École Polytechnique – MP – MPI

Algèbre

275. On note $p(n)$ le nombre de partitions de n pour $n \in \mathbb{N}^*$. Monter que $p(n) \leqslant 2^{n-1}$.

276. Soient $e_r > \cdots > e_2 > e_1 \geqslant 0$ des entiers, $n = \sum_{k=1}^{r} 2^{e_k}$ et $X = \{s \in \mathbb{N};\ 2^s \mid n!\}$.

a) Montrer que $\max X = n - r$.

b) Montrer que le nombre d'entiers k tels que $\binom{n}{k}$ est impair est 2^r.

277. ★★ ***a)*** Montrer que l'équation $a^2 - 2b^2 = 1$ admet une infinité de solutions $(a, b) \in \mathbb{N}^2$. Déterminer l'ensemble des solutions.

b) Que dire de l'ensemble des solutions de $a^2 - 2b^2 = -1$?

278. Si G est un groupe, les éléments d'ordre fini forment-il un sous-groupe ?

279. ***a)*** Trouver deux groupes G_1 et G_2 non isomorphes de cardinal $2023 = 7.17^2$.
b) Soit p premier. Montrer qu'un groupe de cardinal p^2 est isomorphe à $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ ou à $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$.
c) Soient G, H deux groupes finis et $\psi : G \to H$ un morphisme surjectif.
Montrer que $|G| = |H| \times |\operatorname{Ker}\psi|$.
d) On suppose que G est un groupe de cardinal 2023, que $H = \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ et que $\varphi : G \to H$ est un morphisme surjectif. Montrer que G est isomorphe à $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z} \times \operatorname{Ker}\varphi$.
e) Montrer que tout groupe de cardinal 2023 est isomorphe à G_1 ou G_2.

280. ★★ Soit G un groupe fini de neutre 1. Soit φ un automorphisme de G sans point fixe c'est-à-dire tel que : $\forall x \in G, \varphi(x) = x \Rightarrow x = 1$. On note n l'ordre de φ ; c'est le plus petit entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\varphi^n = \mathrm{id}$.
a) Montrer que $\forall x \in G, x\,\varphi(x)\,\varphi^2(x)\,\cdots\,\varphi^{n-1}(x) = 1$.
b) Si $n = 2$, que peut-on dire du groupe G ? Donner un exemple.
c) Si $n = 3$, montrer que, pour tout $x \in G$, x et $\varphi(x)$ commutent.

281. Soient G un groupe et T l'ensemble des éléments de G d'ordre fini.
a) En général, T est-il un sous-groupe de G ?
b) Soit S une partie finie de G stable par conjugaison munie d'une relation d'ordre totale $\leqslant$. Montrer que, pour tous $s_1, \ldots, s_r \in S$, il existe $s'_1, \ldots, s'_r \in S$ tels que $s'_1 \leqslant s'_2 \cdots \leqslant s'_r$ et $s_1 s_2 \cdots s_r = s'_1 s'_2 \cdots s'_r$.
c) Avec la question précédente, montrer que, si T est fini, alors T est un sous-groupe de G.

282. ***a)*** Soit $s : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*, t \mapsto t^{-1}$. Déterminer le groupe engendré par s.
b) On définit les applications $s_1 : (t, u) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \mapsto (t^{-1}, tu) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ et
Montrer que le sous-groupe qu'elles engendrent est isomorphe à $\mathcal{S}_3$.
c) Retrouver le résultat de la question précédente en considérant le quotient A de $(\mathbb{R}^*)^3$ par la relation de colinéarité, la bijection $f : A \to (\mathbb{R}^*)^2$ qui associe à la classe de (x_1, x_2, x_3) le couple $(x_1/x_2, x_2/x_3)$, et enfin les permutations de A induites par $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_2, x_1, x_3)$ et $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1, x_3, x_2)$.
d) Soit $n \geqslant 3$. Déterminer le groupe engendré par les bijections $(s_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de $(\mathbb{R}^*)^n$ définies par $s_i(t_1, ..., t_n) = (t_1, ..., t_{i-2}, t_{i-1} \times t_i, t_i^{-1}, t_i \times t_{i+1}, t_{i+2}, ..., t_n)$ si $1 < i < n$, $s_1(t_1, ..., t_n) = (t_1^{-1}, t_1 \times t_2, t_3, ..., t_n)$ et $s_n(t_1, ..., t_n) = (t_1, ..., t_{n-2}, t_{n-1} \times t_n, t_n^{-1})$.
Ind. Considérer $f : (\mathbb{R}^*)^{n+1} \to (\mathbb{R}^*)^n$ définie par $f(t_1, ..., t_{n+1}) = \left(\dfrac{t_2}{t_1}, ..., \dfrac{t_{n+1}}{t_n}\right)$ et chercher des bijections simples s'_i de $(\mathbb{R}^*)^{n+1}$ telles que $s_i \circ f = f \circ s'_i$.

283. Soit G un groupe fini d'ordre n. On note, pour tout diviseur positif d de n, $n_d(G)$ le nombre d'éléments de G d'ordre d.
a) Montrer que $n = \displaystyle\sum_{d|n} n_d(G)$.
b) Calculer les $n_d(G)$ lorsque G est cyclique.
c) Montrer que, si pour tout diviseur positif d de n, $|\{x \in G,\ x^d = 1\}| \leqslant d$, alors G est cyclique.

d) Soient $\mathbb{K}$ un corps et G un sous-groupe fini de $\mathbb{K}^*$. Montrer que G est cyclique.

284. On pose $\mathbb{Q}[i] = \{a + ib\ ;\ a, b \in \mathbb{Q}\}$.
a) Montrer que $\mathbb{Q}[i]$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$.
b) Déterminer les éléments de $\mathbb{Q}[i] \setminus \{0\}$ qui sont d'ordre fini.

285. ***a)*** Soient $\mathbb{K}$ un corps, $(a, b) \in \mathbb{K}^2$, $P = X^2 - aX - b$. On considère la $\mathbb{K}$-algèbre A admettant une base sur $\mathbb{K}$ de la forme $(1, x)$ avec $x^2 = ax + b$. À quelle condition cette algèbre est-elle un corps ?
b) On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{F}_p$ où p est un nombre premier. Combien de $\mathbb{F}_p$-algèbres non isomorphes peut-on obtenir ainsi ?

286. ★★ Soit p un nombre premier. On suppose que, pour toute $\mathbb{F}_p$-algèbre A, il existe un endomorphisme u_A de A de sorte que, pour tout couple (A, B) de $\mathbb{F}_p$-algèbres et tout morphisme τ de $\mathbb{F}_p$-algèbres de A dans B, on ait $\tau \circ u_A = u_B \circ \tau$. Que dire des u_A ?

287. Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $P_n = 1 + X + \cdots + X^{n-1}$.
Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} P_k = 2^{n-1} P_n \left(\frac{X+1}{2}\right)$.

288. ***a)*** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme $S_n \in \mathbb{Q}[X]$ tel que $\forall N \in \mathbb{N},\ S_n(N) = \displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} k^n$. Dans la suite, on note b_n le coefficient de S_n devant X.
b) Donner une relation de récurrence exprimant b_n en fonction de $b_0, \ldots, b_{n-1}$.
c) Pour $n \geqslant 1$, donner une relation entre S_n'' et S_{n-1}'.
d) En déduire une expression explicite des coefficients de S_n en fonction de $b_0, \ldots, b_n$.

289. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $q \in \mathbb{C}$ tel que $0 < |q| < 1$.
On pose $F : z \in \mathbb{C}^* \mapsto \displaystyle\prod_{k=1}^{n} (1 + q^{2k-1} z)(1 + q^{2k-1} z^{-1})$.
a) Montrer qu'il existe une unique liste $(c_0, \ldots, c_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ telle que
$\forall z \in \mathbb{C}^*,\ F(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} c_k (z^k + z^{-k})$.
b) Donner une relation de récurrence entre c_k et c_{k+1}, et en déduire une expression de c_k à l'aide d'un produit. *Ind.* Exprimer $F(q^2 z)$ en fonction de $F(z)$.

290. Soit p un nombre premier. Trouver tous les entiers $n \in \mathbb{N}$ tels que $(X + Y)^n$ soit congru à $X^n + Y^n$ modulo p.

291. Soit $f \in \mathbb{C}[X]$ tel que $f(0) \neq 0$. Soit $(k, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que X^n divise $P^k - f$.

