Épreuves orales des concours d'entrée aux grandes écoles

Les énoncés marqués d'une étoile seront corrigés ultérieurement

Écoles Normales Supérieures – MP – MPI

Algèbre

1. ★★ [PLSR] Soient S et T des ensembles finis non vides et f une application de S dans T. On pose $X = \{(x,y) \in S^2,\ f(x) = f(y)\}$. Montrer que
$|X| \geqslant \max\left(\dfrac{|S|^2}{|T|}, \left(\left\lceil \dfrac{|S|}{|T|} \right\rceil\right)^2 + |S| - \left\lceil \dfrac{|S|}{|T|} \right\rceil\right)$.

2. ★ [PLSR] Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Montrer qu'il existe $m \in \mathbb{Z}$ et S un sous-ensemble non vide de $[\![1, n]\!]$ tels que $\left| m - \displaystyle\sum_{i \in S} x_i \right| \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.

3. [PLSR] Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note $E(n)$ la valuation 5-adique de $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} k^k$. Donner un équivalent de $E(n)$ quand $n \to +\infty$.

4. [PLSR] ***a)*** Montrer que $\dbinom{i+j}{i}$ est strictement croissante comme fonction de j à i fixé, et comme fonction de i à j fixé.
Pour $r \in \mathbb{N}^*$, on pose
$N_r = \text{Card}\left\{(k,n) \in (\mathbb{N}^*)^2, \dbinom{n}{k} = r\right\}$ et $b(r) = \inf\left\{n \in \mathbb{N}, \dbinom{2n}{n} > r\right\}$.
b) Montrer que $N_r \leqslant 2b$, puis montrer que $b(r) = O(\ln(r))$ quand $r \to +\infty$.
c) Montrer que $\dfrac{1}{r}\displaystyle\sum_{i=2}^{r} N_i$ tend vers 2 quand r tend vers $+\infty$.

5. ⋆ ⋆ [P] Soit n un entier premier > 1. Montrer que -1 est un carré modulo n si et seulement si n est somme de deux carrés d'entiers.

6. [L] ***a)*** Soit p un nombre premier impair. Montrer que $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ contient $(p-1)/2$ carrés.
b) Montrer que tout élément de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ s'écrit comme la somme de deux carrés de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
c) Soit n un entier impair. Montrer que tout élément de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ s'écrit comme somme de deux carrés. *Ind.* Commencer par le cas où n est sans facteur carré.

7. [SR] Si $n \in \mathbb{N}^*$, soit $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Si p est un nombre premier et si $r \in \mathbb{Q}^*$ s'écrit $\dfrac{a}{b}$ où a et b sont deux entiers premiers entre eux, on définit la p-valuation $v_p(r)$ de r comme la p-valuation de a.
a) Montrer que, si $p \geqslant 3$ est un nombre premier, $v_p(H_{p-1}) \geqslant 1$.
b) Montrer que, si $p \geqslant 5$ est un nombre premier, $v_p(H_{p-1}) \geqslant 2$.
c) Montrer que, si $p \geqslant 5$ est un nombre premier, $v_p(H_{(p-1)p}) \geqslant 1$.

8. [SR] Si $n \in \mathbb{N}^*$, soit $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Si p est un nombre premier et si $r \in \mathbb{Q}^*$ s'écrit $\dfrac{a}{b}$ où a et b sont deux entiers premiers entre eux, on définit la p-valuation $v_p(r)$ par $v_p(r) = v_p(a) - v_p(b)$. Si $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $v_2(H_n)$.

9. ⋆⋆ ***a)*** Calculer $\displaystyle\sum_{d|n} \varphi(d)$ où φ est l'indicatrice d'Euler.
b) Calculer $\displaystyle\sum_{d|n} \mu(d)$ où μ est la fonction de Möbius définie par $\mu(1) = 1$, $\mu(p) = -1$, $\mu(p^k) = 0$ pour $k \geqslant 2$ si p est un nombre premier et $\mu(nm) = \mu(n)\,\mu(m)$ si $n \wedge m = 1$.
On pose $F : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto \left|\left\{\dfrac{p}{q} \in [0,1]\ ;\ q \leqslant x\right\}\right|$.

c) Montrer que $F(x) \underset{x \to +\infty}{=} \dfrac{3}{\pi^2}x^2 + O(x \ln x)$.

10. ★ [P] Soient p, q deux nombres premiers distincts. On note $v_p(n)$ la valuation p-adique d'un entier n. On pose, pour $m \in \mathbb{N}^*$, $N(m) = (1-q)(1-q^2)\dots(1-q^m)$. Trouver une constante $c > 0$ telle que, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $v_p(N(m)) \leqslant cm\ln(m)$.

11. ★★ [PLSR] Si X est un ensemble fini, on note $X^* = \displaystyle\bigsqcup_{k \in \mathbb{N}} X^k$, $c : (X^*)^2 \to X^*$ la concaténation et $\ell : X^* \to \mathbb{N}$ la longueur. Soient A et B deux ensembles finis et $\varphi : A^* \to B^*$ telle que, pour tous $a, a' \in A$, $\varphi(c(a, a')) = c(\varphi(a), \varphi(a'))$.
a) On pose $A = \{a, b, c, d\}$ et $B = \{0, 1\}$. Étudier l'injectivité des applications définies sur les lettres de A puis étendues sur A^* par $\varphi : A \to B^*$ telles que $\varphi(a) = 0$, $\varphi(b) = 01$, $\varphi(c) = 10$, $\varphi(d) = 10011$, et $\psi : A \to B^*$ telle que $\psi(a) = 01$, $\psi(b) = 10$, $\psi(c) = 11$, $\psi(d) = 00$.
b) Montrer que, si φ est injective, alors $\displaystyle\sum_{a \in A} |B|^{-\ell(\varphi(a))} \leqslant 1$.

12. ★ [PLSR] ***a)*** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la transposition $(1\ 2)$ et le cycle $(1\ 2\ \cdots\ n)$ engendrent le groupe symétrique $\mathcal{S}_n$.
b) La transposition $(1\ 3)$ et le cycle $(1\ 2\ 3\ 4)$ engendrent-ils $\mathcal{S}_4$?
c) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $1 \leqslant a < b \leqslant n$ tels que $\tau = (a\ b)$ et $\sigma = (1\ 2\ \cdots\ n)$ engendrent $\mathcal{S}_n$. Montrer que $b - a$ et n sont premiers entre eux.
d) Montrer la réciproque de la propriété précédente.

13. [PLSR] Une partie B d'un groupe abélien $(G, +)$ est dite sans somme lorsque $\forall (x, y) \in B^2,\ x + y \notin B$. On se donne une partie finie A de $\mathbb{Z}$ (vu avec sa structure usuelle de groupe abélien). L'objectif est de montrer que A inclut une partie B sans somme telle que $|B| \geqslant \dfrac{|A|}{3}$.
a) Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers congrus à 2 modulo 3.
b) Soit p un nombre premier congru à 2 modulo 3, que l'on écrit $p = 3k + 2$. On suppose que $A \subset [\![-k, k]\!]$. Soit B une partie de A. Montrer que B est sans somme si et seulement si l'ensemble $\{\overline{b},\ b \in B\}$ des classes modulo p de ses éléments est sans somme dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
c) Soit $x \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$. Montrer que $B_x = \{a \in A\ ;\ \exists b \in [\![k+1, 2k+1]\!],\ x^{-1}\overline{a} = \overline{b}\}$ est sans somme.
d) Conclure.

14. ★ [PLSR] Soit G un groupe fini. Si X et Y sont des parties non vides de G, on pose $X^{-1} = \{x^{-1},\ x \in X\}$ et $XY = \{xy,\ (x, y) \in X \times Y\}$.
Dans la suite, X désigne une partie non vide de G.
a) On suppose que $|XX| < 2\,|X|$. Montrer que $XX^{-1} = X^{-1}X$.
b) On suppose que $|XX^{-1}| < \dfrac{3}{2}\,|X|$. Montrer que $X^{-1}X$ est un sous-groupe de G.

15. [PLSR] Soient A un anneau et B un sous-ensemble fini non vide de A.
On note $E(B) = |\{(a, b, c, d) \in B^4,\ ab = cd\}|$ et $BB = \{ab,\ (a, b) \in B^2\}$.

Montrer que $E(B) \geqslant \dfrac{|B|^4}{|BB|}$.

16. [SR] Pour un anneau commutatif A et un entier $n \geqslant 1$, on note $\mathrm{SL}_n(A)$ l'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients dans A et de déterminant 1.
a) Montrer que $\mathrm{SL}_n(A)$ forme un groupe pour la multiplication.
b) On considère dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ les matrices $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que $\{S, T\}$ engendre $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.
c) Soit $m \geqslant 2$ entier. Montrer que, par réduction modulo m coefficient par coefficient, on obtient un morphisme de groupes $\pi : \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$, puis établir que π est surjectif.

17. ★★ [P] Soit p un nombre premier. On admet qu'il existe un anneau commutatif A dans lequel $p^2.1_A = 0_A$ et il existe un élément inversible x tel que :
(i) tout élément de A s'écrive $P(x)\,x^{-k}$ pour un $P \in \mathbb{Z}[X]$ et un $k \in \mathbb{N}$;
(ii) pour deux polynômes P, Q dans $\mathbb{Z}[X]$ et deux entiers naturels k, l, l'égalité $P(x)\,x^{-k} = Q(x)\,x^{-l}$ équivaut à ce que $X^k Q$ et $X^l P$ aient même réduit modulo p^2 (autrement dit, tous les coefficients de $X^k Q - X^l P$ sont des multiples de p^2).
a) Soient $P \in \mathbb{Z}[X]$ et $k \in \mathbb{N}$. Caractériser l'inversibilité de $P(x)\,x^{-k}$ dans A.
b) Montrer que le groupe multiplicatif $A^\times$ ne possède pas de partie génératrice finie.

18. ★★ [PLSR] Soit $f \in \mathbb{Z}[X]$. On pose $S_q = \displaystyle\sum_{\substack{0 \leqslant a < q \\ a \wedge q = 1}} \sum_{n=0}^{q-1} e^{\frac{2i\pi a f(n)}{q}}$ pour tout $q \in \mathbb{N}^*$.
Montrer que, si $q \wedge q' = 1$, alors $S_{qq'} = S_q S_{q'}$.

19. ★ [PLSR] On dit qu'un ensemble $X \subset \mathbb{C}$ est intégrable si : $\forall (x, y) \in X^2,\ |x - y| \in \mathbb{N}$.
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un ensemble intégrable X composé de n points tous sur un même cercle.

20. [P] ***a)*** Déterminer les nombres rationnels r tels que $\cos(\pi r)$ soit rationnel.
b) Soit $z \in \mathbb{C}$ annulé par un polynôme unitaire à coefficients entiers. Soit $Q \in \mathbb{Z}[X]$. Montrer que $Q(z)$ est annulé par un polynôme unitaire à coefficients entiers.

21. ★★ [SR] ***a)*** Soit $n = 2m+1 \geqslant 1$ un entier impair. Expliciter un polynôme P_m de degré $2m$ tel que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z},\ \sin(nx) = (\sin x)^n P_m(\operatorname{cotan} x)$.
b) Donner une expression simplifiée de $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} \operatorname{cotan}^2\Big(\frac{k\pi}{n}\Big)$.
c) Donner une expression simplifiée de $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)}$.
d) En déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

22. [SR] Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $P_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$.
a) Montrer que P_n est simplement scindé sur $\mathbb{C}$.
b) Montrer que si n est impair alors P_n possède exactement une racine réelle, et qu'elle appartient à $[-n, -1]$.
c) On suppose n pair. Le polynôme P_n a-t-il une racine réelle ?
d) Déterminer les variations et la convexité de $x \mapsto P_n(x)$.

23. ★★ [PLSR] Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n \geqslant 1$.
a) On suppose P scindé sur $\mathbb{R}$. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $n\, P(x)\, P''(x) \leqslant (n-1)\, P'(x)^2$.
b) Donner un polynôme ne vérifiant pas le résultat de la question précédente, puis un polynôme non scindé le vérifiant.

