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ .

On pose :  $\forall (x, y) \in E \times E, \|(x, y)\| = \max(\|x\|_\infty, \|y\|_\infty)$ .  
On admet que  $\|\cdot\|_\infty$  est une norme sur  $E$  et que  $\|\cdot\|$  est une norme sur  $E \times E$ .

Soit  $B : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  une forme bilinéaire sur  $E$ .

- (a) Prouver que

$$\exists C \in \mathbb{R}^+ / \forall (x, y) \in E \times E, |B(x, y)| \leq C \|x\|_\infty \|y\|_\infty.$$

- (b) Montrer que  $B$  est différentiable sur  $E \times E$  et déterminer sa différentielle en tout  $(u_0, v_0) \in E \times E$ .

**EXERCICE 59 algèbre**

Soit  $n$  un entier naturel tel que  $n \geq 2$ .

Soit  $E$  l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans  $\mathbb{K}$  ( $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ) de degré inférieur ou égal à  $n$ .

On pose :  $\forall P \in E, f(P) = P - P'$ .

1. Démontrer que  $f$  est bijectif de deux manières :

- sans utiliser de matrice de  $f$ ,
- en utilisant une matrice de  $f$ .

2. Soit  $Q \in E$ . Trouver  $P$  tel que  $f(P) = Q$ .

**Indication** : si  $P \in E$ , quel est le polynôme  $P^{(n+1)}$  ?

3.  $f$  est-il diagonalisable ?

**EXERCICE 60 algèbre**

Soit la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$  et  $f$  l'endomorphisme de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  défini par :  $f(M) = AM$ .

- Déterminer une base de  $\text{Ker} f$ .
- $f$  est-il surjectif ?
- Déterminer une base de  $\text{Im} f$ .
- A-t-on  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \text{Ker} f \oplus \text{Im} f$  ?

**EXERCICE 61 algèbre**

On note  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre  $n$  à coefficients complexes.

Pour  $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , on pose :

$$\|A\| = \max_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} |a_{i,j}|.$$

- Prouver que  $\|\cdot\|$  est une norme sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .
- Démontrer que :

$$\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2, \|AB\| \leq n \|A\| \|B\|.$$

Puis, démontrer que, pour tout entier  $p \geq 1$ ,

$$\|A^p\| \leq n^{p-1} \|A\|^p.$$

- Démontrer que, pour toute matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , la série  $\sum \frac{A^p}{p!}$  est absolument convergente. Est-elle convergente ?

**EXERCICE 62 algèbre**

Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $f^2 - f - 2\text{Id} = 0$ .

- Prouver que  $f$  est bijectif et exprimer  $f^{-1}$  en fonction de  $f$ .
- Prouver que  $E = \text{Ker}(f + \text{Id}) \oplus \text{Ker}(f - 2\text{Id})$  :
  - en utilisant le lemme des noyaux.
  - sans utiliser le lemme des noyaux.
- Dans cette question, on suppose que  $E$  est de dimension finie. Prouver que  $\text{Im}(f + \text{Id}) = \text{Ker}(f - 2\text{Id})$ .

**EXERCICE 63 algèbre**

Soit  $E$  un espace euclidien muni d'un produit scalaire noté  $(\cdot | \cdot)$ .

On pose  $\forall x \in E, \|x\| = \sqrt{(x|x)}$ .

Pour tout endomorphisme  $u$  de  $E$ , on note  $u^*$  l'adjoint de  $u$ .

- Un endomorphisme  $u$  de  $E$  vérifiant  $\forall x \in E, (u(x)|x) = 0$  est-il nécessairement l'endomorphisme nul ?
- Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Prouver que les trois assertions suivantes sont équivalentes :
  - $u \circ u^* = u^* \circ u$ .
  - $\forall (x, y) \in E^2, (u(x)|u(y)) = (u^*(x)|u^*(y))$ .
  - $\forall x \in E, \|u(x)\| = \|u^*(x)\|$ .

**EXERCICE 64 algèbre**

Soit  $f$  un endomorphisme d'un espace vectoriel  $E$  de dimension finie  $n$ .

- Démontrer que :  $E = \text{Im} f \oplus \text{Ker} f \implies \text{Im} f = \text{Im} f^2$ .
- (a) Démontrer que :  $\text{Im} f = \text{Im} f^2 \iff \text{Ker} f = \text{Ker} f^2$ .  
(b) Démontrer que :  $\text{Im} f = \text{Im} f^2 \implies E = \text{Im} f \oplus \text{Ker} f$ .

**EXERCICE 65 algèbre**

Soit  $u$  un endomorphisme d'un espace vectoriel  $E$  sur le corps  $\mathbb{K}$  ( $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ). On note  $\mathbb{K}[X]$  l'ensemble des polynômes à coefficients dans  $\mathbb{K}$ .

1. Démontrer que :

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X], (PQ)(u) = P(u) \circ Q(u).$$

2. (a) Démontrer que :

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X], P(u) \circ Q(u) = Q(u) \circ P(u).$$

(b) Démontrer que, pour tout  $(P, Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]$  :

$$(P \text{ polynôme annulateur de } u) \implies (PQ \text{ polynôme annulateur de } u)$$

- Soit  $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ . Écrire le polynôme caractéristique de  $A$ , puis en déduire que le polynôme  $R = X^4 + 2X^3 + X^2 - 4X$  est un polynôme annulateur de  $A$ .