292. Soit p un nombre premier. Pour deux polynômes P, Q dans $\mathbb{Z}[X, Y]$, on note $P \equiv Q\ [p]$ pour signifier que $P - Q$ a tous ses coefficients (devant les $X^k Y^l$) divisibles par p. On adopte une définition similaire pour les polynômes à une indéterminée.
a) Exhiber un polynôme $P \in \mathbb{Z}[T]$ tel que $P(XY) \equiv P(X)P(Y)\ [p]$, $P \not\equiv T\ [p]$ et $P \not\equiv 0\ [p]$.
b) Exhiber un polynôme $P \in \mathbb{Z}[T]$ tel que $P(XY) \equiv P(X)P(Y)\ [p]$, $P(X+Y) \equiv P(X) + P(Y)\ [p]$, $P \not\equiv T\ [p]$ et $P \not\equiv 0\ [p]$.
c) Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{Z}[T]$ tels que $P(XY) \equiv P(X)P(Y)\ [p]$ et $P(X+Y) \equiv P(X) + P(Y)\ [p]$.

293. Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ des complexes deux à deux distincts. Soient $n_1, \ldots, n_r$ dans $\mathbb{N}^*$ et $H_1, \ldots, H_r$ dans $\mathbb{C}[X]$. Montrer qu'il existe un $H \in \mathbb{C}[X]$ tel que $(X - \alpha_i)^{n_i}$ divise $H - H_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

294. ***a)*** Soient $N_1, \ldots, N_r$ des entiers premiers entre eux deux à deux, et $f_1, \ldots, f_r$ des entiers. Montrer qu'il existe un entier F tel que $F \equiv f_i\ [N_i]$ pour tout $i \in [\![1, r]\!]$.
b) Soient $N_1, \ldots, N_r$ des éléments de $\mathbb{C}[X]$ premiers entre eux deux à deux, et $f_1, \ldots, f_r$ des éléments de $\mathbb{C}[X]$. Montrer qu'il existe $F \in \mathbb{C}[X]$ tel que N_i divise $F - f_i$ pour tout $i \in [\![1, r]\!]$.
c) Soient f, g deux éléments de $\mathbb{C}[X]$ premiers entre eux, et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe $h \in \mathbb{C}[X]$ tel que g divise $h^n - f$.

295. Soit $n \in \mathbb{N}$. Le polynôme $X^{n+1} - nX^n + 1$ est-il irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$?

296. Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ un polynôme unitaire dont les racines complexes ont un module inférieur ou égal à 1. Montrer que les racines de P sont des racines de l'unité.

297. Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ possédant n racines distinctes $x_1, \ldots, x_n$. On écrit $P^2 + 1 = Q_1 \ldots Q_r$ où les Q_i sont dans $\mathbb{Z}[X]$. On pose $R = \displaystyle\sum_{i=1}^{r} {Q_i}^2 - r$.
a) Montrer que les x_k sont racines au moins doubles de R.
b) En déduire qu'il existe $i \in \{1, \ldots, r\}$ tel que $\deg(Q_i) \geqslant 2 \left\lfloor \dfrac{n+1}{2} \right\rfloor$.

298. On se propose de donner une preuve du théorème de d'Alembert-Gauss.
a) Montrer qu'il suffit de montrer le théorème pour les polynômes à coefficients réels. Dans la suite, on écrira le degré d'un polynôme non constant de $\mathbb{R}[X]$ sous la forme $2^n q$, où $n \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}$ est impair. La preuve se fait par récurrence sur n.
b) Montrer le théorème dans le cas où $n = 0$.
Dans la suite, on suppose le résultat vrai jusqu'au rang n, où $n \geqslant 1$ est fixé.
c) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $2^n q$, où $n \geqslant 1$. On admet l'existence d'une extension $\mathbb{K}$ de $\mathbb{C}$ sur laquelle P est scindé, et on note $x_1, \ldots, x_d$ ses racines dans $\mathbb{K}$, distinctes ou non. Ayant fixé $c \in \mathbb{R}$, on pose $y_{ij}(c) = x_i + x_j + c x_i x_j$ pour $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant d$.
d) Montrer que le polynôme $Q_c = \displaystyle\prod_{i \leqslant j} (X - y_{ij}(c))$ est à coefficients réels.

e) Montrer que l'un des $y_{ij}(c)$ est élément de $\mathbb{C}$.
f) Montrer finalement que l'un des x_i est élément de $\mathbb{C}$.

299. Soient $F \in \mathbb{C}(X)$ et $q \in \mathbb{C}^*$.
a) On suppose que q n'est pas une racine de l'unité. Montrer qu'il existe au plus deux fractions rationnelles $G \in \mathbb{C}(X)$ telles que $F = 1 + G(qX)\,G(q^{-1}X)\,F(q^{-2}X)$, et que s'il y en a deux alors elles sont opposées l'une de l'autre.
b) Montrer que le résultat précédent peut tomber en défaut si l'on ne suppose plus que q n'est pas une racine de l'unité.

300. Soit G un groupe, $\mathcal{M}$ l'ensemble des morphismes de groupes de G dans $\mathbb{C}^*$. Montrer que $\mathcal{M}$ est une partie libre du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^G$.

301. On note C l'ensemble des matrices de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont non nuls. Pour $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant 2} \in C$, on pose $J(M) = \left(\dfrac{1}{m_{i,j}}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant 2}$. Soit $\varphi : C \to C$ qui à M associe $J(M^{-1})$. Montrer que φ est bien définie et trouver à quelle condition sur $M \in C$ la suite $\left(\varphi^n(M)\right)_{n\geqslant 1}$ est stationnaire, ou bien périodique à partir d'un certain rang.

302. Soit $R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ non nulle et $M = I_n + 3R$. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $M^k \neq I_n$.

303. $\star$ Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, $p, u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que p est un projecteur et que $pu + up = u$. Montrer que $\mathrm{tr}(u) = 0$.

304. Pour $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, on pose $\varphi_{A,B} : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto AMB$.
Soit $T = \{\varphi_{A,B},\ (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2\}$.
a) L'ensemble T est-il un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ?
b) Montrer que l'espace vectoriel engendré par T est $\mathcal{L}\left(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\right)$.

305. Pour une matrice de projecteur $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on pose $R_P = \det(I_n + (X-1)P)$.
a) Calculer R_P en fonction de P.
b) Soient P, Q des matrices de projecteur dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $PQ = QP = 0$. Montrer que $R_P R_Q = R_{P+Q}$.
c) Soit φ un automorphisme de la $\mathbb{K}$-algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
i) Montrer que $\varphi(E_{i,i})$ est un projecteur de rang 1, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.
ii) Que dire du rang de $\varphi(E_{i,j})$, pour i, j dans $[\![1, n]\!]$?
iii) Montrer que $\mathbb{K}^n = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{n} \mathrm{Im}\,\varphi(E_{i,1})$.

306. Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$ et V un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe une application $q : V \to \mathbb{C}$ telle que $u^2 = q(u)\,\mathrm{id}$ pour tout $u \in V$.
a) Monter que, pour tous $u, v \in V$, il existe $B(u, v) \in \mathbb{C}$ tel que $uv + vu = 2B(u, v)\,\mathrm{id}_E$.
b) Montrer que B est une forme bilinéaire.

c) Soient $d \geqslant 1$ et $u_1, \dots, u_d \in V$ tels que $B(u_i, u_j) = -\delta_{ij}$ pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$. Montrer que $(u_1, \dots, u_d)$ est libre.
d) Soient $d \geqslant 2$ et $u_1, \dots, u_d \in V$ tels que $B(u_i, u_j) = -\delta_{ij}$ pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$. Montrer que les u_i sont de trace nulle, et que $\dim E$ est paire.

307. Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$. Soit $\phi \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$. On suppose que $\phi(I_n)$ est inversible et que $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\phi(AB) = \phi(A)\,\phi(B)$. Montrer qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ tel que : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\phi(A) = PAP^{-1}$.

308. ***a)*** Caractériser les endomorphismes ϕ de $\mathbb{C}(X)$ vérifiant $(*)$:
$\forall F_1,\, F_2 \in \mathbb{C}(X)$, $\phi(F_1F_2) = \phi(F_1)\,\phi(F_2)$.
b) Déterminer les automorphismes de $\mathbb{C}(X)$ vérifiant $(*)$.