24. [L] Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $P = X^n + \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ un élément unitaire de degré n de $\mathbb{C}[X]$. On factorise P sous la forme $P = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} (X - z_i)$, où $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$. Si $k \in \mathbb{N}$, soit $S_k = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} {z_i}^k$. Montrer que, si $k > n$, $S_k + a_{n-1} S_{k-1} + \cdots + a_0 S_{k-n} = 0$ et que, si $k \leqslant n$, $S_k + a_{n-1} S_{k-1} + \cdots + a_{n-k+1} S_1 = -k a_{n-k}$.

25. [PLSR] On dit qu'une suite d'entiers $(a_n)_{n \geqslant 1}$ est un pseudo-polynôme si pour tous m, n dans $\mathbb{N}^*$, $m - n$ divise $a_m - a_n$.
a) Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$. Montrer que la suite $(P(n))_{n \geqslant 1}$ est un pseudo-polynôme.
b) Montrer que $(\lfloor n! e \rfloor)_{n \geqslant 1}$ est un pseudo-polynôme.
c) Trouver un polynôme P de $\mathbb{Q}[X] \setminus \mathbb{Z}[X]$ tel que $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$ et tel que la suite $(P(n))_{n \geqslant 1}$ ne soit pas un pseudo-polynôme.

26. ★★ [PLSR] Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $(a_0, ..., a_n) \in (\mathbb{R}^{+*})^{n+1}$ tel que, pour tout $(\varepsilon_0, ..., \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^{n+1}$, le polynôme $P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k a_k X^k$ est scindé sur $\mathbb{R}$.

27. ★★ [P] Deux polynômes $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ sont entrelacés lorsque :
– P et Q sont scindés à racines simples sur $\mathbb{R}$,
– P et Q n'ont aucune racine réelle commune,
– entre deux racines consécutives de P (respectivement Q) il y a une unique racine de Q (respectivement P).
Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que si, pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^*$, $\lambda P + \mu Q$ est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$, alors P et Q sont entrelacés.

28. ★ [PLSR] Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n > 0$ tel que $P(0) = 0$ et $P'(0) = 1$. On note D_r le disque complexe ouvert de centre 0 et de rayon r. Montrer que $D_{1/n} \subset P(D_1)$.

29. [PLSR] Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, on note $\mathcal{C}(P) = \{Q \in \mathbb{R}[X],\ P \circ Q = Q \circ P\}$.

On appelle famille commutante toute suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}[X]^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ \deg(P_n) = n$ et $\forall m, n \in \mathbb{N},\ P_m \circ P_n = P_n \circ P_m$.
a) Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\mathcal{C}(X^2+\alpha)$ contient au plus un polynôme de degré n.
b) Expliciter une famille commutante $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $P_2 = X^2$.
c) Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$, il existe $T_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{ch}(nx) = T_n(\mathrm{ch}(x))$.
d) Montrer que $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille commutante.
e) Montrer que les polynômes de degré 1 sont inversibles pour $\circ$.
L'inverse de U de degré 1 pour $\circ$ est noté U^{-1}.
f) Montrer que, pour P de degré 2, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ et $U \in \mathbb{R}[X]$ de degré 1 uniques tels que $P = U \circ (X^2+\alpha) \circ U^{-1}$.
g) Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille commutante. Montrer que, ou bien il existe $U \in \mathbb{R}[X]$ de degré 1 tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_n = U \circ X^n \circ U^{-1}$, ou bien il existe $U \in \mathbb{R}[X]$ de degré 1 tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_n = U \circ T_n \circ U^{-1}$.

30. [PLSR] On définit par récurrence une famille $(f_k^{(n)})_{(n,k)\in\mathbb{N}^2}$ de fonctions, où $f_k^{(n)}$ va de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, par $f_k^{(0)} = \delta_{k,0}$ pour tout $k \geqslant 0$, et $f_k^{(n+1)}(x_1,\dots,x_{n+1}) = f_{k-1}^{(n)}(x_1,\dots,x_n) - x_{n+1}\, f_k^{(n)}(x_1,\dots,x_n)$ pour tous $k \geqslant 0$, $n \geqslant 0$, et $(x_1,\dots,x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ (en convenant que $f_{-1}^{(n)}$ est nulle). Montrer que la fonction $f_k^{(n)}$ est symétrique pour tout $(k,n) \in \mathbb{N}^2$.

31. [SR] ***a)*** Donner une condition nécessaire et suffisante sur $n \in \mathbb{N}$ pour que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ soit un corps.
b) Supposons cette condition satisfaite, combien y a-t-il de polynômes de degré $d \in \mathbb{N}$ fixé dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$?
c) Soit p un nombre premier. Un polynôme $P \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[X]$ est irréductible si P est unitaire et, lorsque $P = AB$ avec A et B unitaires, on a $P = A$ ou $P = B$. Montrer qu'il existe des polynômes irréductibles de degré 2 et 3 dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ avec p premier quelconque.

32. [P] Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{K}$ un corps et V un sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les éléments sont de rang majoré par 1. Montrer que V est de dimension inférieure ou égale à n, étudier le cas d'égalité.

33. [PLSR] Quelle est la dimension maximale d'un sous-espace V de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que, pour tout $(X,Y) \in V^2$, $\mathrm{tr}(XY) = 0$?

34. [PLSR] Soient $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que A est inversible et $AB = BA$.
Montrer que $\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(DA - CB)$.

35. [PLSR] Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de même rang telles que $A^2B = A$.
Montrer que $B^2A = B$.

36. [P] Soient $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$, p un nombre premier avec $(n,p) \neq (2,2)$.
a) Déterminer le cardinal de $\mathrm{GL}_{n-1}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$.
b) Montrer que n divise ce cardinal.
c) Montrer que c'est encore le cas avec p impair non premier.

37. [P] Soient A, B dans $\mathbb{C}[X]$ unitaires et de degrés respectifs a et b.
a) Soit $F_{A,B}$ l'endomorphisme de $\mathbb{C}_{a+b-1}[X]$ défini par $F_{A,B}(U + X^a V) = BU + AV$ pour tous $U \in \mathbb{C}_{a-1}[X]$ et $V \in \mathbb{C}_{b-1}[X]$. Montrer que $\det(F_{A,B}) = \mu_{A,B}$.
b) On note $M_{A,B}$ l'endomorphisme de $\mathbb{C}[X]/(A)$ qui envoie la classe $\bar{P}$ de P sur la classe de BP. On pose $\mu_{A,B} = \det(M_{A,B})$. Montrer que $\mu_{B,A} = (-1)^{ab}\mu_{A,B}$.

38. [L] Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et E une partie de $\mathcal{P}([\![1, n]\!])$.
Pour $A \in E$, on pose $\chi_A = (1_A(1), \ldots, 1_A(n)) \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$. On note $C = \{\chi_A,\ A \in E\}$.
a) On suppose que E est stable par différence symétrique (définie par $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$). Que dire de C comme partie de l'espace vectoriel $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$?
b) On ne fait plus l'hypothèse de la question précédente, mais on suppose que $A \cap B$ est de cardinal pair pour tous A, B dans E. Montrer que $|E| \leqslant 2^{\lfloor n/2 \rfloor}$.

39. [PLSR] Soit $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ telle que $|a_i| \geqslant 2$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.
a) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $a_{i,i} = a_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $a_{i,j} = 1$ lorsque $|i - j| = 1$, et $a_{i,j} = 0$ lorsque $|i - j| > 1$. Montrer que A est inversible et que son déterminant a même signe que $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} a_k$.
b) Montrer que la conclusion de la question ***a)*** tient encore si l'on remplace la condition « $a_{i,j} = 1$ lorsque $|i - j| = 1$ » par la condition « $|a_{i,j}| \leqslant 1$ lorsque $|i - j| = 1$ ».

40. ★★ [PLSR] On considère ϕ: $(\mathbb{R}^4)^2 \to \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ qui à (u, v) associe la matrice dont le coefficient en (i, j) vaut $\begin{vmatrix} u_i & v_i \\ u_j & v_j \end{vmatrix}$.
a) Que peut-on dire si $\phi(u, v) = \phi(u', v') \neq 0$?
b) Que dire de la réciproque ?
c) Montrer que A s'écrit comme $\phi(u, v)$ avec (u, v) libre si et seulement si $A \in \mathcal{A}_4(\mathbb{R})$, $\det(A) = 0$ et $A \neq 0$.
d) Décrire l'image et le noyau d'une telle matrice.

41. ★★ [L] Soient a, b, m, p des entiers naturels tels que $a^2 + b^2 - pm = -1$.
On pose $A = \begin{pmatrix} p & a + ib \\ a - ib & m \end{pmatrix}$. Montrer qu'il existe $B \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}(i))$ telle que $A = B^* B$ où $B^* = \bar{B}^T$. Même question avec B dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}[i])$.

42. ★★ [PLSR] Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ des formes linéaires non nulles sur $\mathbb{R}^2$. Pour $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, soit $f_g : (x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}^2)^n \mapsto \varphi_1(g(x_1)) \times \cdots \times \varphi_n(g(x_n))$, application de $(\mathbb{R}^2)^n$ dans $\mathbb{R}$. Montrer l'équivalence entre les propositions suivantes :
i) il existe une suite $(g_k)_{k \geqslant 1}$ d'éléments de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ telle que, pour tous vecteurs $x_1, \ldots, x_n$ de $\mathbb{R}^2$, $f_{g_k}(x_1, \ldots, x_n) \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} 0$,
ii) il existe une droite vectorielle L telle que $|\{i,\ L \subset \mathrm{Ker}(\varphi_i)\}| > \dfrac{n}{2}$.

43. ★★ [P] Soit G l'ensemble des matrices de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, où $ad-bc=1$ et $a \equiv d \equiv 1-c \equiv 1 \bmod 3$. Montrer que G est le sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ engendré par les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

44. [L] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang 1 et de trace non nulle. Que dire de la diagonalisabilité de A sur $\mathbb{R}$?

45. [SR] Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $C_A : X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto AX - XA$. Montrer que si la matrice A est diagonalisable alors l'endomorphisme C_A l'est aussi.

46. ★★ [PLSR] Soient A et B deux matrices de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$. On suppose que $ABA^{-1}B^{-1}$ commute avec A et B. Montrer que $BA = \pm AB$.

47. [SR] Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\lambda_1, ..., \lambda_r$ les valeurs propres distinctes de A et $\alpha_1, ..., \alpha_r$ leurs multiplicités. Pour tout $k \in [\![1, r]\!]$, on note $P_k = (X - \lambda_k)^{\alpha_k}$ et $F_k = \mathrm{Ker}\, P_k(A)$.
a) Montrer que $\mathbb{C}^n = F_1 \oplus \cdots \oplus F_r$.
b) Montrer que P_k est le polynôme caractéristique de l'endomorphisme induit par A sur F_k.
c) Montrer que A se décompose en $D + N$, avec D diagonalisable, N nilpotente et $ND = DN$.

48. [PLSR] Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et m la multiplicité de 0 dans χ_A. Montrer l'équivalence entre les propriétés suivantes :
i) $\mathrm{Ker}\, A = \mathrm{Ker}\, A^2$,
ii) il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $M^m = A$,
iii) pour tout $k \geqslant 1$, il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $M^k = A$.

49. [PLSR] Soit $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ dont toutes les valeurs propres sont de module inférieur ou égal à 1. Montrer qu'il existe un $k \geqslant 1$ tel que $M^k - I_n$ soit nilpotente.

50. [L] Soit $P = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ dans $\mathbb{K}[X]$. On note $x_1, \ldots, x_n$ ses racines comptées à mesure de leur multiplicité, et on pose $S_k = \sum_{i=1}^{n} (x_i)^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
a) En considérant la matrice $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & (0) \\ 0 & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix}$, montrer la relation $\forall k \geqslant n,\ S_k + a_{n-1}S_{k-1} + \cdots + a_0 S_{k-n} = 0$.
b) Démontrer que $\forall k \in [\![1, n-1]\!],\ S_k + a_{n-1}S_{k-1} + \cdots + a_{n-k+1}S_1 = -k\, a_{n-k}$.

51. [L] Soit $n \geqslant 1$. Pour $\sigma \in \mathcal{S}_n$, on note $P_\sigma = (\delta_{i+1,j})_{i,j}$ la matrice de permutation associée. On note $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices diagonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des fonctions polynomiales $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ telles que $\forall (A, P) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \times \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}),\ f(PAP^{-1}) = f(A)$. On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des fonctions polynomiales $f : \mathcal{D}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ telles que $\forall (D, \sigma) \in \mathcal{D}_n(\mathbb{C}) \times \mathcal{S}_n,\ f(P_\sigma D P_\sigma^{-1}) = f(D)$. Expliciter un isomorphisme d'algèbres de $\mathcal{A}$ sur $\mathcal{B}$.