**EXERCICE 66 algèbre**

1. Soit  $A \in S_n(\mathbb{R})$ .

Prouver que  $A \in S_n^+(\mathbb{R}) \iff \text{sp}(A) \subset [0, +\infty[$ .

- Prouver que  $\forall A \in S_n(\mathbb{R}), A^2 \in S_n^+(\mathbb{R})$ .
- Prouver que  $\forall A \in S_n(\mathbb{R}), \forall B \in S_n^+(\mathbb{R})$ ,

$$AB = BA \implies A^2B \in S_n^+(\mathbb{R}).$$

4. Soit  $A \in S_n^+(\mathbb{R})$ .

Prouver qu'il existe  $B \in S_n^+(\mathbb{R})$  telle que  $A = B^2$ .

**EXERCICE 67 algèbre**

Soit la matrice  $M = \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ b & 0 & c \\ b & -a & 0 \end{pmatrix}$  où  $a, b, c$  sont des réels.

$M$  est-elle diagonalisable dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  ?  $M$  est-elle diagonalisable dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$  ?

**EXERCICE 68 algèbre**

Soit la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ .

- Démontrer que  $A$  est diagonalisable de quatre manières :
  - sans calcul,
  - en calculant directement le déterminant  $\det(\lambda I_3 - A)$ , où  $I_3$  est la matrice identité d'ordre 3, et en déterminant les sous-espaces propres,
  - en utilisant le rang de la matrice,
  - en calculant  $A^2$ .
- On suppose que  $A$  est la matrice d'un endomorphisme  $u$  d'un espace euclidien dans une base orthonormée. Trouver une base orthonormée dans laquelle la matrice de  $u$  est diagonale.

**EXERCICE 69 algèbre**

On considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ a & 0 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$  où  $a$  est un réel.

- Déterminer le rang de  $A$ .
- Pour quelles valeurs de  $a$ , la matrice  $A$  est-elle diagonalisable ?

**EXERCICE 70 algèbre**

Soit  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ .

- Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de  $A$ .  $A$  est-elle diagonalisable ?
- Soit  $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$  et  $B = aI_3 + bA + cA^2$ , où  $I_3$  désigne la matrice identité d'ordre 3. Déduire de la question 1. les éléments propres de  $B$ .

**EXERCICE 71 algèbre**

Soit  $P$  le plan d'équation  $x + y + z = 0$  et  $D$  la droite d'équation  $x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ .

- Vérifier que  $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$ .
- Soit  $p$  la projection vectorielle de  $\mathbb{R}^3$  sur  $P$  parallèlement à  $D$ .  
Soit  $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ .  
Déterminer  $p(u)$  et donner la matrice de  $p$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ .
- Déterminer une base de  $\mathbb{R}^3$  dans laquelle la matrice de  $p$  est diagonale.

**EXERCICE 72 algèbre**

Soit  $n$  un entier naturel non nul.

Soit  $f$  un endomorphisme d'un espace vectoriel  $E$  de dimension  $n$ , et soit  $e = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ .

On suppose que  $f(e_1) = f(e_2) = \dots = f(e_n) = v$ , où  $v$  est un vecteur donné de  $E$ .

- Donner le rang de  $f$ .
- $f$  est-il diagonalisable? (discuter en fonction du vecteur  $v$ )

**EXERCICE 73 algèbre**

On pose  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ .

- Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de  $A$ .
- Déterminer toutes les matrices qui commutent avec la matrice  $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ .  
En déduire que l'ensemble des matrices qui commutent avec  $A$  est  $\text{Vect}(I_2, A)$ .

**EXERCICE 74 algèbre**

- On considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

- Justifier sans calcul que  $A$  est diagonalisable.
- Déterminer les valeurs propres de  $A$  puis une base de vecteurs propres associés.

- On considère le système différentiel  $\begin{cases} x' = x + 2z \\ y' = y \\ z' = 2x + z \end{cases}$ ,

$x, y, z$  désignant trois fonctions de la variable  $t$ , dérivables sur  $\mathbb{R}$ .

En utilisant la question 1. et en le justifiant, résoudre ce système.

**EXERCICE 75 algèbre**

On considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ .

- Démontrer que  $A$  n'est pas diagonalisable.
- On note  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^2$  canoniquement associé à  $A$ .  
Trouver une base  $(v_1, v_2)$  de  $\mathbb{R}^2$  dans laquelle la matrice de  $f$  est de la forme  $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ .  
On donnera explicitement les valeurs de  $a, b$  et  $c$ .
- En déduire la résolution du système différentiel  $\begin{cases} x' = -x - 4y \\ y' = x + 3y \end{cases}$ .

**EXERCICE 76 algèbre**

Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel muni d'un produit scalaire noté  $(\cdot | \cdot)$ .

On pose  $\forall x \in E, \|x\| = \sqrt{(x|x)}$ .

- Énoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.  
(b) Dans quel cas a-t-on égalité? Le démontrer.
- Soit  $E = \{f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}), \forall x \in [a, b] f(x) > 0\}$ .  
Prouver que l'ensemble  $\left\{ \int_a^b f(t) dt \times \int_a^b \frac{1}{f(t)} dt, f \in E \right\}$  admet une borne inférieure  $m$  et déterminer la valeur de  $m$ .

**EXERCICE 77 algèbre**

Soit  $E$  un espace euclidien.

- Soit  $A$  un sous-espace vectoriel de  $E$ .  
Démontrer que  $(A^\perp)^\perp = A$ .
- Soient  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ .  
(a) Démontrer que  $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$ .  
(b) Démontrer que  $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$ .

**EXERCICE 78 algèbre**

Soit  $E$  un espace euclidien de dimension  $n$  et  $u$  un endomorphisme de  $E$ .

On note  $(x|y)$  le produit scalaire de  $x$  et de  $y$  et  $\|\cdot\|$  la norme euclidienne associée.

- Soit  $u$  un endomorphisme de  $E$ , tel que

$$\forall x \in E, \|u(x)\| = \|x\|.$$

- Démontrer que :  $\forall (x, y) \in E^2, (u(x)|u(y)) = (x|y)$ .
  - Démontrer que  $u$  est bijectif.
- On note  $\mathcal{O}(E)$  l'ensemble des isométries vectorielles de  $E$ .  
C'est-à-dire  $\mathcal{O}(E) = \{u \in \mathcal{L}(E) / \forall x \in E, \|u(x)\| = \|x\|\}$ .  
Démontrer que  $\mathcal{O}(E)$ , muni de la loi  $\circ$ , est un groupe.
  - Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Soit  $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$  une base orthonormée de  $E$ .  
Prouver que :  $u \in \mathcal{O}(E) \iff (u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n))$  est une base orthonormée de  $E$ .

**EXERCICE 79 algèbre**

Soit  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $a < b$ .

- Soit  $h$  une fonction continue et positive de  $[a, b]$  dans  $\mathbb{R}$ .  
Démontrer que  $\int_a^b h(x) dx = 0 \implies h = 0$ .
- Soit  $E$  le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des fonctions continues de  $[a, b]$  dans  $\mathbb{R}$ .  
On pose :  $\forall (f, g) \in E^2, (f|g) = \int_a^b f(x)g(x) dx$ .  
Démontrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur  $E$ .
- Majorer  $\int_0^1 \sqrt{x} e^{-x} dx$  en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

**EXERCICE 80 algèbre**

Soit  $E$  l'espace vectoriel des applications continues et  $2\pi$ -périodiques de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .

- Démontrer que  $(f | g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)g(t) dt$  définit un produit scalaire sur  $E$ .
- Soit  $F$  le sous-espace vectoriel engendré par  $f : x \mapsto \cos x$  et  $g : x \mapsto \cos(2x)$ .  
Déterminer le projeté orthogonal sur  $F$  de la fonction  $u : x \mapsto \sin^2 x$ .

**EXERCICE 81 algèbre**

On définit dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  l'application  $\varphi$  par :  $\varphi(A, A') = \text{tr}(A^T A')$ , où  $\text{tr}(A^T A')$  désigne la trace du produit de la matrice  $A^T$  par la matrice  $A'$ .

On admet que  $\varphi$  est un produit scalaire sur  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

On note  $\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$ .

- Démontrer que  $\mathcal{F}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .
- Déterminer une base de  $\mathcal{F}^\perp$ .
- Déterminer le projeté orthogonal de  $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  sur  $\mathcal{F}^\perp$ .
- Calculer la distance de  $J$  à  $\mathcal{F}$ .

**EXERCICE 82 algèbre**

Soit  $E$  un espace préhilbertien et  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$  de dimension finie  $n > 0$ .

On admet que, pour tout  $x \in E$ , il existe un élément unique  $y_0$  de  $F$  tel que  $x - y_0$  soit orthogonal à  $F$  et que la distance de  $x$  à  $F$  soit égale à  $\|x - y_0\|$ .

Pour  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  et  $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ , on pose

$$(A | A') = aa' + bb' + cc' + dd'.$$

- Démontrer que  $(\cdot | \cdot)$  est un produit scalaire sur  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .
- Calculer la distance de la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$  au sous-espace vectoriel  $F$  des matrices triangulaires supérieures.

**Exercice 83 algèbre**

Soit  $u$  et  $v$  deux endomorphismes d'un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $E$ .

- Soit  $\lambda$  un réel non nul. Prouver que si  $\lambda$  est valeur propre de  $u \circ v$ , alors  $\lambda$  est valeur propre de  $v \circ u$ .
- On considère, sur  $E = \mathbb{R}[X]$  les endomorphismes  $u$  et  $v$  définis par  $u : P \mapsto \int_1^X P$  et  $v : P \mapsto P'$ . Déterminer  $\text{Ker}(u \circ v)$  et  $\text{Ker}(v \circ u)$ . Le résultat de la question 1. reste-t-il vrai pour  $\lambda = 0$ ?
- Si  $E$  est de dimension finie, démontrer que le résultat de la première question reste vrai pour  $\lambda = 0$ .  
**Indication** : penser à utiliser le déterminant.