309. Soit $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que : $\forall i, j$, $m_{i,j} \geqslant 0$ et $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} m_{i,j} = 1$.
a) Montrer que 1 est valeur propre de M et que tout valeur propre de M est de module $\leqslant 1$.
b) On note $\mu = \min_{1\leqslant i\leqslant n} m_{i,i}$. Montrer que le spectre de M est inclus dans le disque de centre μ et de rayon $1 - \mu$.
c) On suppose que $\mu > 0$ et que 1 est valeur propre de multiplicité 1 dans χ_M. Montrer que $(M^p)_{p\geqslant 1}$ converge vers une matrice de rang 1 dont toutes les lignes sont égales.
c) On se donne trois réels strictement positifs p, q, r tels que $p + q + r = 1$. On considère la matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $b_{i,i} = r$, $b_{i,i+1} = q$ si $i > 2$, $b_{1,2} = p + q$, $b_{i+1,i} = p$ si $i < n - 1$, $b_{n,n-1} = p + q$, et tous les autres coefficients sont nuls. Montrer que 1 est valeur propre simple de B, et expliciter la limite de $(B^k)_{k\geqslant 0}$.

310. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E)$ cyclique, F un sous-espace de E stable par f. Montrer que l'induit par f sur F est cyclique.

311. Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, $a, b \in \mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe $f \in \mathcal{L}(\mathbb{C}, E)$ et $v \in \mathcal{L}(E, \mathbb{C})$ telles que $ab - ba = fv$.
a) Que peut-on dire de $\det(ab - ba)$?
b) Montrer que a et b sont cotrigonalisables.
c) À quelle condition sur $u \in \mathcal{L}(E)$ existe-t-il $w \in \mathcal{L}(E)$ tel que $uw - wv$ soit de rang 1 ?

312. Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que, pour tout vecteur $x \in E$, l'ensemble $\{f^n(x),\ n \in \mathbb{N}\}$ est fini.
a) Montrer que, si $f \in \mathrm{GL}(E)$, il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^k = \mathrm{id}$.
b) On revient au cas général. Montrer l'existence de $k \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$ tels que $f^{p+k} = f^p$.

313. Pour $\sigma \in \mathcal{S}_n$, on note $P_\sigma \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice de permutation associée à σ. Montrer que, si σ et σ' sont dans $\mathcal{S}_n$, σ et σ' sont conjuguées dans $\mathcal{S}_n$ si et seulement si P_σ et $P_{\sigma'}$ sont semblables.

314. ★ Soient p et q deux projecteurs orthogonaux dans un espace euclidien E.
a) Montrer que $p \circ q \circ p$ est diagonalisable.
b) Montrer que $E = \mathrm{Im}\, p + \mathrm{Ker}\, q + (\mathrm{Im}\, q \cap \mathrm{Ker}\, p)$.

c) Montrer que $p \circ q$ est diagonalisable.
d) Montrer que le spectre de $p \circ q$ est inclus dans $[0,1]$.

315. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $L_n = D^n((X^2-1)^n)$, où D désigne l'opérateur de dérivation des polynômes.
a) Déterminer le degré de L_n. Montrer que $\displaystyle\int_{-1}^{1} L_n(t)\,P(t)\,\mathrm{d}t = 0$ pour tout $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.
b) Montrer que L_n est scindé à racines réelles simples $x_1 < \cdots < x_n$ avec $x_1 > -1$ et $x_n < 1$.
c) Montrer qu'il existe des réels $a_1, \ldots, a_n$ tels que
$$\forall P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X],\ \int_{-1}^{1} P(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n} a_k P(x_k).$$

316. ★★ Soit $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$. On note $S^2 = \left\{x \in \mathbb{R}^3,\ \|x\| = 1\right\}$ où $\|\ \|$ désigne la norme euclidienne canonique. Montrer l'équivalence entre les propositions suivantes.
(i) $\alpha = 2$.
(ii) $\forall n \geqslant 1, \forall\,(a_1,\ldots,a_n,b_1,\ldots,b_n,c_1,\ldots,c_n) \in (S^2)^{3n}$, $\exists p \in S^2$ tel que
$$\sum_{i=1}^{n} \|p-a_i\|^{\alpha} = \sum_{i=1}^{n} \|p-b_i\|^{\alpha} = \sum_{i=1}^{n} \|p-c_i\|^{\alpha}.$$

317. Existe-t-il $A \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{Q})$ telle qu'il n'existe pas $B \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{Q})$ vérifiant $B^2 = A$?

318. Soient E un espace vectoriel euclidien, $f \in \mathcal{S}(E)$, $\Phi : \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ v & \mapsto & \|f(v)\|^2 - \langle f(v), v\rangle^2 \end{array}$.
Donner une condition nécessaire et suffisante pour que Φ admette un extremum.

319. On considère dans $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ les matrices $J = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$.
a) Soit $K \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ tel que $K^2 = -I$. Montrer que $K^T J \in \mathcal{S}_{2n}(\mathbb{R})$ si et seulement si $J = K^T J K$.
b) On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des $K \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ telles que $K^2 = -I$ et $K^T J \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Soit $K \in \mathcal{C}$. Montrer que $K + J$ est inversible et que $(K+J)^{-1}(K-J)$ est symétrique.
c) Soit $K \in \mathcal{C}$. On pose $S = (K+J)^{-1}(K-J)$. Montrer que $SJ + JS = 0$.

320. Montrer que $\forall (A,B) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})^2$, $\det(A+B) \geqslant \max(\det(A), \det(B))$.

321. Soient $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
a) Montrer que $\mathrm{tr}\left(e^A e^B\right) > 0$.
b) Montrer que $\mathrm{tr}\left(e^{A+B}\right) \leqslant \mathrm{tr}\left(e^A e^B\right)$.

322. ★★ Soient $t_1, \ldots, t_n$ des réels.
a) Montrer que la matrice $A = (t_i t_j)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est dans $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
b) On suppose $0 \leqslant t_1 \leqslant \cdots \leqslant t_n$. Montrer que la matrice $B = (\min(t_i, t_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est dans $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
c) On suppose $0 \leqslant t_1 \leqslant \cdots \leqslant t_n \leqslant 1$. Montrer que $M = B - A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

323. On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire standard et on note $\|\!|A|\!\| = \sup_{X \in B_f(0,1)} \|AX\|$ pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
a) Montrer que $\|\!|\ |\!\|$ définit une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
b) Montrer que $\|\!|A|\!\| = \sup_{(X,Y) \in B_f(0,1)^2} |\langle AX, Y\rangle|$.
c) On prend $A = \left(\dfrac{1}{i+j+1}\right)_{0 \leqslant i,j \leqslant n}$ dans $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$. Pour $X = (x_0 \cdots x_n)^T$ et $Y = (y_0 \cdots y_n)^T$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$, donner une interprétation de $\langle AX, Y\rangle$ à l'aide d'une intégrale faisant intervenir $P : t \in [0, 2\pi] \mapsto \sum_{k=0}^{n} x_k e^{ikt}$ et $Q : t \in [0, 2\pi] \mapsto \sum_{k=0}^{n} y_k e^{ikt}$.
d) En déduire que $\|\!|A|\!\| \leqslant 2\pi$.
e) Montrer que l'on a même $\|\!|A|\!\| \leqslant \pi$.

Analyse

324. Trouver $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, discontinue en $(0,0)$, dont la restriction à toute droite passant par $(0,0)$ est continue.

325. ★ Soit $K \subset \mathbb{R}^2$ un convexe fermé non vide.
a) On suppose K borné. Montrer que K s'écrit comme intersection de carrés fermés.
b) On suppose K non borné et $K \neq \mathbb{R}^2$. Donner des exemples de tels convexes. Montrer que si K contient deux droites, celles-ci sont parallèles.
c) On suppose toujours K non borné. Montrer que K contient une demi-droite.