52. ★★ [PLSR] Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non nul de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'indice m, $x \in E$ tel que $f^{m-1}(x) \neq 0$.
a) Montrer que la famille $(f^k(x))_{0 \leqslant k \leqslant m-1}$ est libre. On note V le sous-espace de E engendré par cette famille.
b) Soit $\varphi \in E^*$ telle que $\varphi(f^{m-1}(x)) \neq 0$, W le sous-espace de E^* engendré par $(\varphi \circ f^i)_{0 \leqslant i \leqslant m-1}$, $W^\perp$ l'ensemble des $y \in E$ tels que $\forall \psi \in W^\perp,\ \psi(y) = 0$. Montrer que $W^\perp$ est un supplémentaire de V dans E stable par f.
c) Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f soit diagonale par blocs, les blocs diagonaux étant de la forme J_k avec $k \in \mathbb{N}^*$, où $J_k \in \mathcal{M}_k(\mathbb{K})$ est une matrice dont tous les coefficients sont nuls en dehors de ceux de la sur-diagonale qui sont égaux à 1.

53. [SR] Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$. Un élément u de $\mathcal{L}(E)$ est dit cyclique s'il existe $x \in E$ tel que $(u^k(x))_{0 \leqslant k \leqslant n-1}$ soit une base de E.
a) Quels sont les endomorphismes de E diagonalisables et cycliques ?
b) Montrer que, si u est cyclique, le commutant $C(u)$ de u dans $\mathcal{L}(E)$ est égal à $\mathbb{K}[u]$.
c) Montrer que, si $u \in \mathcal{L}(E)$, il existe $r \in \mathbb{N}^*$ et des sous-espaces $E_1, \ldots, E_r$ de E stables par u, tels que $E = \bigoplus_{i=1}^{r} E_i$ et que, pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, l'induit de u sur E_i soit cyclique.

54. ★★ [SR] Soient $r \in \mathbb{N}^*$, $d_1, \ldots, d_r$ des entiers supérieurs ou égaux à 2 tels que $d_1 | d_2 | \ldots | d_r$. Déterminer le plus petit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ contienne un sous-groupe isomorphe à $\mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/d_r\mathbb{Z}$.

55. [P] Le groupe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$ contient-il un élément d'ordre 5 ?

56. [SR] On note H l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de trace nulle, $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de déterminant 1.
a) Montrer que $e^M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ pour tout $M \in H$.
b) Montrer que $\mathrm{tr}(e^M) \geqslant -2$ pour tout $M \in H$.
c) A-t-on $\exp(H) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$?
d) Montrer que toute matrice de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ est produit d'une matrice de $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ et d'une matrice triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs.
e) En déduire que toute matrice de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ est produit de deux exponentielles de matrices de H.

57. ★★ [P] Soient E un espace vectoriel réel de dimension finie, h_1 et h_2 deux éléments de $\mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe une norme sur E pour laquelle h_1 et h_2 sont des isométries et que $[h_1, h_2] = h_1 h_2 {h_1}^{-1} {h_2}^{-1}$ commute avec h_1 et h_2. Montrer que l'espace des vecteurs de E fixes par h_1 et h_2 admet un supplémentaire dans E stable par h_1 et h_2.

58. [L] Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ses valeurs propres répétées avec leurs multiplicités.

a) Montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2 \leqslant \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |a_{i,j}|^2$.

b) Montrer que $|\det(A)| \leqslant n^{n/2} \displaystyle\sup_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |a_{ij}|$.

59. ★★ [P] Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien, $m \in \mathbb{N}^*$, $u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_m$ des vecteurs de E tels que, pour tout $(i,j) \in [\![1, m]\!]^2$, $\langle u_i, v_j \rangle = \delta_{i,j}$. On note p le projecteur orthogonal de E sur Vect$(u_1, \dots, u_m)$. Montrer que $\forall x \in E$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \langle u_i, x \rangle\ \langle x, p(v_i) \rangle = \|p(x)\|^2$.

60. [SR] On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire $(P,Q) \mapsto \langle P, Q \rangle = \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t$. On pose $F = \mathrm{Vect}\left(X, X^2, \dots, X^n\right)$ et on note Q la projection orthogonale de 1 sur F.
On écrit $Q = -\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k X^k$ et $P = 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k (X+1)\dots(X+k)$.

a) Déterminer $\langle Q - 1, X^k \rangle$ pour $k \in [\![1, n]\!]$ et montrer que $P(k) = 0$ pour $k \in [\![1, n]\!]$.

b) Calculer $\displaystyle\inf_{(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n} \int_0^{+\infty} (1 + a_1 x + \cdots + a_n x^n)^2 e^{-x}\,\mathrm{d}x$.

61. ★★ [L] Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien, $m \in \mathbb{N}^*$, $u, u_1, \dots, u_m$ des vecteurs de E. Montrer que $u \in \mathbb{R}^+ u_1 + \cdots + \mathbb{R}^+ u_m$ si et seulement si pour tout $x \in E$,
$\{x \in E\ ;\ \forall i \in [\![1, m]\!],\ \langle u_i, x \rangle \leqslant 0\} \subset \{x \in E\ ;\ \langle u, x \rangle \leqslant 0\}$.

62. [SR] Montrer que, si $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, M s'écrit d'une unique façon QR avec $Q \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure à termes diagonaux dans $\mathbb{R}^{+*}$.

63. [Rennes sur dossier] Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique et inversible.

a) Que peut-on dire de l'entier n ?

b) En considérant M^2, montrer que M admet un plan stable puis qu'il existe une matrice orthogonale $O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $O^T M O$ soit une matrice diagonale par blocs de la forme diag$(R_{a_1}, ..., R_{a_k})$, avec $R_a = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}$.

c) Qu'en est-il si M n'est plus supposée inversible ?

64. [PLSR] Soit $n \geqslant 1$. Déterminer les matrices A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A + A^k = A^T$ pour tout entier $k \geqslant n$.

65. ★ [L] Soient $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et M une matrice de réflexion dans $\mathcal{O}_{n+1}(\mathbb{R})$. On pose $A' = M \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$. Calculer $\chi_{A'}(1)$ en fonction de la première colonne de M et de χ_A.

66. [PLSR] Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ ayant n valeurs propres distinctes. Soit $v \in \mathbb{R}^n$. On suppose que A et $A + vv^T$ n'ont pas de valeur propre commune. Sous réserve d'existence, on pose $F(x) = 1 + v^T(A - xI_n)^{-1}v$ pour x réel.
a) Montrer que les zéros de F sont les valeurs propres de $A + vv^T$.
b) On note $\lambda_1 < \cdots < \lambda_n$ les valeurs propres de A. Montrer que chaque intervalle $]\lambda_1, \lambda_2[$, …, $]\lambda_{n-1}, \lambda_n[$, $]\lambda_n, +\infty[$ contient exactement une valeur propre de $A + vv^T$.

67. [PLSR] Soient $n \in \mathbb{N}$ impair, $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que, pour toute $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, $A + M$ soit non inversible. Montrer que $M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

68. ★ [PLSR] Soient A, B deux matrices de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ qui n'ont pas -1 pour valeur propre et telles que AB n'ait pas 1 pour valeur propre. Montrer que $(A - I_n)(BA - I_n)^{-1}(B - I_n)$ est antisymétrique.

69. [SR] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $J = \begin{pmatrix} 0_n & -I_n \\ I_n & 0_n \end{pmatrix}$.
a) Déterminer les valeurs propres de J et leur multiplicité.
b) Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une matrice $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$.
c) Que peut-on dire de la matrice BJB ?
d) Lorsque A est diagonale, calculer les valeurs propres de JA.
e) Montrer plus généralement que toute valeur propre d'une matrice antisymétrique réelle est imaginaire pure.

70. ★★ [PLSR] Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On note $\lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$ les valeurs propres de A non nécessairement distinctes. Montrer que $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \leqslant \sum_{i=1}^{k} a_{i,i} \leqslant \sum_{i=1}^{k} \lambda_{n+1-i}$.

71. ★★ [PLSR] ***a)*** Soient $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$.
Montrer que AB est diagonalisable à valeurs propres positives ou nulles.
b) Soient $A, B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. On pose $f_{A,B} : X \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \mapsto \mathrm{Tr}(AX) + \mathrm{Tr}(BX^{-1})$.
Montrer que $f_{A,B}$ admet un minimum $\mu_{A,B}$ atteint en une unique matrice $M_{A,B}$.
Expliciter $\mu_{A,B}$ et $M_{A,B}$.

72. [PLSR] Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On définit $p(A)$ comme la dimension maximale d'un sous-espace V sur lequel $\forall x \in V \setminus \{0\}$, $\langle Ax, x\rangle > 0$. On définit de même $q(A)$ avec la condition $\langle Ax, x\rangle < 0$.
a) Montrer que $p(A) + q(A) = \operatorname{rg} A$.
b) Montrer que, si A est inversible, alors p et q sont constantes sur un voisinage de A dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
c) Soit $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on suppose que $f : t \mapsto \det(A + tB)$ n'a que des racines simples sur $\mathbb{R}$. Montrer que f admet au moins $|p(B) - q(B)|$ racines dans $\mathbb{R}$.

73. [L] On note $\lambda_1(M) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n(M)$ le spectre ordonné d'une matrice S de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
a) Soient A et B dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telles que $A + B \in \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$. Si $1 \leqslant i, j \leqslant n$ et $i + j \geqslant n + 1$, que dire du signe de $\lambda_i(A) + \lambda_j(B)$?

b) Généraliser la question précédente à k matrices.

74. ★★ [L] Pour $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on note $\lambda_1(M) \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n(M)$ le spectre ordonné de M.
a) On considère $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telles que $A + B \in \mathcal{S}_n^{--}(\mathbb{R})$. Montrer que, si $i + j < n + 2$ alors $\lambda_i(A) + \lambda_j(B) < 0$.
b) Généraliser à $A_1, \ldots, A_d \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telles que $A_1 + \cdots + A_d \in \mathcal{S}_n^{--}(\mathbb{R})$.

75. [L] On note $\|\ \|$ la norme d'opérateur sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ associée à la norme euclidienne standard sur $\mathbb{R}^n$. Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On suppose que $E = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \ S = M^T M - M M^T\}$ est non vide. On note $\gamma(S) = \inf_{M \in E} \|M\|^2$. Montrer que $\|S\| \leqslant \gamma(S) \leqslant 2\,\|S\|$.

76. ★ ★ [P] ***a)*** Soient A et B deux éléments de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $B = P^T A P$.
b) Soit f une fonction de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $\mathbb{R}$. Proposer une définition naturelle de $f(A)$ si $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
c) Pour A et B dans $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, on pose $d(A, B) = \left\|\ln\left(\sqrt{A^{-1}} B \sqrt{A^{-1}}\right)\right\|$. Justifier la définition, et montrer que d est une distance sur $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
d) Soient $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $A, B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer que $d(P^T A P, P^T B P) = d(A, B)$.

77. [L] Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
a) Montrer que $(X, Y) \mapsto \langle X, Y\rangle = \mathrm{Tr}(X^T Y)$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $\|\ \|_{\mathrm{Tr}}$ la norme associée.
b) Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, soit $L(M) : X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto MX \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que L est un morphisme d'algèbre injectif.
c) Soit $\|\ \|_2$ la norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ subordonnée à la norme euclidienne canonique de $\mathbb{R}^n$. Soit $\|\ \|_{\mathrm{Tr}}$ la norme sur $\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ subordonnée à la norme $\|\ \|_{\mathrm{Tr}}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que $\|L(M)\|_{\mathrm{Tr}} \leqslant \|M\|_2$.
d) Montrer que $\|M^T\|_2 = \|M\|_2$ pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

78. ★★ [L] On note $\|\ \|$ la norme d'opérateur sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ associée à la norme $X \mapsto \sqrt{\overline{X}^T X}$.
a) Soient A, B dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\|e^{iA} - e^{iB}\| \leqslant \|A - B\|$.
b) Démontrer le même résultat sous l'hypothèse que A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $\overline{A}^T = A$ et $\overline{B}^T = B$.