**EXERCICE 84 algèbre**

- Donner la définition d'un argument d'un nombre complexe non nul (on ne demande ni l'interprétation géométrique, ni la démonstration de l'existence d'un tel nombre).
- Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Donner, en justifiant, les solutions dans  $\mathbb{C}$  de l'équation  $z^n = 1$  et préciser leur nombre.
- En déduire, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , les solutions dans  $\mathbb{C}$  de l'équation  $(z + i)^n = (z - i)^n$  et démontrer que ce sont des nombres réels.

**EXERCICE 85 algèbre**

- Soient  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $P \in \mathbb{R}_n[X]$  et  $a \in \mathbb{R}$ .  
(a) Donner sans démonstration, en utilisant la formule de Taylor, la décomposition de  $P(X)$  dans la base  $(1, X - a, (X - a)^2, \dots, (X - a)^n)$ .  
(b) Soit  $r \in \mathbb{N}^*$ . En déduire que  $a$  est une racine de  $P$  d'ordre de multiplicité  $r$  si et seulement si  $P^{(r)}(a) \neq 0$  et  $\forall k \in \llbracket 0, r - 1 \rrbracket$ ,  $P^{(k)}(a) = 0$ .
- Déterminer deux réels  $a$  et  $b$  pour que 1 soit racine double du polynôme  $P = X^5 + aX^2 + bX$  et factoriser alors ce polynôme dans  $\mathbb{R}[X]$ .

**EXERCICE 86 algèbre**

- Soit  $(a, b, p) \in \mathbb{Z}^3$ . Prouver que : si  $p \wedge a = 1$  et  $p \wedge b = 1$ , alors  $p \wedge (ab) = 1$ .
- Soit  $p$  un nombre premier.  
(a) Prouver que  $\forall k \in \llbracket 1, p - 1 \rrbracket$ ,  $p$  divise  $\binom{p}{k} k!$  puis en déduire que  $p$  divise  $\binom{p}{k}$ .  
(b) Prouver que :  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $n^p \equiv n \pmod{p}$ .  
**Indication** : procéder par récurrence.  
(c) En déduire, pour tout entier naturel  $n$ , que :  $p$  ne divise pas  $n \implies n^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ .

**EXERCICE 87 algèbre**

Soient  $a_0, a_1, \dots, a_n$ ,  $n + 1$  réels deux à deux distincts.

- Montrer que si  $b_0, b_1, \dots, b_n$  sont  $n + 1$  réels quelconques, alors il existe un unique polynôme  $P$  vérifiant  
$$\deg P \leq n \text{ et } \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, P(a_i) = b_i.$$

- Soit  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ .  
Expliciter ce polynôme  $P$ , que l'on notera  $L_k$ , lorsque :

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, b_i = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq k \\ 1 & \text{si } i = k \end{cases}$$

- Prouver que  $\forall p \in \llbracket 0, n \rrbracket, \sum_{k=0}^n a_k^p L_k = X^p$ .

**EXERCICE 88 algèbre**

- Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel ( $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ).  
Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Soit  $P \in \mathbb{K}[X]$ .  
Prouver que si  $P$  annule  $u$  alors toute valeur propre de  $u$  est racine de  $P$ .
- Soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $n \geq 2$ . On pose  $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .  
Soit  $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$  la matrice de  $E$  définie par  
$$a_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j \\ 1 & \text{si } i \neq j \end{cases}.$$
  
Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  défini par :  $\forall M \in E, u(M) = M + \text{tr}(M)A$ .  
(a) Prouver que le polynôme  $X^2 - 2X + 1$  est annulateur de  $u$ .  
(b)  $u$  est-il diagonalisable ?  
Justifier votre réponse en utilisant deux méthodes (l'une avec, l'autre sans l'aide de la question 1.).

**EXERCICE 89 algèbre**

Soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $n \geq 2$ . On pose  $z = e^{i \frac{2\pi}{n}}$ .

- On suppose  $k \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$ .  
Déterminer le module et un argument du complexe  $z^k - 1$ .
- On pose  $S = \sum_{k=0}^{n-1} |z^k - 1|$ . Montrer que  $S = \frac{2}{\tan \frac{\pi}{2n}}$ .

**EXERCICE 90 algèbre**

$\mathbb{K}$  désigne le corps des réels ou celui des complexes.

Soient  $a_1, a_2, a_3$  trois scalaires distincts donnés de  $\mathbb{K}$ .

- Montrer que  $\Phi : \mathbb{K}_2[X] \longrightarrow \mathbb{K}^3$   
$$P \longmapsto (P(a_1), P(a_2), P(a_3))$$
  
est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
- On note  $(e_1, e_2, e_3)$  la base canonique de  $\mathbb{K}^3$  et on pose  $\forall k \in \{1, 2, 3\}, L_k = \Phi^{-1}(e_k)$ .  
(a) Justifier que  $(L_1, L_2, L_3)$  est une base de  $\mathbb{K}_2[X]$ .  
(b) Exprimer les polynômes  $L_1, L_2$  et  $L_3$  en fonction de  $a_1, a_2$  et  $a_3$ .
- Soit  $P \in \mathbb{K}_2[X]$ . Déterminer les coordonnées de  $P$  dans la base  $(L_1, L_2, L_3)$ .
- Application** : on se place dans  $\mathbb{R}^2$  muni d'un repère orthonormé et on considère les trois points  $A(0, 1), B(1, 3), C(2, 1)$ .  
Déterminer une fonction polynomiale de degré 2 dont la courbe passe par les points  $A, B$  et  $C$ .