326. Déterminer les endomorphismes continus du groupe $\mathbb{C}^*$.

327. Soit $d \in \mathbb{N}^*$. On munit $\mathbb{R}^d$ de la structure euclidienne canonique. On définit une norme sur $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ en posant, pour $M \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$, $\|M\| = \sup\left\{\|Mx\| \ ; \ x \in \mathbb{R}^d, \ \|x\| = 1\right\}$.
a) Soient $A, B \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$. Montrer que $\|AB\| \leqslant \|A\| \times \|B\|$.
b) Soit $(u_n)_{n \geqslant 0}$ une suite réelle. On suppose que la série de terme général $|u_n - 1|$ converge. Montrer que la suite de terme général $\prod_{k=0}^{n} u_k$ converge.
Soit $(M_n)_{n \geqslant 0}$ une suite de matrices de $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$. On suppose que la série de terme général $\|M_n - I_d\|$ converge. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $B_n = M_0 \times M_1 \times \cdots \times M_n$.
c) Montrer que la suite $(B_n)_{n \geqslant 0}$ converge.
d) Soit σ une permutation de $\mathbb{N}$. Que peut-on dire de la suite de terme général $M_{\sigma(0)} \times \cdots \times M_{\sigma(n)}$?
e) Soit $E = \left\{\prod_{k=0}^{+\infty} M_{\sigma(k)}, \ \sigma \in \mathcal{S}(\mathbb{N})\right\}$. Existe-t-il une suite de matrices pour laquelle E n'est pas fermé ?
f) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Existe-il $(M_n)_{n \geqslant 0} \in (\mathcal{M}_d(\mathbb{R}))^{\mathbb{N}}$ telle que E possède exactement k composantes connexes ?

328. On définit la longueur d'un intervalle borné I de bornes a et b par $\ell(I) = |b - a|$.

a) Soient $N \in \mathbb{N}^*$, $I_1, \dots, I_N$ des intervalles bornés de $\mathbb{R}$ tels que $[0,1] \subset \bigcup_{i=1}^{N} I_i$. Que peut-on dire de $\sum_{i=1}^{N} \ell(I_i)$?
b) Soit $\delta : [0,1] \to \mathbb{R}^{+*}$. Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant x_1 < x_2 < \cdots < x_p = 1$, $t_1, \dots, t_p \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, $x_{q-1} \leqslant t_q \leqslant x_q$ et $x_q - x_{q-1} \leqslant \delta(t_q)$.
c) Soit $(I_n)_{n\geqslant 1}$ une suite d'intervalles bornés de $\mathbb{R}$ telle que $[0,1] \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} I_n$. Que peut-on dire de $\sum_{n=1}^{+\infty} \ell(I_n)$?

329. Dans $\mathbb{R}^2$, on note D le disque unité fermé pour la norme infinie, C la sphère unité pour la norme infinie. On cherche à montrer qu'il n'existe pas de fonction continue $r : D \to C$ telle que la restriction de r à C soit l'identité.
a) On considère une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, antisymétrique (i.e. $f(x,y) = -f(y,x)$), et $A = (a_{i,j})_{i,j\leqslant n}$ une matrice réelle telle que : $\forall i,j \in [\![1, n-1]\!]$,
$f(a_{i,j}, a_{i+1,j}) + f(a_{i+1,j}, a_{i+1,j+1}) + f(a_{i+1,j+1}, a_{i,j+1}) + f(a_{i,j+1}, a_{i,j}) = 0$.
Montrer que :

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(a_{i,1}, a_{i+1,1}) + \sum_{j=0}^{n-1} f(a_{n,j}, a_{n,j+1}) + \sum_{i=0}^{n-1} f(a_{i+1,n}, a_{i,n}) + \sum_{j=0}^{n-1} f(a_{1,j+1}, a_{1,j}) = 0$$

b) Soit $M \in \mathcal{M}_{n+2}(\mathbb{R})$ une matrice de la forme $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & & & & 3 \\ \vdots & & M' & & \vdots \\ 1 & & & & 3 \\ 1 & 2 & \cdots & \cdots & 2 \end{pmatrix}$ où $M' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est à coefficients dans $\{1,2,3\}$. Montrer qu'au moins un des petits carrés de M comporte trois valeurs différentes.
c) Montrer qu'on dispose d'un $\eta > 0$ tel que, pour tous x, $y \in D$ vérifiant $\|x-y\|_\infty \leqslant \eta$, on a $\|r(x) - r(y)\| \leqslant \dfrac{1}{10}$.
d) Soit alors $n \in \mathbb{N}$ tel que $\dfrac{2}{n-1} \leqslant \eta$. Pour tous $i, j \in [\![1,n]\!]$, on pose
$v_{i,j} = \left(1 - 2\dfrac{i-1}{n-1}, 1 - 2\dfrac{j-1}{n-1}\right)$.
Montrer que, pour tous $i, j \in [\![1, n-1]\!]$, $v_{i,j}, v_{i+1,j}, v_{i+1,j+1}, v_{i,j+1}$ sont contenus dans une boule de rayon $1/10$.
e) En utilisant une fonction bien choisie de C dans $\{1,2,3\}$, aboutir à une contradiction et conclure.
f) Utiliser ce résultat pour montrer que toute fonction continue de D dans D admet un point fixe.

330. $^\bigstar$ On dit qu'une famille $(D_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ de disques fermés de $\mathbb{R}^2$ vérifie $(\mathcal{P})$ si

i) pour tous $s, t \in \mathbb{R}^+$ distincts, D_s et D_t ont des centres distincts,
ii) pour tous $s, t \in \mathbb{R}^+$ tels que $s < t$, $D_s \subset D_t$.
a) Existe-t-il une telle famille ?
b) Soit $A : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^2$ une fonction C^1 et injective. Existe-t-il une famille $(D_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ vérifiant $(\mathcal{P})$ telle que, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $A(t)$ soit le centre de D_t ?
c) Le résultat subsiste-t-il si A est seulement supposée continue ?

331. Dans tout l'énoncé, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On se donne une $\mathbb{K}$-algèbre A de dimension finie, et on identifie $\mathbb{K}$ à une sous-algèbre de A via $\lambda \mapsto \lambda.1_A$. On suppose donnée sur A une norme multiplicative $\|\ \|$, autrement dit une norme vérifiant $\forall (a, b) \in A^2,\ \|ab\| = \|a\|\,\|b\|$. Jusqu'à la question ***e)*** incluse, on suppose $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
a) Soit $x \in A$. Montrer qu'il existe un $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $\forall z \in \mathbb{C},\ \|z_0 - x\| \leqslant \|z - x\|$.
b) On suppose $\|a\| = 2$ pour $a = z_0 - x$. Montrer que $\|a - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\| \geqslant 2$ pour tout $(n, k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$.
c) En déduire que $\|a - 1\| = 2$.
d) En déduire que $A = \mathbb{C}$.
e) Retrouver le résultat de la question précédente en utilisant des polynômes annulateurs.
Dans la suite, on suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.
f) Est-ce que A est nécessairement égale à $\mathbb{R}$?
g) On admet qu'il existe une $\mathbb{R}$-algèbre $\mathbb{H}$ ayant une base de la forme $(1, i, j, k)$ où i, j, k anticommutent deux à deux et $i^2 = j^2 = k^2 = -1$. On considère la symétrie $x \mapsto \overline{x}$ par rapport à $\mathbb{R}$ parallèlement à $\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(i, j, k)$, et on considère la norme $N : q \mapsto \sqrt{\overline{q}q}$. Montrer que N est bien définie, est effectivement une norme, et qu'elle est multiplicative.
h) Montrer que A est isomorphe, en tant que $\mathbb{R}$-algèbre, à $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$.

332. ★★ Soient a, b, c des entiers naturels non nuls. Montrer qu'il existe un $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\sqrt{n^4 + an^2 + bn + c} \notin \mathbb{N}$.

333. Pour $n \geqslant 2$, on note $\ell_n = \min \left\{ k \in [\![1, n]\!],\ \prod_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{i}{n}\right) \leqslant \frac{1}{2} \right\}$.
a) Montrer que $\ell_n = o(n)$.
b) Donner un équivalent de ℓ_n.

334. ★ Soient (a_n) et (b_n), deux suites réelles positives telles que la série de terme général b_n converge, que la série de terme général na_n diverge et que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 1$.
a) Montrer qu'il existe une unique suite (u_n) telle que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = b_n + \sum_{k=0}^{n} u_k a_{n-k}$.
b) Montrer que (u_n) est bornée.
c) Montrer que, si (u_n) converge, alors sa limite est 0.

335. On considère la suite réelle définie par $x_0 = 2$ et $x_{n+1} = x_n + \dfrac{x_n^2}{n^2}$ pour tout $n \geqslant 1$. Montrer qu'il existe un réel $C > 1$ tel que $x_n \sim C^{2^n} n^2$ quand $n \to +\infty$.

336. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ la suite réelle définie par $a_0 = 1, a_1 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_{n+1} = 2a_n + \dfrac{a_{n-1}}{n^2}$. Donner un équivalent de a_n.

337. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $a_0 = \pi/2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = \sin(a_n)$. Nature de la série de terme général ${a_n}^2$?

338. Soit $\sum u_n$ une série convergente de réels positifs. Existe-t-il une suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$ de réels positifs tendant vers $+\infty$ telle que la série $\sum u_n v_n$ converge ?

339. Soit (x_n) une suite réelle. On suppose que $(x_n y_n)$ est sommable pour toute suite réelle (y_n) de carré sommable. Montrer que (x_n) est de carré sommable.

340. Soit σ une permutation de $\mathbb{N}^*$. Déterminer la nature de la série $\sum \dfrac{\sigma(n)}{n^2}$.

341. Étudier la convergence de la série de terme général $\dfrac{\sin(\ln n)}{n}$.

342. On pose $u_n = -2\sqrt{n} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ pour tout $n \geqslant 1$.

a) Montrer que u converge vers une limite ℓ.

b) Montrer que $\ell = -(\sqrt{2}+1)\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$.

c) Montrer que $u_n = \ell + \dfrac{1}{2n^{1/2}} + O\Big(\dfrac{1}{n^{3/2}}\Big)$.

d) Montrer que $\ell = -\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\,(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})^2}$.

e) Étudier les variations de u.

f) Déterminer un développement asymptotique semblable à celui de la question ***c)*** pour la suite de terme général $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$.

g) Soit $\alpha \in \,]0,1[$. Donner un développement asymptotique à trois termes pour $w_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$.

343. ★★ Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$, strictement croissante et bijective. Montrer que les séries $\sum \dfrac{1}{f(n)}$ et $\sum \dfrac{f^{-1}(n)}{n^2}$ sont de même nature.

344. ***a)*** Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{m}}{(m+n)\sqrt{n}} \leqslant \pi$.

Ind. Dans $\mathbb{R}^2$, considérer les points $x_n = (\sqrt{m}, \sqrt{n})$ et l'intersection r_n du cercle $C(0, \sqrt{m})$ avec le segment $[0, x_n]$.

b) Soient $(a_n)_{n\geqslant 1}$ et $(b_n)_{n\geqslant 1}$ deux suites de carré sommable et à termes positifs. On note $A=\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2$ et $B=\sum_{n=1}^{+\infty} b_n^2$. Montrer que $\displaystyle\sum_{(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2} \frac{a_m b_n}{m+n} \leqslant \pi\sqrt{AB}$.

345. ***a)*** Trouver les fonctions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ monotones telles que $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f(xy)=f(x)\,f(y)$.
b) Trouver les fonctions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ monotones telles que $\forall x\neq y\in\mathbb{R},\ f\left(\dfrac{x+y}{x-y}\right)=\dfrac{f(x)+f(y)}{f(x)-f(y)}$.

346. ★ Que dire d'une fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue, 1-périodique et $\sqrt{2}$-périodique ?

347. Trouver les fonctions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que $|f'|+|f+1|\leqslant 1$.

348. Pour $x\geqslant 1$, on note $\Theta(x)=\displaystyle\sum_{p\in\mathcal{P},\ p\leqslant x}\ln(p)$. Montrer que $\Theta(x)\underset{x\to+\infty}{=}O(x)$.

349. Soit F un fermé de $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une fonction f de classe C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $F=f^{-1}(\{0\})$.

350. Soit $(x_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de points de $[0,1]^2$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que, pour toute permutation σ de $\mathbb{N}$, il existe une fonction continue $f:[0,1]\to[0,1]^2$ et une suite strictement croissante $(t_n)_{n\geqslant 0}$ d'éléments de $[0,1]$ telle que $f(t_n)=x_{\sigma(n)}$ pour tout $n\geqslant 0$.

351. Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{1+t^2}\mathrm{d}t$.

352. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on note L_n la dérivée n-ième de $(X^2-1)^n$.
a) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Montrer que : $\forall P\in\mathbb{R}_{n-1}[X],\ \displaystyle\int_{-1}^1 PL_n=0$.
b) Montrer que L_n possède n racines distinctes $x_1<x_2<\cdots<x_n$ dans $]-1,1[$.
c) Montrer qu'il existe $\alpha_1,\dots,\alpha_n\in\mathbb{R}$ tels que : $\forall P\in\mathbb{R}_{2n-1}[X],\ \displaystyle\int_{-1}^1 P=\sum_{i=1}^n \alpha_i P(x_i)$.

353. Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $I_n=\displaystyle\sum_{k=0}^n (-1)^k\binom{n}{k}^3$.
a) On suppose n impair. Montrer que $I_n=0$.
b) On suppose n multiple de 4. Montrer que $I_n>0$.
c) Montrer, pour tout $n\in\mathbb{N}$, l'égalité
$$I_{2n}=(-1)^n\frac{4^{3n-1}}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin^{2n}(x)\,\sin^{2n}(y)\,\sin^{2n}(x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

354. ***a)*** Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et $f:[0,2\pi]\to\mathbb{R}$ continue. Montrer que

$$H_n : (a_0, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^{2n+1} \mapsto \int_0^{2\pi} \left(a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)) - f(t) \right)^2 \mathrm{d}t$$

admet un minimum, atteint en un unique point, et donner une expression simple de ce point en fonction de f.

b) Déterminer la limite de $\min H_n$ quand n tend vers $+\infty$.

355. Justifier l'existence et calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{2 + \lfloor \frac{1}{t} \rfloor}$.

356. ★★ Soit $f : x \in \mathbb{R} \mapsto e^{\frac{x^2}{2}} \displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \, \mathrm{d}t$.

a) Montrer que $f(x) < \dfrac{1}{x}$ pour tout $x > 0$.

a) Montrer que $f(x) > \dfrac{\sqrt{x^2+4} - x}{2}$ pour tout $x > 0$.

a) Donner un développement limité à quatre termes de $f(x)$ quand $x \to +\infty$.

357. ★★ Soient $u, v \in \mathbb{R}$. Pour $r \in \mathbb{R}^+ \setminus \{|u|, |v|\}$, calculer

$I_r(u, v) = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{(u - re^{i\theta})(v - re^{i\theta})}$.

358. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ intégrable , de classe $\mathcal{C}^1$, telle que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \, \mathrm{d}t = 1$. On suppose que f' s'annule en un unique $M \in \mathbb{R}$.

a) Donner le tableau de variations de f. Montrer qu'il existe un unique $m \in \mathbb{R}$ tel que $\displaystyle\int_{-\infty}^{m} f(t) \mathrm{d}t = \frac{1}{2}$.

b) Montrer que, pour tout $\ell \in]0, f(M)[$ il existe un unique couple $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x_1 < M < x_2$ et $f(x_1) = f(x_2) = \ell$.

c) Supposons que, pour tout $\ell \in]0, f(M)[$, $f'(x_1) + f'(x_2) > 0$. Montrer que $m > M$.

359. ***a)*** Soient a et b deux suites réelles telles que $b - a$ converge vers 0. Soit $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que, pour tout $m \geqslant 0$, il existe un entier N_m tel que $\forall n \geqslant N_m,\ a_m \leqslant f_n \leqslant b_m$. Montrer que (f_m) converge uniformément vers une fonction constante.

b) On note H l'ensemble des fonctions continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ strictement croissantes et telles que $f(x+1) = f(x) + 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que H forme un groupe pour la composition des fonctions.

c) Soit $f \in H$. Montrer que $\sup\{f(x) - x,\ x \in \mathbb{R}\} < 1 + \inf\{f(x) - x,\ x \in \mathbb{R}\}$.

360. On note F l'ensemble des fonctions de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$, C l'ensemble des fonctions continues de F. On note aussi $I = \{f \in F \ ; \ \forall a \in [0, 1],\ \{x \in [0, 1],\ f(x) \leqslant a\} \text{ est fermé}\}$ et $S = \{f \in F \ ; \ \forall a \in [0, 1],\ \{x \in [0, 1],\ f(x) \geqslant a\} \text{ est fermé}\}$.

Pour $f \in F$ et $n \in \mathbb{N}$, soit $L_n(f) : x \in [0, 1] \mapsto \displaystyle\inf_{y \in [0,1]} (f(y) + n|x - y|) \in [0, 1]$.

a) Montrer que $C = I \cap S$.

b) Montrer que, si $f \in F$, $L_n(f)$ est une suite croissante d'applications continues.
c) Soit $f \in F$. Montrer que $f \in I$ si et seulement s'il existe une suite $(f_n)_{n \geqslant 0}$ de fonctions de C telle que pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) = \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(x)$.