Analyse

79. [L] Soit p un réel > 1. On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}$.
a) Montrer qu'il s'agit bien d'une norme.
b) Montrer l'inégalité de Hölder.
c) Dans $\mathbb{R}^2$, dessiner la boule unité de la norme p pour plusieurs valeurs de p.

80. [SR] Soient $a \leqslant b$ deux réels, et $(O_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts de $\mathbb{R}$ telle que $[a,b] \subset \bigcup_{i\in I} O_i$. On note X l'ensemble des $x \in [a,b]$ tels qu'il existe une partie finie $J \subset I$ vérifiant $[a,x] \subset \bigcup_{j\in J} O_j$. Montrer que $X = [a,b]$.

81. [PLSR] Soient K un compact convexe non vide d'un espace normé E, f un endomorphisme continu de E tel que $f(K) \subset K$. Montrer que f admet un point fixe dans K.

82. ★★ [P] Peut-on écrire $]0,1[$ comme réunion dénombrable disjointe de segments d'intérieurs non vides ?

83. ★★ [PLSR] Pour tout réel x dans $[0,1[$, on note $0,x_1x_2x_3...$ le développement décimal propre de x. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i$. Soit a un réel tel que $0 < a < 9$. On définit $P_n = \{x \in [0,1[\,;\, S_n(x) \leqslant na\}$ et $P = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} P_n$. Montrer que P est compact, non vide, d'intérieur vide et sans point isolé.

84. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Montrer que la classe de similitude de A est fermée si et seulement si A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

85. [P] ***a)*** On note D le disque unité du plan euclidien $\mathbb{R}^2$. Démontrer qu'il existe une suite $(C_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de parties de D telle que :
i) pour tout $i \in \mathbb{N}$, l'ensemble C_i soit un carré de $\mathbb{R}^2$ dont les côtés sont parallèles aux axes ;
ii) les C_i soient d'intérieurs deux à deux disjoints ;
iii) $\sum_{i\in\mathbb{N}} \mathrm{Aire}(C_i) = \pi$.
b) On note $C = [-1,1]^2$. Démontrer qu'il existe une suite $(D_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de parties de C telle que :
i) pour tout $i \in \mathbb{N}$, l'ensemble D_i soit un disque fermé de $\mathbb{R}^2$;
ii) les D_i soient d'intérieurs deux à deux disjoints ;
iii) $\sum_{i\in\mathbb{N}} \mathrm{Aire}(D_i) = 4$.

86. ★★ [P] Soit $d \geqslant 1$. On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des polynômes unitaires de degré d de $\mathbb{R}[X]$.
a) On pose $A = \{(P,x) \in \mathcal{P} \times \mathbb{R}\,;\, P(x) = 0 \text{ et } P'(x) \neq 0\}$. Déterminer les composantes connexes par arcs de A dans $\mathbb{R}_d[X] \times \mathbb{R}$.
b) On pose $B = \{P \in \mathcal{P}\,;\, \forall x \in \mathbb{R},\ P(x) \neq 0 \text{ ou } P'(x) \neq 0\}$. Déterminer les composantes connexes par arcs de B dans $\mathbb{R}_d[X]$.

87. ★★ [PLSR] Soient $(M_k)_{k\geqslant 1}$ une suite de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ semblables les unes aux autres, $\|\ \|$ une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que $\|M_k\| \to +\infty$. Montrer qu'il existe une matrice $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente et une extractrice $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telles que $\dfrac{M_{\varphi(k)}}{\|M_{\varphi(k)}\|} \to N$.

88. ★★ [PLSR] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont toutes les valeurs propres sont de module < 1. Montrer qu'il existe une norme $\| \ \|$ sur $\mathbb{C}^n$ telle que, pour la norme d'opérateur associée, on ait $|||A||| < 1$.

89. ★★ [P] Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, de lignes $L_1, \ldots, L_n$, et $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$. On suppose que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\|L_i\|_2 = 1$ et la distance euclidienne canonique de L_i au sous-espace engendré par les L_j, pour $j \neq i$, est supérieure ou égale à ε.
Montrer que A est inversible et que $\sup\{\|A^{-1}x\|_2 \ ; \ x \in \mathbb{R}^n, \ \|x\|_1 = 1\} \leqslant \dfrac{1}{\varepsilon}$.

90. [P] On note $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, muni de la norme $\| \ \|_\infty$. On fixe $g \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$non nulle à support compact, et on note $W(g)$ l'espace vectoriel engendré par les fonctions $x \mapsto g(x-n)$, n décrivant $\mathbb{Z}$. Montrer que l'ensemble des réels t tels que $\left\{x \mapsto f(x-t), f \in \overline{W(g)}\right\} = \overline{W(g)}$ est un sous-groupe discret de $\mathbb{R}$.

91. ★ [PLSR] Soient (a_n) et (b_n) deux suites réelles de limite 1 et (u_n) une suite réelle strictement positive telle que, pour tout n, $u_{n+2} = a_{n+1}u_{n+1} + b_{n+1}u_n$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ et $w_n = \dfrac{\ln(u_n)}{n}$. Montrer que les suites (v_n) et (w_n) convergent.

92. ★ [PLSR] ***a)*** Si $n \geqslant 2$ est un entier, montrer que $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \lfloor \log_k(n) \rfloor = \sum_{j=2}^{n} \lfloor \sqrt[j]{n} \rfloor$.

b) Donner un équivalent lorsque n tend vers $+\infty$ de $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \lfloor \log_k(n) \rfloor$.

93. [PLSR] Soient $\alpha > 0$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite strictement décroissante à valeurs dans $]0, 1[$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n(u_n^\alpha + a_n)$. Montrer qu'il existe un unique $u_0 > 0$ tel que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel strictement positif.

94. [SR] Soit (u_n) une suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sin(\ln n)$. On note V l'ensemble des valeurs d'adhérence de (u_n).
a) Montrer que, pour tous x et $y \in \mathbb{R}$, $\sin x - \sin y = 2 \sin \dfrac{x-y}{2} \cos \dfrac{x+y}{2}$.
b) Montrer que $u_{n+1} - u_n \to 0$.
c) Montrer que V est un intervalle inclus dans $[-1, 1]$, puis que $V = [-1, 1]$.

95. [L] Si A est une partie de $\mathbb{N}^*$, on dit que A admet une densité si la suite $\left(\dfrac{|A \cap [\![1, n]\!]|}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ admet une limite. Cette limite est alors notée $d(A)$.
a) Si $m \in \mathbb{N}^*$, quelle est la densité de l'ensemble des multiples de m dans $\mathbb{N}^*$?
b) Soient A et B deux parties disjointes de $\mathbb{N}^*$ admettant une densité. Montrer que $A \cup B$ admet une densité que l'on précisera.
c) Donner un exemple de partie de $\mathbb{N}^*$ n'admettant pas de densité.

96. [PLSR] On considère une suite $a \in \{2,3\}^{\mathbb{N}^*}$ telle que $a_1 = 2$ et, pour tout $n \geqslant 1$, le nombre de 3 apparaissant dans la suite a entre la n-ième occurrence de 2 et la $(n+1)$-ième occurrence de 2 soit égal à a_n.
Étudier la convergence de la suite de terme général $\dfrac{1}{n}\left|\{k \in [\![1,n]\!],\ a_k = 3\}\right|$.

97. ★★ [PLSR] On considère une suite $a \in \{2,3\}^{\mathbb{N}^*}$ telle que $a_1 = 2$ et, pour tout $n \geqslant 1$, le nombre de 3 apparaissant dans la suite a entre la n-ième occurrence de 2 et la $(n+1)$-ième occurrence de 2 soit égal à a_n. Montrer qu'il existe un unique irrationnel α tel que les indices $n \geqslant 1$ tels que $a_n = 2$ soient exactement les entiers de la forme $\lfloor m\alpha \rfloor + 1$ pour un $m \in \mathbb{N}$.

98. ★★ [PLSR] Une suite réelle (x_n) est dite équirépartie modulo 1 si elle vérifie, pour tout entier $k \in \mathbb{Z}^*$, $\lim\limits_{N\to+\infty} \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{n=1}^{N} e^{2ik\pi x_n} = 0$.
a) Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Montrer que la suite $(n\alpha)$ est équirépartie modulo 1.
b) Soit $(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$. On suppose que pour tout $h \in \mathbb{N}^*$, la suite $(x_{n+h} - x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est équirépartie ; on veut montrer que (x_n) est équirépartie modulo 1.
i) Soit (a_n) une suite de complexes de module $\leqslant 1$. Montrer, pour tous $N, H \in \mathbb{N}^*$: $\left|\dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{n=1}^{N} a_n\right| \leqslant \left|\dfrac{1}{H}\displaystyle\sum_{h=0}^{H-1} \dfrac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} a_{n+h}\right| + \dfrac{2H}{N}$.
ii) Montrer que $\left|\dfrac{1}{H}\displaystyle\sum_{h=0}^{H-1} \dfrac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} a_{n+h}\right| \leqslant \sqrt{\dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\left|\sum_{h=0}^{H-1}\dfrac{a_{n+h}}{H}\right|^2}$.
iii) Conclure.
c) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ non constant et de coefficient dominant irrationnel. Montrer que $(P(n))_{n\geqslant 1}$ est équirépartie modulo 1.
d) Soit $(x_n)_{n\geqslant 1}$ une suite réelle équirépartie modulo 1, et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue 1-périodique. Montrer que $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(x_k) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f$.
e) On reprend les hypothèses de la question ***c)***. Montrer que la distance de $P(\mathbb{Z})$ à $\mathbb{Z}$ est nulle.

99. [SR] Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$, on note A_n la matrice $\begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & 0 & a_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & a_2 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$ où, pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, $a_k = f\left(\dfrac{k}{n}\right)$.
Soit $q \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la limite de $(\mathrm{tr}\,(A_n^q))_{n\geqslant 2}$.

100. ★ [PLSR] Montrer la convergence et calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} \left\lfloor \frac{\ln(k)}{\ln(2)} \right\rfloor$.

101. ⋆ ⋆ [PLSR] On note $\ell^2(\mathbb{R})$ l'ensemble des suites réelles de carré sommable indexées par $\mathbb{N}$. On se donne une suite presque nulle $v \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ ainsi qu'une suite $(u_k)_k$ d'éléments de $\ell^2(\mathbb{R})$ (l'élément u_k est donc noté $(u_{k,i})_{i\in\mathbb{N}}$). On suppose que, pour tout entier $p \geqslant 2$, la suite de terme général $w_k = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(u_{k,n})^p$ converge vers $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(v_n)^p$.

Montrer que $\inf_{\sigma\in\mathfrak{S}(\mathbb{N})} \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(u_{k,\sigma(n)} - v_n)^2 \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

102. ⋆ [P] Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ nulle sur $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ et telle que $f\left(\dfrac{p}{q}\right) = \dfrac{1}{q}$ si $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ sont premiers entre eux. Quels sont les points de continuité de f ?

103. ⋆ [L] Soient I un intervalle ouvert, $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable et $[a, b] \subset I$ avec $a < b$. On suppose que $f'(a) = f'(b)$. Montrer qu'il existe $c \in\,]a, b[$ tel que la tangente au graphe de f en c passe par le point $(a, f(a))$.

104. [L] Construire une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui ne soit dérivable en aucun point.

105. ⋆ [PLSR] Déterminer les applications f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que, pour tout entier $n \geqslant 2$, f^n (puissance) soit polynomiale.

106. [L] Soit $p > 1$ un réel. Montrer qu'il existe une constante $k_p > 0$ telle que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $|x|^p + |y|^p = 2$, on ait $(x-y)^2 \leqslant k_p\,(4 - (x+y)^2)$.

107. [L] Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On note $f^*(s) = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}}(sx - f(x))$ et $f^{**}(x) = \sup\limits_{s\in\mathbb{R}}(sx - f^*(s))$.
Montrer que $f^{**}(x) = \sup\limits_{a \text{ affine } \leqslant f} a(x)$.