**EXERCICE 91 algèbre**

On considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ .

- Montrer que  $A$  n'admet qu'une seule valeur propre que l'on déterminera.
- La matrice  $A$  est-elle inversible ? Est-elle diagonalisable ?
- Déterminer, en justifiant, le polynôme minimal de  $A$ .
- Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Déterminer le reste de la division euclidienne de  $X^n$  par  $(X - 1)^2$  et en déduire la valeur de  $A^n$ .

**EXERCICE 92 algèbre**

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On considère  $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre  $n$ .

On pose :  $\forall (A, B) \in E^2, \langle A, B \rangle = \text{tr}(A^T B)$  où  $\text{tr}$  désigne la

trace et  $A^T$  désigne la transposée de la matrice  $A$ .

1. Prouver que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est un produit scalaire sur  $E$ .
2. On note  $S_n(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices symétriques de  $E$ .  
Une matrice  $A$  de  $E$  est dite antisymétrique lorsque  $A^T = -A$ .  
On note  $A_n(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices antisymétriques de  $E$ .  
On admet que  $S_n(\mathbb{R})$  et  $A_n(\mathbb{R})$  sont des sous-espaces vectoriels de  $E$ .
  - (a) Prouver que  $E = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$ .
  - (b) Prouver que  $A_n(\mathbb{R})^\perp = S_n(\mathbb{R})$ .
3. Soit  $F$  l'ensemble des matrices diagonales de  $E$ .  
Déterminer  $F^\perp$ .

**EXERCICE 93 algèbre**

Soit  $E$  un espace vectoriel réel de dimension finie  $n > 0$  et  $u \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $u^3 + u^2 + u = 0$ .

On notera  $\text{Id}$  l'application identité sur  $E$ .

1. Montrer que  $\text{Im}u \oplus \text{Ker}u = E$ .
2. (a) Énoncer le lemme des noyaux pour deux polynômes.  
(b) En déduire que  $\text{Im}u = \text{Ker}(u^2 + u + \text{Id})$ .
3. On suppose que  $u$  est non bijectif.  
Déterminer les valeurs propres de  $u$ . Justifier la réponse.

**Remarque** : les questions 1. , 2. et 3. peuvent être traitées indépendamment les unes des autres.

**EXERCICE 94 algèbre**

1. Énoncer le théorème de Bézout dans  $\mathbb{Z}$ .
2. Soit  $a$  et  $b$  deux entiers naturels premiers entre eux.  
Soit  $c \in \mathbb{N}$ .  
Prouver que :  $(a|c \text{ et } b|c) \iff ab|c$ .
3. On considère le système  $(S) : \begin{cases} x \equiv 6 & [17] \\ x \equiv 4 & [15] \end{cases}$  dans lequel l'inconnue  $x$  appartient à  $\mathbb{Z}$ .
  - (a) Déterminer une solution particulière  $x_0$  de  $(S)$  dans  $\mathbb{Z}$ .
  - (b) Déduire des questions précédentes la résolution dans  $\mathbb{Z}$  du système  $(S)$ .

**EXERCICE 95 probabilités**

Une urne contient deux boules blanches et huit boules noires.

1. Un joueur tire successivement, avec remise, cinq boules dans cette urne.  
Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 2 points et pour chaque boule noire tirée, il perd 3 points.  
On note  $X$  la variable aléatoire représentant le nombre de boules blanches tirées.  
On note  $Y$  le nombre de points obtenus par le joueur sur une partie.
  - (a) Déterminer la loi de  $X$ , son espérance et sa variance.
  - (b) Déterminer la loi de  $Y$ , son espérance et sa variance.
2. Dans cette question, on suppose que les cinq tirages successifs se font sans remise.
  - (a) Déterminer la loi de  $X$ .
  - (b) Déterminer la loi de  $Y$ .

**EXERCICE 96 probabilités**

Soit  $X$  une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{N}$ , de loi de probabilité donnée par :  $\forall n \in \mathbb{N}, P(X = n) = p_n$ .

La fonction génératrice de  $X$  est notée  $G_X$  et elle est définie par

$$G_X(t) = E[t^X] = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n t^n.$$

1. Prouver que l'intervalle  $] -1, 1[$  est inclus dans l'ensemble de définition de  $G_X$ .
  2. Soit  $X_1$  et  $X_2$  deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans  $\mathbb{N}$ .  
On pose  $S = X_1 + X_2$ .  
Démontrer que  $\forall t \in ] -1, 1[, G_S(t) = G_{X_1}(t)G_{X_2}(t)$  :
    - (a) en utilisant le produit de Cauchy de deux séries entières.
    - (b) en utilisant uniquement la définition de la fonction génératrice.
- Remarque** : on admettra, pour la question suivante, que ce résultat est généralisable à  $n$  variables aléatoires indépendantes à valeurs dans  $\mathbb{N}$ .
3. Un sac contient quatre boules : une boule numérotée 0, deux boules numérotées 1 et une boule numérotée 2.  
Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On effectue  $n$  tirages successifs, avec remise, d'une boule dans ce sac.  
On note  $S_n$  la somme des numéros tirés.  
Soit  $t \in ] -1, 1[$ .  
Déterminer  $G_{S_n}(t)$  puis en déduire la loi de  $S_n$ .