361. Soient $a \in \mathbb{R}^{+*}$ et $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^{+*}$ de classe C^1 telle que $\dfrac{f'(x)}{f(x)} \sim \dfrac{a}{x}$ quand $x \to +\infty$.
a) Rappeler le théorème d'intégration des relations de comparaison.
b) Donner un équivalent de $\ln f(x)$ quand $x \to +\infty$.
c) Déterminer le domaine de définition de la fonction $u : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f(n) e^{-nx}$.
d) Déterminer les limites de u aux bornes de son intervalle de définition.
e) Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $f(x) \sim \dfrac{C}{x} f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ quand $x \to +\infty$.

362. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $a_0 > 0$, $a_1 > 0$ et
$\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+2} = \dfrac{n+4}{n+1} a_{n+1} + \dfrac{3n+7}{n+2} a_n$.
a) Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ est strictement positif.
b) Déterminer la valeur de ce rayon de convergence.

363. Pour x réel, on pose $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{1 - x^n}$ sous réserve de convergence.
a) Déterminer le domaine de définition de f.
b) Étudier la continuité puis la dérivabilité de f.
c) Donner un équivalent simple de f en 1^-.
d) Montrer que f est développable en série entière, et préciser le développement associé.

364. ***a)*** Soient U un voisinage de 0 dans $\mathbb{C}$, et $f : U \to \mathbb{C}$ somme d'une série entière. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $f(z) = O(z^k)$ quand z tend vers 0. Montrer que, pour r voisin de 0^+, il existe au moins $2k$ nombres complexes z de module r tels que $f(z)$ soit un nombre réel.
b) Soient A et B deux polynômes à coefficients réels dont toute combinaison linéaire à coefficients réels est scindée ou nulle. Soient $x < y$ deux racines de A. Montrer que $[x, y]$ contient au moins une racine de B.

365. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence égal à 1 et de somme f.
On suppose qu'il existe $C > 0$ tel que $\forall r \in [0, 1[$, $\displaystyle\int_0^{2\pi} |f'(re^{i\theta})| \mathrm{d}\theta \leqslant C$.
Montrer que $\displaystyle\int_0^1 |f(t)| \mathrm{d}t < +\infty$.

366. $\star$ Soit $P = a_1 X + \cdots + a_d X^d \in \mathbb{Z}[X]$ avec a_1 impair.
a) Montrer l'existence d'une suite réelle $(b_k)_{k \geqslant 0}$ telle que : $\forall x \in \mathbb{R}, \exp\left(P(x)\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k x^k$.

b) Montrer que les b_k sont tous non nuls.

367. Pour x et q dans $]0,1[$, on pose $(x,q)_n = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(1-q^k x)$.
a) Montrer que la suite de terme général $(x,q)_n$ converge vers un réel $(x,q)_\infty > 0$.
b) Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{(x,q)_n}{(q,q)_n}z^n$. On notera $f_{x,q}$ sa somme sur le disque ouvert de convergence, et D son disque ouvert de convergence.
c) Établir l'identité $f_{x,q}(z) - f_{x,q}(qz) = (1-x)zf_{xq,q}(z)$ pour tout $z \in D$.
d) Établir l'identité $f_{x,q}(z) = \dfrac{1-xz}{1-z}f_{x,q}(qz)$ pour tout $z \in D$.
e) Démontrer que $f_{x,q}(z) = \dfrac{(zx,q)_\infty}{(z,q)_\infty}$ pour tout $z \in D$.
f) Soit $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$. Déterminer, pour tout $z \in D$, la limite de $f_{q^\alpha,q}(z)$ quand q tend vers 1^-.

368. ***a)*** Pour $x \geqslant 0$ on pose $f(x) = \operatorname{card}\big\{(n,m) \in (\mathbb{N}^*)^2, n^2+m^2 \leqslant x\big\}$. Trouver un équivalent de $f(x)$ lorsque $x \to +\infty$.
b) On pose $g(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} t^{n^2}$. Trouver un équivalent de g en 1^- en utilisant g^2.

369. Soit p un nombre premier. Pour tout $F \in \mathbb{F}_p[X]$, on pose $|F| = p^{\deg F}$.
a) Soit $s \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re} s > 1$. Montrer que la famille $\big(|F|^{-s}\big)$, indexée par les polynômes $F \in \mathbb{F}_p[X]$ unitaires, est sommable et calculer sa somme, qu'on notera $z(s)$.
b) On note A l'ensemble des polynômes unitaires de $F \in \mathbb{F}_p[X]$ sans facteur carré, c'est-à-dire tels que : $\forall D \in \mathbb{F}_p[X],\ D^2|F \Rightarrow \deg D = 0$. Montrer que $\displaystyle\sum_{F\in A}|F|^{-s} = \frac{z(s)}{z(2s)}$.
c) En déduire, pour tout $d \in \mathbb{N}$, la proportion de polynômes sans facteur carré parmi les polynômes unitaires de degré d de $\mathbb{F}_p[X]$.

370. Soit f continue sur $[0,1]$ et $g : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{f(t)}{1+xt}\mathrm{d}t$ pour $x \geqslant 0$. On suppose $f(0) \neq 0$.
a) Donner un équivalent de g lorsque $x \to +\infty$.
b) On suppose f de classe $\mathcal{C}^1$. Majorer l'écart avec l'équivalent trouvé.
c) Que peut-on dire de plus si f est de classe $\mathcal{C}^2$?

371. ***a)*** Déterminer le domaine de définition de $f : x \mapsto \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^{\pi/2}(\cos t)^{2x}\,\mathrm{d}t$.
b) Montrer, pour tout réel $x > 0$, l'égalité $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{u\exp\Big(-u^2\big(x+\frac{1}{2}\big)\Big)}{\sqrt{1-e^{-u^2}}}\mathrm{d}u$.

372. ***a)*** Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\sin(xt)\,\mathrm{d}t$ pour tout réel x.

b) On pose $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t\,(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et que $\forall x > 0,\ F''(x) = F(x) - \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$

c) Donner une expression simplifiée de F.

373. Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^{+*}, \mathbb{R})$ de carré intégrable. On pose $S_f : x \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(y)}{x+y}\mathrm{d}y$.

a) Justifier la bonne définition de S_f.

b) Montrer que S_f est de carré intégrable.

374. Soient $\alpha, \beta > 0$. Pour $x > 0$, on pose $I(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{\beta-1}e^{-t-xt^{\alpha}}\,\mathrm{d}t$.

a) Déterminer la limite et un équivalent de I en $+\infty$.

b) Donner un développement asymptotique de I à tout ordre.

c) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que ce développement soit la somme partielle d'une série convergente pour tout $x > 0$.

375. ***a)*** Soient K un segment et $f : K \to K$ une fonction continue croissante. Montrer que f admet un point fixe.

b) On considère l'équation différentielle non linéaire (E) : $x' = \cos(x) + \cos(t)$. On admet que pour tout $a \in \mathbb{R}$ il existe une unique solution φ_a de (E) sur $\mathbb{R}$ vérifiant $\varphi(0) = a$, et que, pour tous a, b réels distincts, les fonctions φ_a et φ_b ne coïncident en aucun point. Montrer que (E) possède une solution 2π-périodique.

376. Soient f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^{+*}$. Soit $a \in [0, 1]$.

a) Justifier qu'il existe une unique fonction $x_a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\forall t \in \mathbb{R}^+,\ x'(t) = f(t) - (f(t) + g(t))\,x(t)$ et $x(0) = a$.

b) On suppose que f et g ont une limite finie strictement positive en $+\infty$. Montrer que x_a tend vers 0 en $+\infty$.

c) Montrer que f et g peuvent être choisies de telle sorte que x_a n'ait pas de limite en $+\infty$.

d) On suppose que l'une des fonctions f et g n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Montrer que $x_1 - x_0$ tend vers 0 en $+\infty$.