108. [PLSR] Soient I un ensemble fini et $(P_i)_{i\in I}$ une famille de polynômes réels stable par dérivation. On définit une fonction signe par $\operatorname{sign}(x) = \dfrac{x}{|x|}$ si $x \neq 0$ et $\operatorname{sign}(0) = 0$.
Pour $\varepsilon \in \{-1, 1, 0\}^I$, soient $A_\varepsilon = \{t \in \mathbb{R}\ ;\ \forall i \in I,\ \operatorname{sign}(P_i(t)) = \varepsilon(i)\}$ et
$B_\epsilon = \{t \in \mathbb{R}\ ;\ \forall i \in I, \operatorname{sign}(P_i(t)) \in \{\varepsilon(i), 0\}\}$.
a) Montrer que A_ε est soit vide, soit réduit à un point, soit un intervalle ouvert.
b) Si A_ε est non vide, montrer que B_ε est l'adhérence de A_ε. Si A_ε est vide, montrer que B_ε est soit vide soit un singleton.

109. [PLSR] Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$.
a) Soient $x_0, \dots, x_n$ des points de I. On note $V(x_0, \dots, x_n)$ le déterminant de Vandermonde associé à $(x_0, \dots, x_n)$. Montrer qu'il existe $\tau \in I$ tel que

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^{n-1} & f(x_0) \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} & f(x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} & f(x_n) \end{vmatrix} = \frac{f^{(n)}(\tau)}{n!}\, V(x_0, x_1, \dots, x_n).$$

b) On suppose que $n = 2$, que I est un segment et que f est strictement convexe. On note $\Gamma_f = \{(x, f(x)); x \in I\} \subset \mathbb{R}^2$ le graphe de f. Montrer qu'il existe une constante C, dépendant uniquement de I et f, telle que le nombre de points de $\Gamma_f \cap \dfrac{1}{N}\mathbb{Z}^2$ soit majoré par $C\,N^{2/3}$ pour tout entier $N \geqslant 1$.

110. [SR] Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $w_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n(x)\,\mathrm{d}x$.
a) Montrer que $(w_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante.
b) Établir une relation de récurrence entre w_{n+2} et w_n.
c) Sans utiliser la formule de Stirling, déterminer un équivalent simple de w_n.
d) Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum w_n x^n$.

111. ★★ [L] Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ ne s'annulant pas sur $\mathbb{U}$.
a) Montrer que le nombre de racines de P de module strictement inférieur à 1 comptées avec multiplicité n'est autre que $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \dfrac{e^{it}\,P'(e^{it})}{P(e^{it})}\,\mathrm{d}t$.
b) Soit $Q \in \mathbb{C}[X]$ ne s'annulant pas sur $\mathbb{U}$ et tel que $\forall z \in \mathbb{U},\ |P(z) - Q(z)| < |Q(z)|$. Montrer que P et Q ont même nombre de racines de module strictement inférieurs à 1 comptées avec multiplicité.

112. [L] Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $A_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}(x)\,\mathrm{d}x$ et $B_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos^{2n}(x)\,\mathrm{d}x$. On admet que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $2nA_n = (2n-1)A_{n-1}$.
a) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{2B_0}{A_0} - \frac{2B_n}{A_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
b) En déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ puis que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} + O\left(\frac{1}{n}\right)$.

113. ★ Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue et presque périodique c'est-à-dire telle que, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $T > 0$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}^+, \forall n \in \mathbb{N}, |f(x+nT) - f(x)| \leqslant \epsilon$.
Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue et presque périodique.
a) Montrer que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$.
b) Montrer que $t \mapsto \dfrac{1}{t}\displaystyle\int_0^t f$ possède une limite quand $t \to +\infty$.

114. [L] Soit f une fonction continue par morceaux et croissante de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 f(x)e^{i\lambda x}\mathrm{d}x \underset{\lambda\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$.

115. [PLSR] Soient $f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_n$ des fonctions de $\mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$. Soit A la matrice de terme général $A_{i,j} = \displaystyle\int_0^1 f_i(x)g_j(x)\,\mathrm{d}x$.
On pose $B(x_1, \dots, x_n) = \det\big(f_i(x_j)\big)$ et $C(x_1, \dots, x_n) = \det\big(g_i(x_j)\big)$.

Montrer que $\displaystyle\int_{[0,1]^n} B(x_1,\ldots,x_n)\,C(x_1,\ldots,x_n)\,\mathrm{d}x_1\ldots\mathrm{d}x_n = n!\det(A)$.

116. [L] ***a)*** La fonction $f : x \in [1,+\infty[\mapsto \dfrac{\sin(x^2)}{x}$ est-elle uniformément continue ?
b) Soit f une fonction de classe C^1 de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ admettant une limite en $+\infty$ et telle que f' est uniformément continue. Est-ce que f' a une limite en $+\infty$?

117. [Rennes sur dossier] Soient $d, N \in \mathbb{N}$ tels que $N > d$. Soient $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes à coefficients réels de degré au plus d et $x_1, ..., x_N$ des réels distincts. On suppose que pour tout $j \in \{1, ..., N\}$, la suite $(P_n(x_j))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Montrer que l'on peut extraire de $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge uniformément sur $[0,1]$ vers un polynôme de degré au plus d.

118. [SR] Montrer que la suite de fonctions de terme général $f_n : x \mapsto (\sin x)^n \cos(x)$ converge uniformément sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

119. [PLSR] On note I (resp. S) l'ensemble des fonctions $f : [0,1] \to [0,1]$ telles que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\{x \in [0,1], f(x) \leqslant a\}$ est fermé (resp. de même avec l'inégalité dans l'autre sens).
a) Montrer que $S \cap I$ est l'ensemble C des fonctions continues de $[0,1]$ dans $[0,1]$.
b) Soit $f : [0,1] \to [0,1]$. On pose $f_n : x \mapsto \inf(\{1\} \cup \{f(y) + n|x-y|, y \in [0,1]\})$ pour $n \in \mathbb{N}$. Montrer que f_n est continue pour tout n, que la suite (f_n) est croissante et que $f \in I$ si et seulement si la suite (f_n) converge simplement vers f.

120. $\star\star$ [PLSR] Soit $\Lambda \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ telle que $\Lambda(n) = \ln(p)$ si $n = p^k$ avec p premier et $k \in \mathbb{N}^*$, et $\Lambda(n) = 0$ sinon. On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers.
a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{d|n} \Lambda(d) = \ln(n)$.
b) Montrer que, pour tout $s > 1$, $\displaystyle\left(\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\Lambda(n)}{n^s}\right)\left(\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^s}\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\ln(n)}{n^s}$.
c) Montrer que, pour tout $s > 1$, $\displaystyle\sum_{p\in\mathcal{P}} \frac{\ln(p)}{p^s} \underset{s\to 1^+}{=} \frac{1}{s-1} + O(1)$.
d) Montrer que, pour tout $s > 1$, $\displaystyle\sum_{p\in\mathcal{P}} \frac{1}{p^s} \underset{s\to 1^+}{=} \ln\left(\frac{1}{s-1}\right) + O(1)$. Qu'en déduire ?

121. [L] Soit $q \geqslant 2$ entier. On se donne un caractère non trivial χ sur le groupe des inversibles $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times$, c'est-à-dire un morphisme de groupes non constant $\chi : ((\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times, \times) \longrightarrow (\mathbb{U}, \times)$. Pour $m \in \mathbb{Z}$, on pose alors $\widetilde{\chi}(m) = 0$ si q n'est pas premier avec m, et $\widetilde{\chi}(m) = \chi(\overline{m})$ sinon (où $\overline{m}$ désigne la classe de m modulo q).
a) Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\chi(m)}{m^s}$ converge si et seulement si $s > 0$.

b) Montrer que la fonction $s \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\chi(m)}{m^s}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

122. ★ ★ [P] Soient $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, décroissante de limite nulle en $+\infty$ et $g : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n f(nx)$. Quelle est la limite de g en 0^+ ?

123. [L] Pour tout polynôme trigonométrique $P : \theta \mapsto \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(P)e^{ik\theta}$ (somme à support fini) et pour tout $d \in \mathbb{R}$, on pose $\|P\|_{h^d}^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k(P)|^2(1+|k|)^{2d}$.
On admet que $\| \ \|_{h^d}$ est une norme sur l'espace vectoriel $\mathcal{T}$ des polynômes trigonométriques pour tout $d \in \mathbb{R}$. Soit E l'espace des fonctions continues par morceaux et 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. On définit le produit de convolution de deux fonctions $f, g \in E$ par : $f \star g : \varphi \mapsto \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)g(\varphi-\theta)\mathrm{d}\theta$. Enfin, on pose, pour $f \in E$, $\|f\|_2{}^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)|^2\mathrm{d}\theta$.
a) Montrer qu'il existe $d \in \mathbb{R}$ et $c = c(d) \in \mathbb{R}^+$ tels que, pour tous $f, g \in \mathcal{T}$, $\|f \star g\|_2 \leqslant c(d)\|f\|_{h^d}\|g\|_2$.
b) Déterminer tous les réels d vérifiant la condition de la question précédente.
c) Soit f de classe $\mathcal{C}^\infty$ et 2π-périodique. On pose, pour $k \in \mathbb{Z}$, $c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)e^{-ik\theta}\mathrm{d}\theta$ et, pour tout $d \in \mathbb{R}$, $\|f\|_{h^d}^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k(f)|^2(1+|k|)^{2d}$. Déterminer les $d \in \mathbb{R}$ tels que $\|f\|_{h^d} < +\infty$.
d) Soient f, g de classe $\mathcal{C}^\infty$ et 2π-périodiques et $d \in \mathbb{R}$. Calculer $\|f \star g\|_{h^d}$.

124. [PLSR] Soient $p \geqslant 2$ et $q \geqslant 2$ deux entiers tels que $p \wedge q = 1$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$, on pose $f(z) = \frac{1-z^{pq}}{(1-z^p)(1-z^q)}$. Écrire $f(z)$ sous la forme $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$ et trouver le plus grand $n \geqslant 0$ tel que $c_n = 0$.

125. ★★ [L] Soient $R \in \mathbb{R}^{+*}$, f et g deux fonctions développables en série entière sur $]-R, R[$ telles que $\forall x \in]-R, R[$, $\int_0^x f(t)g(x-t)\mathrm{d}t = 0$. Montrer que l'une au moins des deux fonctions f et g est identiquement nulle sur $]-R, R[$.

126. [SR] Soient $f : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ et $g : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} z^{2^n}$.
a) Déterminer les rayons de convergence de f et g.
b) Trouver les complexes $z \in \mathcal{S}(0,1)$ tels que $f(z)$ converge.
c) Montrer que f admet un prolongement $\tilde{f}$ sur $\mathbb{C} \setminus \{1\}$, développable en série entière en tout point de $\mathbb{C} \setminus \{1\}$.
d) Montrer que $|g(r)| \to +\infty$ quand $r \to 1$ avec $r \in \mathbb{R}$.

e) Montrer que, si $z \in \mathcal{B}(0,1)$, alors $g(z^2) = g(z) - z$.
f) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{U}_{2^n}$. Montrer que $|g(r\alpha)| \to +\infty$ quand $r \to 1$ avec $r \in \mathbb{R}$.
g) Soit $h : z \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2^n+1}}{2^n+1}$. Montrer que h est continue sur $\overline{\mathcal{B}}(0,1)$.
h) Montrer que, pour tout $z_0 \in \mathcal{S}(0,1)$, $\varepsilon > 0$ et $\tilde{h}$, prolongement de h sur $\overline{\mathcal{B}}(0,1) \cup \mathcal{B}(z_0,\varepsilon)$, la fonction $\tilde{h}$ n'est pas développable en série entière en z_0.