**EXERCICE 97 probabilités**

Soit  $(X, Y)$  un couple de variables aléatoires à valeurs dans  $\mathbb{N}^2$  dont la loi est donnée par :

$$\forall (j, k) \in \mathbb{N}^2, P((X, Y) = (j, k)) = \frac{(j+k) \left(\frac{1}{2}\right)^{j+k}}{e^j k!}.$$

1. Déterminer les lois marginales de  $X$  et de  $Y$ .  
Les variables  $X$  et  $Y$  sont-elles indépendantes ?
2. Prouver que  $E[2^{X+Y}]$  existe et la calculer.

**EXERCICE 98 probabilités**

Un secrétaire effectue, une première fois, un appel téléphonique vers  $n$  correspondants distincts.

On admet que les  $n$  appels constituent  $n$  expériences indépendantes et que, pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant demandé est  $p$  ( $p \in ]0, 1[$ ).

Soit  $X$  la variable aléatoire représentant le nombre de correspondants obtenus.

1. Donner la loi de  $X$ . Justifier.
2. Le secrétaire rappelle une seconde fois, dans les mêmes conditions, chacun des  $n - X$  correspondants qu'il n'a pas pu joindre au cours de la première série d'appels. On note  $Y$  la variable aléatoire représentant le nombre de personnes jointes au cours de la seconde série d'appels.
  - (a) Soit  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ . Déterminer, pour  $k \in \mathbb{N}$ ,  $P(Y = k | X = i)$ .
  - (b) Prouver que  $Z = X + Y$  suit une loi binomiale dont on déterminera le paramètre.  
**Indication** : on pourra utiliser, sans la prouver, l'égalité suivante :  $\binom{n-i}{k-i} \binom{n}{i} = \binom{k}{i} \binom{n}{k}$ .
  - (c) Déterminer l'espérance et la variance de  $Z$ .

**EXERCICE 99 probabilités**

1. Rappeler l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
2. Soit  $(Y_n)$  une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi et telle que  $\forall n \in \mathbb{N}, Y_n \in L^2$ .

$$\text{On pose } S_n = \sum_{k=1}^n Y_k.$$

Prouver que

$$\forall a \in ]0, +\infty[, P\left(\left|\frac{S_n}{n} - E(Y_1)\right| \geq a\right) \leq \frac{V(Y_1)}{na^2}.$$

**3. Application**

On effectue des tirages successifs, avec remise, d'une boule dans une urne contenant 2 boules rouges et 3 boules noires.

À partir de quel nombre de tirages peut-on garantir à plus de 95% que la proportion de boules rouges obtenues restera comprise entre 0,35 et 0,45 ?

**Indication** : considérer la suite  $(Y_i)$  de variables aléatoires de Bernoulli où  $Y_i$  mesure l'issue du  $i^{\text{ème}}$  tirage.

**EXERCICE 100 probabilités**

Soit  $\lambda \in ]0, +\infty[$ .

Soit  $X$  une variable aléatoire discrète à valeurs dans  $\mathbb{N}^*$ .

On suppose que  $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(X = n) = \frac{\lambda}{n(n+1)(n+2)}$ .

- Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle  $R$  définie par  $R(x) = \frac{1}{x(x+1)(x+2)}$ .
- Calculer  $\lambda$ .
- Prouver que  $X$  admet une espérance, puis la calculer.
- $X$  admet-elle une variance? Justifier.

**EXERCICE 101 probabilités**

Dans une zone désertique, un animal erre entre trois points d'eau  $A$ ,  $B$  et  $C$ .

À l'instant  $t = 0$ , il se trouve au point  $A$ .

Quand il a épuisé l'eau du point où il se trouve, il part avec équiprobabilité rejoindre l'un des deux autres points d'eau.

L'eau du point qu'il vient de quitter se régénère alors.

Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

On note  $A_n$  l'événement « l'animal est en  $A$  après son  $n^{\text{ième}}$  trajet ».

On note  $B_n$  l'événement « l'animal est en  $B$  après son  $n^{\text{ième}}$  trajet ».

On note  $C_n$  l'événement « l'animal est en  $C$  après son  $n^{\text{ième}}$  trajet ».

On pose  $P(A_n) = a_n$ ,  $P(B_n) = b_n$  et  $P(C_n) = c_n$ .

- (a) Exprimer, en le justifiant,  $a_{n+1}$  en fonction de  $a_n$ ,  $b_n$  et  $c_n$ .
- (b) Exprimer, de même,  $b_{n+1}$  et  $c_{n+1}$  en fonction de  $a_n$ ,  $b_n$  et  $c_n$ .