377. Soient $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue à support compact et $\omega \in \mathbb{R}^{+*}$. On considère l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = v(t)$, dont on note $\mathcal{S}_E$ l'ensemble des solutions.

a) Montrer que, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, il existe une unique solution $f^+_{a,b}$ (resp. $f^-_{a,b}$) de (E) telle que $f^+_{a,b}(t) = a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$ pour tout t dans un voisinage de $+\infty$, (resp. $f^-_{a,b}(t) = a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$ pour tout t dans un voisinage de $-\infty$.

a) Montrer que $\mathcal{S}_E = \{f^+_{a,b}, (a, b) \in \mathbb{R}^2\} = \{f^-_{a,b}, (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$.

b) On pose $c(\omega) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} v(t)\cos(\omega t)\,\mathrm{d}t$ et $s(\omega) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} v(t)\sin(\omega t)\,\mathrm{d}t$, et on définit l'application $S_\omega : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ par : $f^-_{a,b} = f^+_{S_\omega(a,b)}$ pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Expliciter l'application S_ω en fonction de $c(\omega)$ et $s(\omega)$.

c) On suppose que $S_\omega = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ pour tout $\omega > 0$. Montrer que v est identiquement nulle.

378. Soient q_1, q_2 deux fonctions continues de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ telles que $q_1 \leqslant q_2$. On considère l'équation différentielle $(E_i) : y'' + q_i(t)\, y = 0$ pour $i \in \{1, 2\}$.
a) Soient y_1, y_2 des solutions respectives de (E_1) et (E_2) sur I. Soient $\alpha < \beta$ deux zéros de y_1. Montrer que y_2 s'annule dans $[\alpha, \beta]$.
b) Soient $q : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue, m, M deux réels strictement positifs tels que $m \leqslant q \leqslant M$. Soient $\alpha < \beta$ deux zéros consécutifs d'une solution non nulle x de $y'' + q(t)\, y = 0$.
i) Montrer que les zéros de x forment une suite strictement croissante $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
ii) Montrer que $\dfrac{\pi}{\sqrt{M}} \leqslant t_{n+1} - t_n \leqslant \dfrac{\pi}{\sqrt{m}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

379. ***a)*** Soit p un projecteur d'un espace vectoriel E de dimension finie, et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $pu + up = u$. Montrer que $\mathrm{tr}(u) = 0$.
b) Soit E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$. Soit $r \in [\![0, n]\!]$. On note G l'ensemble des projecteurs orthogonaux de E de rang r. Soit $p \in G$. Déterminer l'espace vectoriel tangent à G en p.

380. On munit $\mathbb{R}^2$ de sa structure euclidienne canonique. On considère le carré de coins $\{0, 1\} \times \{0, 1\}$. On choisit trois points A, B et C sur ce carré.
a) Montrer qu'il existe une disposition des points A, B et C maximisant l'aire du triangle ABC.
b) Caractériser une telle disposition.

Géométrie

381. Pour $n \geqslant 2$, on note P_n le périmètre d'un polygone régulier à 2^n côtés inscrit dans le cercle unité.
a) Calculer P_n et étudier la convergence de la suite $(P_n)_{n\geqslant 2}$.
b) Établir une relation de récurrence entre P_n et P_{n+1}.
c) Estimer l'erreur $2\pi - P_n$.
d) Proposer une méthode d'approximation de π par excès.

382. On se donne un triangle direct ABC du plan complexe. On note respectivement a, b, c les mesures principales des angles orientés $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$ et $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$. On note P l'unique point tel que $\frac{b}{3}$ soit une mesure de $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BP})$ et $\frac{c}{3}$ soit une mesure de $(\overrightarrow{CP}, \overrightarrow{CB})$; Q l'unique point tel que $\frac{a}{3}$ soit une mesure de $(\overrightarrow{AQ}, \overrightarrow{AC})$ et $\frac{c}{3}$ soit une mesure de $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CQ})$; R l'unique point tel que $\frac{a}{3}$ soit une mesure de $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AR})$ et $\frac{b}{3}$ soit une mesure de $(\overrightarrow{BR}, \overrightarrow{BA})$. L'objectif est de montrer que le triangle PQR est équilatéral.
a) On note f, g, h les rotations de centres respectifs A, B, C et d'angles de mesures respectives $\frac{2a}{3}$, $\frac{2b}{3}$ et $\frac{2c}{3}$. Montrer que P est l'unique point fixe de $g \circ h$.
b) Montrer que $(f^3 \circ g^3 \circ h^3)(z) = z$ pour tout nombre complexe z.
c) On note $f : z \mapsto a_1 z + b_1$, $g : z \mapsto a_2 z + b_2$ et $h : z \mapsto a_3 z + b_3$. Exprimer P, Q, R en fonction des a_i et des b_i.
d) Conclure.

Probabilités

383. Déterminer le nombre moyen de 2-cycles, de 3-cycles, de p-cycles, d'une permutation de $[\![1, n]\!]$.

384. ***a)*** Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ \dfrac{e^{-x}}{(1-e^{-x})^2} < \dfrac{1}{x^2}$.
b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle partition de n toute liste décroissante $(\lambda_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ d'entiers naturels non nuls de somme n. On note $P(n)$ le nombre de telles listes.
Montrer que $P(n) \leqslant 2^{n-1}$.
c) On fixe $n \geqslant 1$ et on considère une variable aléatoire X suivant la loi uniforme sur l'ensemble des partitions de n. On fixe $k \in \mathbb{N}^*$ et $j \in \mathbb{N}$. On pose $N_k = |\{i \in [\![1, n]\!] : X_i = k\}|$.
Exprimer $\mathbf{P}(N_k \geqslant j)$ comme un quotient $\dfrac{P(a)}{P(b)}$ pour des entiers a et b à préciser.
d) Calculer $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} iN_i$.

385. On considère la suite (a_n) définie par $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ et $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ pour $n \geqslant 3$.
a) Calculer $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{a_n}{2^n}$.
b) On lance une pièce non truquée. Déterminer la loi de la variable aléatoire X qui donne l'instant de première apparition du motif Face-Face.
c) Calculer $\mathbf{E}(X)$ et $\mathbf{V}(X)$.
d) Donner un équivalent de $\mathbf{P}(X = n)$.

386. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit $\mathcal{S}_n$ de la loi uniforme, et on note N la variable aléatoire associant à tout $\sigma \in \mathcal{S}_n$ le nombre de ses orbites.
a) Calculer $\mathbf{P}(N = 1)$ et $\mathbf{P}(N = n)$.
b) Donner une formule simple pour la fonction génératrice de N.
c) Donner un équivalent de $\mathbf{E}(N)$ quand n tend vers $+\infty$.
d) Donner un équivalent de $\mathbf{V}(N)$ quand n tend vers $+\infty$.

387. Soient $n \geqslant 2$, $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires i.i.d. suivant la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$ et $f_{(X_1,\ldots,X_n)}$ la variable aléatoire à valeurs dans $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ telle que, pour tout i, $f_{(X_1,\ldots,X_n)}(e_i) = e_{X_i}$.
a) Déterminer $\mathbf{E}\left(\operatorname{rg}\left(f_{(X_1,\ldots,X_n)}\right)\right)$.
b) Pour $z \in \mathbb{C}$, soit μ_z la multiplicité de z comme valeur propre de $f_{(X_1,\ldots,X_n)}$. Calculer $\mathbf{E}(\mu_z)$.

388. Soient $b, n \in \mathbb{N}^*$. On considère $(B_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ des variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $[\![0, b-1]\!]$. On note S l'ensemble des descentes de la suite B c'est-à-dire $S = \{i \in [\![1, n]\!],\ B_i > B_{i+1}\}$.
a) Pour $i \in [\![1, n-1]\!]$, calculer $\mathbf{P}(B_i > B_{i+1})$.
b) Soit $j \in [\![1, n-j-1]\!]$. Calculer $\mathbf{P}(B_1 > B_2 > \cdots > B_{j+1})$.

c) Pour $I \subset [\![1, n]\!]$, on pose $\alpha(I)$ (resp. $\beta(I)$) le nombre de suites à n éléments à valeurs dans $[\![0, b-1]\!]$ qui vérifient $S \subset I$ (resp. $S = I$). Exprimer α en fonction de β, puis β en fonction de α.

389. Si $n \in \mathbb{N}^*$, $\sigma \in \mathcal{S}_{2n}$ et $k \in \{1, \dots, 2n\}$, on note $s(\sigma, k)$ le segment de $\mathbb{C}$ qui joint les points $e^{\frac{ik\pi}{n}}$ et $e^{\frac{i\sigma(k)\pi}{n}}$. On note $b(\sigma)$ le nombre de segments qui ne croisent aucun autre segment (où on dit que deux segments se croisent s'ils ont un point d'intersection qui n'est pas une extrémité).
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit σ_n une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $\mathcal{S}_{2n}$. Déterminer $\mathbf{E}(b(\sigma_n))$ et en donner un équivalent.