127. [PLSR] Soit $\alpha = (\alpha_i)_{i \geqslant 1}$ une suite de $\mathbb{Z}$ nulle à partir d'un certain rang. Pour $n \geqslant 1$, on pose $u_n = \displaystyle\prod_{i \in \mathbb{N}^*} ((in)!)^{\alpha_i}$.
a) Déterminer, selon la valeur de α, le rayon de convergence R de la série entière $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} u_n z^n$.
Dans la suite, on note f la somme de cette série entière.
b) Expliciter f si $\alpha = (-\delta_{i,1})_{i \geqslant 1}$.
c) Pour une somme g de série entière sur un intervalle $]-a, a[$ non trivial, on pose $\Delta(g)$: $z \mapsto z g'(z)$. Expliciter $P(\Delta)(g)$ lorsque $g : z \mapsto z^k$ avec $k \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$.
d) Soit $v \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}^*}$ une suite complexe, et $P \in \mathbb{R}[X]$ sans racine dans $\mathbb{N}^*$ tels que, pour tout $n \geqslant 1$, $v_{n+1} = \dfrac{v_n}{P(n+1)}$. Montrer que $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} v_n z^n$ a un rayon de convergence non nul et donner une méthode simple pour trouver une équation différentielle linéaire non triviale à coefficients polynomiaux dont sa somme est solution.
e) Résoudre le même problème qu'en (d) lorsqu'il existe P et Q dans $\mathbb{R}[X]$ sans racine dans $\mathbb{N}^*$ telles que $v_{n+1} = \dfrac{Q(n+1)}{P(n+1)} v_n$ pour tout $n \geqslant 1$, et en supposant cette fois-ci que $\deg(Q) \leqslant \deg(P)$.
f) Justifier que le cadre de la question ***e)*** s'applique bien à la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ lorsque $R > 0$.

128. [PLSR] Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \dfrac{n!\,(30n)!}{(15n)!\,(10n)!\,(6n)!}$.
a) Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$, u_n est un entier.
b) Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum u_n x^n$.
c) Trouver une équation différentielle vérifiée par la somme de la série entière précédente.

129. ★★ [SR] Existe-t-il une partie A de $\mathbb{N}$ telle que $\displaystyle\sum_{n \in A} \frac{x^n}{n!} \underset{x \to +\infty}{\sim} e^{\sqrt{x}}$?

130. [SR] ***a)*** Soit $f : z \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ la somme d'une série entière de rayon $R > 0$. Montrer que, pour tout $0 < r < R$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n r^n = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-in\theta} \mathrm{d}\theta$.
b) Soit f une fonction développable en série entière de rayon de convergence égal à 1. On suppose que f est prolongeable par continuité sur le disque fermé $D_f(0,1)$. Expliquer pourquoi la formule de Cauchy ci-dessus reste vraie pour $r = 1$.

c) Soit $f : x \in]-1,1[\mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x}} e^{-\frac{1-x}{1+x}}$. Montrer que f est développable en série entière au voisinage de 0.
d) On admet que le rayon de convergence du développement de f en 0 vaut 1. Montrer que les coefficients du développement en série entière en 0 de f sont bornés par $M > 0$. Exprimer M en fonction de f.

131. [L] Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, \mathrm{d}x$ à l'aide de la transformation de Laplace.

132. ★ [L] Soit $(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^-$ tel que $\forall x \in [0,1],\ 1 + ax + bx^2 \geqslant 0$.
a) Si $a \in \mathbb{R}^+$, montrer que $n\displaystyle\int_0^1 \left(1 + ax + bx^2\right)^n \mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
b) Si $a \in \mathbb{R}^{-*}$, montrer que $n\displaystyle\int_0^1 \left(1 + ax + bx^2\right)^n \mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\frac{1}{a}$.

133. ★ [L] Soit, pour $x \in \mathbb{R}^+$, $f(x) = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{e^{2x}\cos^2(t) + e^{-2x}\sin^2(t)}}$.
Montrer qu'il existe $(a,b) \in \left(\mathbb{R}^+\right)^2$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ f(x) \leqslant (ax+b)e^{-x}$.

134. [SR] Pour x réel, on pose $J(x) = \displaystyle\int_0^{\pi} \cos(x \sin t)\, \mathrm{d}t$.
a) Calculer $J(0)$.
b) Montrer que J est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
c) En estimant $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}+\varepsilon} \cos(x \sin t)\, \mathrm{d}t$ pour un ε à choisir convenablement en fonction de x, établir que $J(x) = O(x^{-1/2})$ quand $x \to +\infty$.

135. [L] Soient f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$. On pose $f \star g : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\, g(x-t)\, \mathrm{d}t$. Montrer que $f \star g$ est dérivable et donner une expression de sa dérivée.

136. [L] Soit $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ continue. Pour $n \geqslant 1$ et $s < t$ dans $]0,1[$, on pose
$a_n(f,s,t) = \dfrac{2}{t-s} \displaystyle\int_s^t f(u) \cos\left(\frac{2n\pi}{t-s}(u-s)\right) \mathrm{d}u.$
a) On suppose f strictement convexe. Montrer que $a_1(f,s,t) > 0$ pour tous $s < t$ dans $]0,1[$.
b) On suppose f strictement convexe. Montrer que $a_n(f,s,t) > 0$ pour tous $s < t$ dans $]0,1[$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$.
c) Réciproquement, on suppose f de classe $\mathcal{C}^2$ et $a_1(f,s,t) > 0$ pour tous $s < t$ dans $]0,1[$. Montrer que f est strictement convexe.

137. [PLSR] Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} y^{(k)} = 0$.
À quelle condition sur n tout élément de $\mathcal{S}$ possède-t-il une limite en $+\infty$?

138. ⋆ ⋆ [P] Soit I un (vrai) intervalle de $\mathbb{R}$.
Si $r \in \mathbb{N}^*$ et $f_1, \ldots, f_r \in \mathcal{C}^{r-1}(I, \mathbb{R})$, on pose $W_r(f_1, \ldots, f_r) = \det\left(\left(f_j^{(i-1)}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant r}\right)$.
Soient $r \in \mathbb{N}^*$, $f_1, \ldots, f_r \in \mathcal{C}^{r-1}(I, \mathbb{R})$.
a) Soit $g \in \mathcal{C}^{r-1}(I, \mathbb{R})$. Montrer que $W_r(gf_1, \ldots, gf_r) = g^r\, W_r(f_1, \ldots, f_r)$.
b) On suppose que, pour tout $k \in [\![1, r]\!]$, $W_k(f_1, \ldots, f_k)$ ne s'annule pas. Montrer que, pour tout $(a_1, \ldots, a_r) \in \mathbb{R}^r$ non nul, la fonction $a_1 f_1 + \cdots + a_r f_r$ s'annule au plus $(r-1)$ fois sur I.
c) On suppose que $W_r(f_1, \ldots, f_r)$ est identiquement nul sur I et que $W_{r-1}(f_1, \ldots, f_{r-1})$ ne s'annule pas. Montrer que $(f_1, \ldots, f_r)$ est liée.

139. [SR] On considère l'équation différentielle (D_λ) : $y'' + (\lambda - r)y = 0$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$, $r \in C^\infty(I, \mathbb{R})$, où I un intervalle contenant $[0, 1]$. On considère E_λ l'espaces des solutions y de (D_λ) telles que $y(0) = 0$, $y(1) = 0$.
a) Quelles sont les dimensions possibles de E_λ ?
b) Caractériser le cas $\dim(E_\lambda) = 1$. (On souhaite une condition portant sur y_λ, solution du problème de Cauchy (D_λ), $y_\lambda(0) = 0$, $y'_\lambda(0) = 1$.)
c) Montrer que, à r fixé, les E_λ sont orthogonaux pour le produit scalaire $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_0^1 fg$.
d) On note N_λ le nombre de zéros de y_λ sur $[0, 1]$. Pourquoi est-il fini ?
e) Calculer N_λ dans le cas $r = 0$, $\lambda > 0$.
f) Dans le cas général, étudier le comportement de N_λ.

140. [SR] Soient I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, et a, b deux fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle (E) : $x'' + a(t)\, x' + b(t)\, x = 0$.
a) Soit x une solution non nulle de (E). Montrer que les zéros de x sont isolés.
b) On suppose a de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer qu'il existe z de classe $\mathcal{C}^2$ de I dans $\mathbb{R}$, et $q : I \to \mathbb{R}$ continue telles que $x \mapsto [t \mapsto x(t)\, e^{z(t)}]$ définisse une bijection de l'ensemble des solutions de (E) sur celui des solutions de $y'' + q(t)\, y = 0$.
c) Soient q_1, q_2 deux fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$ telles que $q_1 \leqslant q_2$. On considère l'équation différentielle (E_i) : $y'' + q_i(t)\, y = 0$ pour $i \in \{1, 2\}$. Soient y_1, y_2 des solutions respectives de (E_1) et (E_2) sur I. Soient $\alpha < \beta$ deux zéros consécutifs de y_1. Montrer que y_2 s'annule dans $[\alpha, \beta]$.
d) Soient $q : I \to \mathbb{R}$ continue, et m, M deux réels strictement positifs tels que $m \leqslant q \leqslant M$. Soient $\alpha < \beta$ deux zéros consécutifs d'une solution non nulle de $y'' + q(t)y = 0$. Montrer que $\dfrac{\pi}{\sqrt{M}} \leqslant \beta - \alpha \leqslant \dfrac{\pi}{\sqrt{m}}$.

141. [SR] Soient A une application continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, M l'unique application dérivable de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M(0) = I_n$ et $\forall t \in \mathbb{R}^+,\ M'(t) = A(t)M(t)$. Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}^+,\ \det(M(t)) = \exp\left(\int_0^t \operatorname{Tr} A\right)$.

142. [PLSR] Soit $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, non identiquement nulle, π-périodique et telle que $\int_0^\pi p(t)\mathrm{d}t \geqslant 0$ et $\int_0^\pi |p(t)|\mathrm{d}t \leqslant \frac{\pi}{4}$. Montrer que l'équation $u''+pu = 0$ n'admet pas de solution u non nulle sur $\mathbb{R}$ telle qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}$, $u(t+\pi) = \lambda\, u(t)$.

143. [PLSR] Soit $A_0 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{Sp}(A_0 + A_0^T) \subset \mathbb{R}^-$.
On admet l'existence d'une unique fonction $A : \mathbb{R}^+ \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A(0) = A_0$ et $\forall t \geqslant 0,\ A'(t) = (A(t))^2 - (A(t)^T)^2$. Montrer que la fonction A a une limite en $+\infty$ et expliciter cette limite.

144. [L] Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Décrire le comportement asymptotique en $+\infty$ des solutions de l'équation différentielle $X'(t) = AX(t)$.

145. [SR] On considère l'équation différentielle $(1)\ X'(t) = P(t)X(t)$ où P est une application continue et périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
a) Résoudre (1) si $\forall t \in \mathbb{R},\ P(t) = \begin{pmatrix} 1 & \cos(t) \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
b) On revient au cas général. Soit $T \in \mathbb{R}^{+*}$ une période de P. On note $X_1, \dots, X_n$ une base de l'espace des solutions de (1) et, si $t \in \mathbb{R}$, $M(t) = (X_1(t), \dots, X_n(t))$. Montrer qu'il existe $C \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $\forall t \in \mathbb{R},\ M(t+T) = M(t)C$.
c) Avec les notations de la question précédente, montrer qu'il existe $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ tel que l'application $t \in \mathbb{R} \mapsto M(t)e^{-tA}$ soit T-périodique.

146. [PLSR] ***a)*** Soit $f\ :\ (x,y)\ \mapsto\ \left(\ln\left(x^2+y^2\right), \arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right)$. Donner le domaine de définition Ω de f. Étudier la continuité et la différentiabilité de f.
b) On identifie naturellement $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}$. Montrer que, si $(x,y) \in \Omega$, $df_{(x,y)}$ est $\mathbb{C}$-linéaire.

147. [PLSR] Calculer $\displaystyle\sup_{a,b,c>1} \left(1-\frac{1}{a}\right)^b + \left(1-\frac{1}{2b}\right)^c + \left(1-\frac{1}{3c}\right)^a$.

148. [PLSR] Trouver $\displaystyle\sup_{a,b,c\geqslant 1} \left(1-\frac{1}{a}\right)^b \left(1-\frac{1}{2b}\right)^c \left(1-\frac{1}{3c}\right)^a$.

149. [Rennes sur dossier] Soient $q \in \mathbb{R}^+$, $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ x+y = 1\}$. Déterminer $\displaystyle\min_{(x,y)\in D}(x^q + y^q)$.

150. [PLSR] Soient $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n$.
Déterminer les extrema de $x \in \mathbb{R}^n \mapsto \frac{1}{2}\,\langle Ax, x\rangle - \langle b, x\rangle$.

151. ★★ [PLSR] Soient f une application différentiable convexe de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, $L \in \mathbb{R}^{+*}$.
a) Montrer que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n,\ \langle \nabla f(y) - \nabla f(x), y - x\rangle \geqslant 0$.
b) On suppose que l'application ∇f est L-lipschitzienne.
Montrer que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n,\ \langle \nabla f(y) - \nabla f(x), y - x\rangle \geqslant \dfrac{1}{L}\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\|^2$.