2. On considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ .

- (a) Justifier, sans calcul, que la matrice  $A$  est diagonalisable.
- (b) Prouver que  $-\frac{1}{2}$  est valeur propre de  $A$  et déterminer le sous-espace propre associé.
- (c) Déterminer une matrice  $P$  inversible et une matrice  $D$  diagonale de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  telles que  $D = P^{-1}AP$ .

**Remarque** : le calcul de  $P^{-1}$  n'est pas demandé.

- Montrer comment les résultats de la question 2. peuvent être utilisés pour calculer  $a_n$ ,  $b_n$  et  $c_n$  en fonction de  $n$ .  
**Remarque** : aucune expression finalisée de  $a_n$ ,  $b_n$  et  $c_n$  n'est demandée.

**EXERCICE 102 probabilités**

Soit  $N \in \mathbb{N}^*$ .

Soit  $p \in ]0, 1[$ . On pose  $q = 1 - p$ .

On considère  $N$  variables aléatoires  $X_1, X_2, \dots, X_N$  définies sur un même espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , mutuellement indépendantes et de même loi géométrique de paramètre  $p$ .

- Soit  $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$ . Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Déterminer  $P(X_i \leq n)$ , puis  $P(X_i > n)$ .
- On considère la variable aléatoire  $Y$  définie par  $Y = \min_{1 \leq i \leq N} (X_i)$   
c'est-à-dire  $\forall \omega \in \Omega, Y(\omega) = \min(X_1(\omega), \dots, X_N(\omega))$ , min désignant « le plus petit élément de ».  
(a) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Calculer  $P(Y > n)$ .  
En déduire  $P(Y \leq n)$ , puis  $P(Y = n)$ .  
(b) Reconnaître la loi de  $Y$ . En déduire  $E(Y)$ .

**EXERCICE 103 probabilités**

**Remarque** : les questions 1. et 2. sont indépendantes.

Soit  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  un espace probabilisé.

- (a) Soit  $(\lambda_1, \lambda_2) \in ]0, +\infty]^2$ .  
Soit  $X_1$  et  $X_2$  deux variables aléatoires définies sur  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ .  
On suppose que  $X_1$  et  $X_2$  sont indépendantes et suivent des lois de Poisson, de paramètres respectifs  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ .  
Déterminer la loi de  $X_1 + X_2$ .  
(b) En déduire l'espérance et la variance de  $X_1 + X_2$ .
- Soit  $p \in ]0, 1[$ . Soit  $\lambda \in ]0, +\infty[$ .  
Soit  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires définies sur  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ .  
On suppose que  $Y$  suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda$ .  
On suppose que  $X(\Omega) = \mathbb{N}$  et que, pour tout  $m \in \mathbb{N}$ , la loi conditionnelle de  $X$  sachant  $(Y = m)$  est une loi binomiale de paramètre  $(m, p)$ .  
Déterminer la loi de  $X$ .

**EXERCICE 104 probabilités**

Soit  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 3.

On dispose de  $n$  boules numérotées de 1 à  $n$  et d'une boîte formée de trois compartiments identiques également numérotés de 1 à 3.

On lance simultanément les  $n$  boules.

Elles viennent toutes se ranger aléatoirement dans les 3 compartiments.

Chaque compartiment peut éventuellement contenir les  $n$  boules.

On note  $X$  la variable aléatoire qui à chaque expérience aléatoire fait correspondre le nombre de compartiments restés vides.

- Préciser les valeurs prises par  $X$ .
- (a) Déterminer la probabilité  $P(X = 2)$ .  
(b) Finir de déterminer la loi de probabilité de  $X$ .
- (a) Calculer  $E(X)$ .  
(b) Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(X)$ . Interpréter ce résultat.

**EXERCICE 105 probabilités**

- Énoncer et démontrer la formule de Bayes pour un système complet d'événements.
- On dispose de 100 dés dont 25 sont pipés (c'est-à-dire truqués).  
Pour chaque dé pipé, la probabilité d'obtenir le chiffre 6 lors d'un lancer vaut  $\frac{1}{2}$ .  
(a) On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé et on obtient le chiffre 6.  
Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé?  
(b) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .  
On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé  $n$  fois et on obtient  $n$  fois le chiffre 6.  
Quelle est la probabilité  $p_n$  que ce dé soit pipé?  
(c) Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$ . Interpréter ce résultat.

**EXERCICE 106 probabilités**

$X$  et  $Y$  sont deux variables aléatoires indépendantes et à valeurs dans  $\mathbb{N}$ .

Elles suivent la même loi définie par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, P(X = k) = P(Y = k) = pq^k$$

où  $p \in ]0, 1[$  et  $q = 1 - p$ .

On considère alors les variables  $U$  et  $V$  définies par  $U = \sup(X, Y)$  et  $V = \inf(X, Y)$ .

- Déterminer la loi du couple  $(U, V)$ .
- Déterminer la loi marginale de  $U$ .  
On admet que  $V(\Omega) = \mathbb{N}$  et que,

$$\forall n \in \mathbb{N}, P(V = n) = pq^{2n}(1 + q).$$

- Prouver que  $W = V + 1$  suit une loi géométrique.  
En déduire l'espérance de  $V$ .
- $U$  et  $V$  sont-elles indépendantes?