390. ★★ Soient $p \in [0, 1/2]$, $(X_n)_{n \geqslant 1}$ i.i.d. telle que $\mathbf{P}(X_n = -1) = \mathbf{P}(X_n = 1) = p$ et $\mathbf{P}(X_n = 0) = 1 - 2p$. On cherche p tel que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall a_1, \dots, a_n, b \in \mathbb{Z}, \mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i = 0\right) \geqslant \mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i = b\right).$$
a) Montrer que $p \leqslant 1/3$, puis que $p < 1/3$ et enfin que $p \leqslant 1/4$.
b) Si X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{Z}$, on pose $\Phi_X : \theta \mapsto \mathbf{E}\left(e^{iX\theta}\right)$. Exprimer $\mathbf{P}(X = k)$ en fonction de Φ_X.
c) En déduire que $p \leqslant 1/4$ est une condition suffisante.

391. Soient n et d des entiers tels que $1 \leqslant d < n$, et $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes uniformément distribuées sur $[\![0, d]\!]$. On note S_n la classe de $X_1 + \cdots + X_n$ dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
a) La variable aléatoire S_n est-elle uniformément distribuée sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$?
b) Calculer la loi de S_n.

392. Soient $d \in \mathbb{N}^*$, $(X_n)_{n \geqslant 1}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires suivant la loi uniforme sur $[\![1, d]\!]$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.
a) Soient Y une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{Z}$, $r \in [\![0, d-1]\!]$, $\omega = e^{2i\pi/n}$.
Montrer que $\mathbf{P}(Y \equiv r\,[d]) = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\omega^{kr}} \mathbf{E}\left(\omega^{kY}\right)$.
b) Soit $r \in [\![0, d-1]\!]$. Donner une expression de $\mathbf{P}(S_n \equiv r\,[d])$.
c) Déterminer la limite de la suite de terme général $\mathbf{P}(S_n \equiv 0\,[d])$.

393. Soit $n \geqslant 1$.
a) On se donne deux variables aléatoires indépendantes X_n et Y_n suivant chacune la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]^2$. Soit $r \in \mathbb{Q}$. Déterminer la probabilité $u_n(r)$ pour que X_n et Y_n soient deux points distincts et le coefficient directeur de la droite $(X_n Y_n)$ soit égal à r. Donner un équivalent de $u_n(r)$ lorsque $n \to +\infty$.
b) On se donne quatre variables aléatoires indépendantes X_n, Y_n, A_n, B_n suivant chacune la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]^2$. On note p_n la probabilité pour que $X_n \neq Y_n$, $A_n \neq B_n$ et les droites $(X_n Y_n)$ et $(A_n B_n)$ soient parallèles. Montrer que $p_n = O\Big(\dfrac{\ln n}{n^2}\Big)$ quand $n \to +\infty$.

394. Soit $a \in [1, 2]$. On pose $f_a : x \mapsto |1 + x|^a - |2x|^a - ax$.

a) Montrer : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_a(x) \leqslant 1$.
b) Soit X une variable aléatoire réelle centrée et admettant un moment d'ordre 2. Montrer : $\forall c \in \mathbb{R}$, $\mathbf{E}\left(|c+X|^a\right) \leqslant 2^a \mathbf{E}(|X|^a) + |c|^a$.
c) Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires centrées admettant un moment d'ordre 2. Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{E}\left(\left|\sum_{i=1}^{n} X_i\right|^a\right) \leqslant 2^a \sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}(|X_i|^a)$.

395. Une urne contient a boules jaunes et b boules rouges. On effectue une succession de tirages d'une boule dans l'urne avec remise. À chaque tirage, on ajoute une boule de la couleur de celle tirée dans l'urne. Soit X_n la variable aléatoire du nombre de boules jaunes dans l'urne après n tirages. Soit T_n l'événement « tirer une boule jaune au $n^{\text{ième}}$ tirage ».
a) Calculer $\mathbf{P}_{T_2}(T_1)$.
b) Déterminer la loi de X_n.
c) Calculer $\mathbf{P}(T_n)$.
d) Pour $n_1, ..., n_p, m_1, ..., m_q$ tous distincts, calculer $\mathbf{P}(T_{n_1} \cap ... \cap T_{n_p} \cap \overline{T_{m_1}} \cap ... \cap \overline{T_{m_q}})$.

396. ★ Soient $n \geqslant 1$ et A, B, C des variables aléatoires indépendantes uniformément distribuées sur $\{0,1\}^n$.
a) Pour $n \geqslant 2$, calculer la probabilité p_n que ABC soit un triangle équilatéral.
b) Déterminer un équivalent de p_n.

397. On munit l'ensemble $\mathcal{S}_n$ des permutations de $[\![1, n]\!]$ de la probabilité uniforme. Soit X_n la variable aléatoire donnant le nombre de points fixes d'une permutation aléatoire $\sigma \in \mathcal{S}_n$.
a) Calculer $\mathbf{P}(X_n = 0)$.
b) Déterminer la loi de X_n.
c) Étudier la convergence en loi de la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
d) Calculer les espérance et variance de la variable aléatoire X_n.

398. Soit $M = \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{pmatrix}$ une matrice aléatoire où $(a+1) \sim \mathcal{P}(\alpha)$, $(b+1) \sim \mathcal{P}(\beta)$, $(c+1) \sim \mathcal{P}(\gamma)$ et $(d+1) \sim \mathcal{P}(\delta)$.
a) Calculer la probabilité que la matrice M soit inversible.
b) Calculer la probabilité que la matrice M soit inversible et diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

399. Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ vérifiant $\mathbf{P}(X \geqslant Y) = 1$, et, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $i \in [\![0, n]\!]$, $\mathbf{P}(X = n) > 0$ et $\mathbf{P}(Y = i | X = n) = \dfrac{1}{n+1}$.
a) Montrer que, si $(i,j) \in \mathbb{N}^2$, $\mathbf{P}P(X = i, Y = j) = \mathbf{P}(X = i, X - Y = j)$, puis que $X - Y \sim Y$.
b) Montrer que $\mathbf{P}(Y = 0) > 0$.
c) On suppose que $X - Y$ et Y sont indépendantes. Déterminer la loi de Y, puis celle de X.

400. Soit $n \geqslant 3$ un entier. Si $k \in \mathbb{Z}$, on note $\overline{k}$ la réduction de k modulo n. Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ telles que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, X_k suit la loi uniforme sur $\{\overline{1}, \overline{2}, \overline{3}\}$. Soit F l'application aléatoire de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ dans lui-même telle que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $F(\overline{k}) = \overline{k} + X_k$. Calculer la probabilité que F soit bijective.

401. On cherche à collectionner N jouets. À chaque achat, chaque jouet a une probabilité uniforme d'être obtenu. Pour $i \in [\![1, N]\!]$, on note T_i le temps d'attente pour obtenir i jouets différents.

a) Calculer l'espérance de T_N.

b) Calculer la variance de T_N.

c) Montrer que $\forall \varepsilon > 0$, $\mathbf{P}\left(\left|\dfrac{T_N}{N \ln N} - 1\right| \geqslant \varepsilon\right) \longrightarrow 0$ quand $N \to +\infty$.

402. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires réelles centrées.
On suppose que $\mathbf{E}(X_1^4) < +\infty$.

a) Montrer que $\mathbf{E}\left((X_1 + \cdots + X_n)^4\right) = O(n^2)$.

b) Pour $\varepsilon > 0$, quelle est la nature de la série de terme général $\mathbf{P}\left(\dfrac{X_1 + \ldots + X_n}{n} > \varepsilon\right)$?

403. Soient $x \in \mathbb{R}^{+*}$, $(X_k)_{k \geqslant 1}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires suivant la loi $\mathcal{P}(x)$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soient $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$, $T_n = \dfrac{S_n - n}{\sqrt{n}}$.

a) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathbf{P}(T_n \geqslant x)\mathrm{d}x = \sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \frac{1}{n!}$.

b) On admet que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathbf{P}(T_n \geqslant x) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t^2/2}\mathrm{d}t$. Retrouver la formule de Stirling.