152. [L] Soit $p > 1$. Montrer qu'il existe $K_p \in \mathbb{R}$ tel que, pour tous x, $y \in \mathbb{R}$ tels que $|x|^p + |y|^p = 2$, on a $(x - y)^2 \leqslant K_p(4 - (x + y)^2)$.

153. [PLSR] Soient f une application de classe C^1 de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$, $x \in \mathbb{R}^n$ telle que df_x soit injective. Montrer qu'il existe un voisinage de x dans $\mathbb{R}^n$ sur lequel f est injective.

154. [L] On identifie $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}$. Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^2 et telle que $\Delta f = 0$. Montrer que $f(0) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})\mathrm{d}t$.

155. ★ ★ [P] On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme euclidienne canonique notée $\|\ \|$ et on note B la boule unité fermée de cet espace. Soient f une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ de classe C^1 et telle que, pour tout $(u, v) \in B^2$, $\| - f(0) + v - df_u(v)\| \leqslant \dfrac{1}{2}$. Montrer que f s'annule exactement une fois sur B.

Géométrie

156. [SR] ***a)*** Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique $T_n \in \mathbb{Z}[X]$ tel que
$\forall \theta \in \mathbb{R},\ T_n(2\ \cos(\theta)) = 2\ \cos(n\theta)$.
b) Si $n \in \mathbb{N}^*$, quel est le terme de plus haut degré de T_n ? En déduire les $r \in \mathbb{Q}$ tels que $\cos(\pi r) \in \mathbb{Q}$.
c) Déterminer les triangles du plan euclidien dont les côtés ont des longueurs rationnelles et les angles sont des multiples rationnels de π.

157. ★★ [P] Soit G un groupe d'isométries affines de $\mathbb{R}^2$ tel que, pour tout point x, il existe $g \in G$ tel que $g(x) \neq x$. Montrer que G contient une translation autre que l'identité de $\mathbb{R}^2$.

158. ★★ [P] Soit S le groupe (pour la composition) des applications de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ de la forme $z \mapsto az + b$ avec $a \in \mathbb{U}$ et $b \in \mathbb{C}$. Soit G un sous-groupe de S vérifiant les conditions suivantes :
- si $g \in G$, $g(0)$ est nul ou de module supérieur ou égal à 1 ;
- l'ensemble des $b \in \mathbb{C}$ tels que $z \mapsto z + b$ appartienne à G contient deux éléments $\mathbb{R}$-linéairement indépendants.

Montrer que $\{a \in \mathbb{U}\ ;\ \exists b \in \mathbb{C},\ z \mapsto az + b \in G\}$ est fini.

159. [SR] Soit L la courbe du plan complexe d'équation $|z|^2 = \cos(2\arg(z))$.
a) Trouver une équation cartésienne réelle définissant L.
b) En déduire une paramétrisation de $L \cap (\mathbb{R}^+)^2$ sous la forme $\{(x(r), y(r)),\ r \in [0, 1]\}$.

c) Montrer que la longueur de la courbe L entre le point $(0,0)$ et le point $(x(r),y(r))$ s'écrit : $A(r)=\displaystyle\int_0^r \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t$.
d) Montrer que A définit une bijection de $[-1,1]$ dans un intervalle de la forme $[-w,w]$ où $w>0$.
e) On définit $B=A^{-1}$. Montrer que B vérifie une équation différentielle du second ordre.

160. [L] Soit (e_1,e_2) une famille libre de vecteurs de $\mathbb{R}^2$. On pose $L=\mathbb{Z}e_1+\mathbb{Z}e_2$ et on note $\mathrm{Vol}(L)=|\det(e_1,e_2)|$.
a) Soit A un disque fermé de $\mathbb{R}^2$, d'aire strictement supérieure à $\mathrm{Vol}(L)$. Montrer qu'il existe deux éléments distincts x et y de A tels que $x-y\in L$.
b) Soit $\varepsilon>0$. Montrer qu'il existe dans $L\setminus\{0\}$ un élément ℓ tel que $\|\ell\|\leqslant\dfrac{2+\varepsilon}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\mathrm{Vol}(L)}$.
c) Soit p un nombre premier congru à 1 modulo 4.
i) Montrer qu'il existe $\omega\in\mathbb{Z}$ tel que p divise $1+\omega^2$.
ii) Montrer qu'il existe $(a,b)\in\mathbb{Z}^2$ tel que $p=a^2+b^2$.

161. [P] ***a)*** On note D le disque unité du plan euclidien $\mathbb{R}^2$. Démontrer qu'il existe une suite $(C_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de parties de D telle que :
i) pour tout $i\in\mathbb{N}$, l'ensemble C_i soit un carré de $\mathbb{R}^2$ dont les côtés sont parallèles aux axes ;
ii) les C_i soient d'intérieurs disjoints ;
iii) $\displaystyle\sum_{i\in\mathbb{N}}\mathrm{Aire}(C_i)=\pi$.
b) On note $C=[-1,1]^2$. Démontrer qu'il existe une suite $(D_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de parties de C telle que :
i) pour tout $i\in\mathbb{N}$, l'ensemble D_i soit un disque fermé de $\mathbb{R}^2$;
ii) les D_i soient d'intérieurs disjoints ;
iii) $\displaystyle\sum_{i\in\mathbb{N}}\mathrm{Aire}(D_i)=4$.

Probabilités

162. [L] On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des parties de A de $\mathbb{N}$ telles que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{|A\cap[\![1,n]\!]|}{n}$ existe. Est-ce que $\mathcal{A}$ est une tribu ?

163. [L] On pose, pour toute permutation $\sigma\in S_n$, $d(\sigma)=\displaystyle\sum_{k=1}^n|\sigma(k)-k|$ et on note, pour $p\in\mathbb{N}$, $q_{n,p}=|\{\sigma\in S_n,\ d(\sigma)=p\}|$. Montrer que, si $p\geqslant 2n$, alors $q_{n,p}$ est pair.

164. [SR] Un dérangement est une permutation $\sigma\in\mathcal{S}_n$ sans point fixe. On note D_n le sous-ensemble de $\mathcal{S}_n$ formé des dérangements.
a) Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur D_n. Calculer la probabilité que X soit une permutation paire.
Indications.
- On donne la formule d'inversion de Pascal : si (a_n) et (b_n) sont deux suites telles que

$\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_k$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} a_k$.
- On pourra calculer la différence du nombre d'éléments pairs et impairs de D_n.
b) Soit Y une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $\mathcal{S}_n$. Calculer la probabilité de $(Y \in D_n)$ sachant que Y est paire.

165. ★★ [PLSR] Soient $m \geqslant 1$ et $r \geqslant 1$ deux entiers. On munit l'ensemble des morphismes de groupes de $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^r$ dans $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ de la loi uniforme. Donner une expression simple de la probabilité de l'événement « le morphisme φ est surjectif ».

166. [PLSR] Deux joueurs A et B lancent une pièce truquée donnant pile avec une probabilité égale à $5/9$. Les règles de gain sont les suivantes : pile rapporte 5 euros et face 4 euros. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, chacun des joueurs effectue $9n$ lancers indépendants ; on note A_n (resp. B_n) la variable aléatoire donnant le gain du joueur A (resp. B).
a) Trouver un équivalent, lorsque n tend vers $+\infty$, de $\mathbf{P}(A_n = B_n)$.
b) Montrer que $\mathbf{P}(A_n \geqslant B_n) \geqslant \dfrac{1}{2}$.
c) Vers quoi tend $\mathbf{P}(A_n < B_n)$?

167. [L] On joue à pile ou face avec une pièce pipée : la probabilité de tomber sur pile est $p < 1/2$. On effectue plusieurs lancers à la suite. Le score est le nombre de fois où l'on est tombé sur pile. On gagne le jeu si, au bout de $2n$ lancers, le score est supérieur à $n+1$. Trouver n qui maximise la probabilité de gagner le jeu au bout de $2n$ lancers.

168. ★★ [PLSR] Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que $\mathbf{E}(X) = 1, \mathbf{E}(X^2) = 2$ et $\mathbf{E}(X^3) = 5$. Quelle est la valeur minimale de $\mathbf{P}(X = 0)$?

169. [L] Soient $n \in \mathbb{N}$ un entier impair $\geqslant 3$, $(X_m)_{m \geqslant 0}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ telle que $X_0 = 0$, et pour $m \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(X_{m+1} = k+1 \mid X_m = k) = \mathbf{P}(X_{m+1} = k-1 \mid X_m = k) = \dfrac{1}{2}$. Montrer que $(X_m)_{m \geqslant 1}$ converge en loi vers la loi uniforme sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

170. [PLSR] Pour $\sigma \in \mathcal{S}_n$ on note $I(\sigma)$ le nombre d'inversions de σ c'est-à-dire le nombre de couples (i,j) avec $i < j$ et $\sigma(i) > \sigma(j)$.
a) Montrer que $P_n = \displaystyle\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} X^{I(\sigma)} = \prod_{k=1}^{n-1} (1 + X + \cdots + X^k)$.
b) On pose $f(n) = |\{\sigma \in \mathcal{S}_n,\ (n+1) \text{ divise } I(\sigma)\}|$. Exprimer $f(n)$ à l'aide de P_n.
c) Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers p tels que $f(p-1) < \dfrac{(p-1)!}{p}$ et de même une infinité de nombres premiers p tels que $f(p-1) > \dfrac{(p-1)!}{p}$.

171. [PLSR] Soient p un nombre premier, $n \in \mathbb{N}^*$, P une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur l'ensemble des polynômes unitaires de degré n de $\mathbb{F}_p[X]$, N le nombre de racines de P dans $\mathbb{F}_p$ (sans tenir compte des multiplicités). Calculer $\mathbf{E}(N)$ et $\mathbf{V}(N)$.

172. ⋆ [PLSR] Dans tout l'exercice, les variables aléatoires considérées sont supposées réelles, discrètes et à loi de support fini. Pour deux telles variables X et Y, on note $X \leqslant_c Y$ pour signifier que $\mathbf{E}(f(X)) \leqslant \mathbf{E}(f(Y))$ pour toute fonction convexe $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
a) Soient X une variable aléatoire vérifiant les conditions de l'exercice et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe. Montrer que $f(\mathbf{E}(X)) \leqslant \mathbf{E}(f(X))$.
b) Donner un exemple de couple (X, Y) pour lequel $X \leqslant_c Y$ mais $X \neq Y$.
c) Montrer que si $X \leqslant_c Y$ alors $\mathbf{E}(X) = \mathbf{E}(Y)$ et $\mathbf{V}(X) \leqslant \mathbf{V}(Y)$.
d) Montrer que $X \leqslant_c Y$ si et seulement si $\mathbf{E}(X) = \mathbf{E}(Y)$ et
$\forall a \in \mathbb{R},\ \displaystyle\int_a^{+\infty} \mathbf{P}(X \geqslant x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^{+\infty} \mathbf{P}(Y \geqslant x)\,\mathrm{d}x.$

173. ⋆⋆ [PLSR] On fixe $N \in \mathbb{N}^*$. On choisit de façon équiprobable $u_1 \in [\![1, N]\!]$, puis $u_2 \in [\![1, u_1 - 1]\!]$, et ainsi de suite jusqu'à arriver à $u_\ell = 1$ avec nécessairement $\ell \leqslant N$. On note $E_N = \{u_j,\ 1 \leqslant j \leqslant \ell\}$.
a) Calculer $\mathbf{P}(k \in E_N)$ pour $1 \leqslant k \leqslant N$.
b) Calculer $\mathbf{P}(2 \in E_N \mid 3 \notin E_N)$.
c) Calculer $\mathbf{E}(|E_N|)$ et $\mathbf{V}(|E_N|)$.

174. [SR] Dans tout l'énoncé, on fixe un entier $p \geqslant 1$.
a) Développer $(x_1 + \cdots + x_N)^p$ pour toute liste $(x_1, \ldots, x_N)$ de nombres réels.
b) Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires i.i.d. suivant la loi uniforme sur $\{-1, 1\}$. Soit $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. On pose $X = \displaystyle\sum_{i=1}^n a_i X_i$. Montrer que $\mathbf{E}(X^{2p}) \leqslant (2p)^p (\mathbf{E}(X^2))^p$.
c) Montrer que $\mathbf{E}(X^{2p}) \leqslant p^p (\mathbf{E}(X^2))^p$.
d) Soit $(a_k)_{k \geqslant 1}$ une suite réelle telle que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} a_k^2 = 1$. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $Y_x = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kx)\, X_i$.
Montrer que $\omega \mapsto \displaystyle\int_0^{2\pi} Y_x(\omega)^{2p}\,\mathrm{d}x$ prend au moins une valeur inférieure ou égal à $2\pi p^p$.