**EXERCICE 107 probabilités**

On dispose de deux urnes  $U_1$  et  $U_2$ .

L'urne  $U_1$  contient deux boules blanches et trois boules noires. L'urne  $U_2$  contient quatre boules blanches et trois boules noires. On effectue des tirages successifs dans les conditions suivantes : on choisit une urne au hasard et on tire une boule dans l'urne choisie.

On note sa couleur et on la remet dans l'urne d'où elle provient. Si la boule tirée était blanche, le tirage suivant se fait dans l'urne  $U_1$ .

Sinon le tirage suivant se fait dans l'urne  $U_2$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $B_n$  l'événement « la boule tirée au  $n^{\text{ième}}$  tirage est blanche » et on pose  $p_n = P(B_n)$ .

1. Calculer  $p_1$ .

2. Prouver que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, p_{n+1} = -\frac{6}{35}p_n + \frac{4}{7}$ .

3. En déduire, pour tout entier naturel  $n$  non nul, la valeur de  $p_n$ .

**EXERCICE 108 probabilités**

Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  et à valeurs dans  $\mathbb{N}$ .

On suppose que la loi du couple  $(X, Y)$  est donnée par :

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, P((X = i) \cap (Y = j)) = \frac{1}{e 2^{i+1} j!}$$

1. Déterminer les lois de  $X$  et de  $Y$ .

2. (a) Prouver que  $1 + X$  suit une loi géométrique et en déduire l'espérance et la variance de  $X$ .

(b) Déterminer l'espérance et la variance de  $Y$ .

3. Les variables  $X$  et  $Y$  sont-elles indépendantes ?

4. Calculer  $P(X = Y)$ .

**EXERCICE 109 probabilités**

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Une urne contient  $n$  boules blanches numérotées de 1 à  $n$  et deux boules noires numérotées 1 et 2.

On effectue le tirage une à une, sans remise, de toutes les boules de l'urne.

On suppose que tous les tirages sont équiprobables.

On note  $X$  la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule blanche.

On note  $Y$  la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule numérotée 1.

1. Déterminer la loi de  $X$ .

2. Déterminer la loi de  $Y$ .

**EXERCICE 110 probabilités**

Soit  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  un espace probabilisé.

1. Soit  $X$  une variable aléatoire définie sur  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  et à valeurs dans  $\mathbb{N}$ .

On considère la série entière  $\sum t^n P(X = n)$  de variable réelle  $t$ .

On note  $R_X$  son rayon de convergence.

(a) Prouver que  $R_X \geq 1$ .

On pose  $G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n P(X = n)$  et on note  $D_{G_X}$

l'ensemble de définition de  $G_X$ .

Justifier que  $[-1, 1] \subset D_{G_X}$ .

Pour tout réel  $t$  fixé de  $[-1, 1]$ , exprimer  $G_X(t)$  sous forme d'une espérance.

(b) Soit  $k \in \mathbb{N}$ .

Exprimer, en justifiant la réponse,  $P(X = k)$  en fonction de  $G_X^{(k)}(0)$ .

2. (a) On suppose que  $X$  suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda$ .

Déterminer  $D_{G_X}$  et, pour tout  $t \in D_{G_X}$ , calculer  $G_X(t)$ .

(b) Soit  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé, indépendantes et suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ . Déterminer, en utilisant les questions précédentes, la loi de  $X + Y$ .

**EXERCICE 111 probabilités**

On admet, dans cet exercice, que :  $\forall q \in \mathbb{N}, \forall x \in ]-1, 1[$ ,

$$\sum_{k \geq q} \binom{k}{q} x^{k-q} \text{ converge et que } \sum_{k=q}^{+\infty} \binom{k}{q} x^{k-q} = \frac{1}{(1-x)^{q+1}}.$$

Soit  $p \in ]0, 1[$ .

Soit  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  un espace probabilisé.

Soit  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires définies sur  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  et à valeurs dans  $\mathbb{N}$ .

On suppose que la loi de probabilité du couple  $(X, Y)$  est donnée par

$$\forall (k, n) \in \mathbb{N}^2, P((X = k) \cap (Y = n)) = \begin{cases} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n p(1-p)^n & \text{si } k \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Vérifier qu'il s'agit bien d'une loi de probabilité.

2. (a) Déterminer la loi de  $Y$ .

(b) Prouver que  $1 + Y$  suit une loi géométrique.

(c) Déterminer l'espérance de  $Y$ .

3. Déterminer la loi de  $X$ .

**EXERCICE 112 probabilités**

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $E$  un ensemble possédant  $n$  éléments.

On désigne par  $\mathcal{P}(E)$  l'ensemble des parties de  $E$ .

1. Déterminer le nombre  $a$  de couples  $(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$  tels que  $A \subset B$ .

2. Déterminer le nombre  $b$  de couples  $(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$  tels que  $A \cap B = \emptyset$ .

3. Déterminer le nombre  $c$  de triplets  $(A, B, C) \in (\mathcal{P}(E))^3$  tels que  $A, B$  et  $C$  soient deux à deux disjoints et vérifient  $A \cup B \cup C = E$ .