175. [SR] suivant la loi uniforme sur $\{1, -1\}$. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires i.i.d. suivant la loi de Rademacher, et $a_1, \ldots, a_n$ des réels. On pose $Y = \displaystyle\sum_{k=1}^n a_k X_k$.
a) Montrer que $\mathbf{E}(|Y|)^2 \leqslant \mathbf{E}(Y^2)$.
b) Montrer que $\mathbf{E}(Y^2) = \displaystyle\sum_{k=1}^n a_k^2$.
c) Montrer que si $\displaystyle\sum_{k=1}^n a_k^2 = 1$ alors $\mathbf{E}(Y^2) \leqslant e\,\mathbf{E}(|Y|)^2$.
d) Montrer que $\mathbf{E}(Y^2) \leqslant e\,\mathbf{E}(|Y|)^2$ en toute généralité.

176. [SR] Une variable aléatoire discrète réelle X est dite décomposable s'il existe deux variables aléatoires discrètes réelles non presque sûrement constantes et indépendantes X_1 et X_2 telles que $X \sim X_1 + X_2$.

a) Une variable aléatoire de Bernoulli est-elle décomposable ? Une variable aléatoire binomiale est-elle décomposable ?
b) Montrer que le polynôme $T^4 + 2T + 1$ ne peut se factoriser comme produit de deux polynômes de degré 2 à coefficients dans $\mathbb{R}^+$. En déduire une variable aléatoire réelle discrète décomposable X telle que X^2 ne soit pas décomposable.
c) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et X une variable aléatoire suivant la loi uniforme que $[\![0, n-1]\!]$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur n pour que X soit décomposable.

177. [L] Soit $p \in]0, 1/2[$. Soit $(X_k)_{k\geqslant 1}$ une suite de variables de Bernoulli i.i.d. de paramètre p. On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la plus grande valeur prise par la suite $(\mathbf{P}(S_{2n} > n))_{n\geqslant 1}$.

178. [SR] On fixe $n \in \mathbb{N}^*$ et on pose $X = [\![1, n]\!]$. Soient A et B des variables aléatoires indépendantes uniformément distribuées sur l'ensemble $\mathcal{P}(X)$ des parties de X.
a) Déterminer la loi, l'espérance et la variance de la variable aléatoire $|A|$ (cardinal de A).
b) Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, $\mathbf{P}\left(|A| \geqslant \left(\dfrac{1}{2} + \varepsilon\right) n\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
c) Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on note $\mathbf{1}_{\{i\}}$ la fonction indicatrice du singleton $\{i\}$. Déterminer la loi de $\mathbf{1}_{\{i\}}(A)$.
d) Calculer $\mathbf{P}(A \subset B)$. Commenter.

179. [PLSR] Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0, 1]$. On considère un échiquier $n \times n$. On colorie chaque case en rouge (resp. en bleu) avec probabilité p (resp. $1-p$). On note $Q(p)$ la probabilité pour qu'il existe un chemin joignant le bord gauche au bord droit constitué uniquement de cases rouges (il est entendu que les déplacements ne se font pas en diagonale). Que dire de la fonction Q ?

180. [L] Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi de Rademacher. On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ pour $n \geqslant 1$.
a) Calculer l'espérance du nombre R de retour en zéro de la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$.
b) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ distinct de $\mathbb{R}$. Montrer que la probabilité qu'il existe $n \geqslant 1$ tel que $S_n \notin I$ est égale à 1.
c) Montrer que l'événement $(R = +\infty)$ est presque sûr.

181. [PLSR] Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et $(m_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs de somme 1. On considère un arbre aléatoire sur cet espace tel que chaque nœud ait un nombre aléatoire X de successeurs avec, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(X = k) = m_k$. Ces variables aléatoires correspondant au nombre de successeurs sont mutuellement indépendantes. On note X_1 la variable aléatoire comptant le nombre de successeurs de la racine. Caractériser le fait que la longueur de l'arbre soit presque sûrement finie.

182. [PLSR] On construit itérativement et aléatoirement un arbre aléatoire sur l'ensemble de sommets $[\![1, n]\!]$ (graphe orienté) selon le procédé suivant : à l'étape k, on choisit aléatoirement

un point dans $[\![1,k]\!]$ (avec probabilité uniforme) et on rajoute une arête orientée de ce point vers $k+1$. Ces choix s'effectuent de manière indépendante les uns des autres.
a) On note X_n la variable aléatoire donnant le nombre d'arêtes partant du point 1. Déterminer l'espérance et la variance de X_n.
b) On suppose $n \geqslant 2$. On note S_n la variable aléatoire donnant le nombre de descendants (directs ou non) du sommet 2. Déterminer la loi de S_n.

c) Calculer l'espérance du nombre de feuilles de l'arbre.

183. ** [P] Soient E un ensemble fini, $V : E \to \mathcal{P}(E)$ une fonction de E vers les parties de E et $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction. Un point $a \in E$ est un minimum local si $f(a) \leqslant f(b)$ pour tout $b \in V(a)$. Soit M un entier tel que $M \geqslant \sqrt{|E|}$. Soient $b_1, \ldots, b_M$ des variables aléatoires indépendantes et uniformément distribuées dans E. Soit k tel que $f(b_k) = \min_{1\leqslant i\leqslant M} f(b_i)$. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de E telle que $u_0 = b_k$ et, pour tout $n \geqslant 0$:
– si u_n est un minimum local, alors $u_{n+1} = u_n$;
– sinon $u_{n+1} \in V(u_n)$ et $f(u_{n+1}) < f(u_n)$.
Montrer que u_M est un minimum local avec probabilité au moins $1/2$.

184. [PLSR] Une variable aléatoire réelle X est infiniment divisible si X admet un moment d'ordre 2, et si, pour tout $n \geqslant 2$, il existe $(X_{i,n})_{i\in[\![1,n]\!]}$ i.i.d. et admettant des moment d'ordre 2 telles que $X \sim \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_{i,n}$. Montrer que si X est bornée et infiniment divisible, alors X est presque sûrement constante.

185. [PLSR] On se donne une suite $(X_i)_{i\geqslant 1}$ de variables aléatoires indépendantes. On suppose que pour tout $i \geqslant 1$, il existe $a_i \in \,]0,2]$ et $p_i \in [0,1]$ tels que X_i soit à valeurs dans $\{0, a_i, -a_i\}$ et $\mathbf{P}(X_i = a_i) = \mathbf{P}(X_i = -a_i) = \dfrac{p_i}{2}$.
a) Quelle relation doivent vérifier a_i et p_i pour que $\mathbf{V}(X_i) = 1$? Dans toute la suite, on suppose cette relation vérifiée et on pose $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$.
b) Calculer la variance de $n^{-1/2}S_n$.
c) Montrer que $\mathbf{E}(\cos(n^{-1/2}tS_n)) = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} \mathbf{E}(\cos(n^{-1/2}tX_i)$.
d) En déduire que $\mathbf{E}(\cos(n^{-1/2}tS_n)) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-t^2/2}$.

186. [PLSR] On fixe un entier $n \geqslant 1$. On considère la relation d'ordre partielle $\preccurlyeq$ sur $\mathbb{R}^n$ définie par $x \preccurlyeq y \Leftrightarrow \forall i \in [\![1,n]\!],\ x_i \leqslant y_i$. Une fonction $f : \{0,1\}^n \to \mathbb{R}$ est dite croissante lorsque $f(x) \leqslant f(y)$ quels que soient x, y dans $\{0,1\}^n$ tels que $x \preccurlyeq y$.
a) Donner un exemple de fonction croissante non constante de $\{0,1\}^n$ dans $\mathbb{R}$.
b) Dans la suite, on se donne une liste $(X_1, \ldots, X_n)$ de variables aléatoires i.i.d. suivant $\mathcal{B}(1/2)$. Soit $f : \{0,1\}^n \to \mathbb{R}$ croissante. On suppose $n \geqslant 2$.
Montrer que $\mathbf{E}(f(X_1, \ldots, X_n)) = \dfrac{1}{2}\Big(\mathbf{E}(f(X_1, \ldots, X_{n-1}, 0) + \mathbf{E}(f(X_1, \ldots, X_{n-1}, 1))\Big)$.

c) Soit $f : \{0,1\}^n \to \mathbb{R}$ et $g : \{0,1\}^n \to \mathbb{R}$ croissantes.
Montrer que $\mathbf{E}((fg)(X_1,\ldots,X_n)) \geqslant \mathbf{E}(f(X_1,\ldots,X_n))\,\mathbf{E}(g(X_1,\ldots,X_n))$.

187. [SR] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit S_n de la distribution uniforme de probabilité. On note $A_i = \{\sigma \in S_n,\ \sigma(i) = i\}$ et N la variable aléatoire donnant le nombre de points fixes d'une permutation.
a) Soit $I \subset [\![1,n]\!]$. Calculer $\mathbf{P}\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)$.
b) Exprimer N avec des indicatrices. Calculer $\mathbf{E}(N)$ et $\mathbf{V}(N)$.
c) Soient $k \in [\![1,n]\!]$ et $F \subset [\![1,n]\!]$. Calculer $\displaystyle\sum_{I\subset[\![1,n]\!],\ |I|=k}\ \prod_{i\in I} \mathbf{1}_F(i)$.
d) Soit $k \in [\![1,n]\!]$. Calculer $\mathbf{E}(N(N-1)\cdots(N-k+1))$.
e) Soient $X \sim \mathcal{P}(1)$ et $k \in \mathbb{N}$. Calculer $\mathbf{E}(X(X-1)\cdots(X-k+1))$.
f) Calculer $\mathbf{P}(N = 0)$.

188. [SR] On considère une suite i.i.d. $(X_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires suivant toutes la loi uniforme sur $\{1,2\}$. On définit $(S_n)_{n\geqslant 0}$ par $S_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$.
a) i) Déterminer l'espérance et la variance de S_n.
ii) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que $\mathbf{P}(|S_n - 3n/2| \geqslant \varepsilon n)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.
iii) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que $\mathbf{P}(|S_n - 3n/2| \geqslant \varepsilon n^{2/3})$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.
b) On considère la variable aléatoire $T_n : \omega \mapsto \min\{k \in \mathbb{N},\ S_k(\omega) \geqslant n\}$. Déterminer l'ensemble des valeurs prises par T_n.
c) Soit $k \geqslant 2$. Montrer que $\mathbf{P}(T_n = k) = \dfrac{1}{2}\mathbf{P}(T_{n-1} = k-1) + \dfrac{1}{2}\mathbf{P}(T_{n-2} = k-1)$.
d) Calculer l'espérance de T_n.

189. ★★ [P] Soient $d \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 3$. On pose $G = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^d$ et $S = \{\pm e_i, 1 \leqslant i \leqslant d\}$, où e_i désigne l'élément de G dont toutes les coordonnées sont nulles sauf la i-ème, égale à $\overline{1}$. Soient enfin $f : G \to \mathbb{R}$ une fonction quelconque et X une variable aléatoire uniformément distribuée sur G.
Montrer que $\mathbf{E}\left(|f(X) - \mathbf{E}(f(X))|\right) \leqslant \dfrac{nd}{2} \max\limits_{s\in S} \mathbf{E}\left(|f(X) - f(X+s)|\right)$.

190. [PLSR] Pour un réel y, on note $\mathcal{P}_y$ l'ensemble des nombres premiers inférieurs ou égaux à y. Pour $x \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ avec $x \leqslant n$, on note $\mathcal{B}_x^n = \{p \in \mathcal{P}_{n^{1/10}},\ p \mid x\}$ et on note $\nu(x)$ le nombre de diviseurs premiers de x.
a) Montrer que $\nu(x) - 10 \leqslant |\mathcal{B}_x^n| \leqslant \nu(x)$.
b) On fixe un entier $n \geqslant 1$ et on considère une variable aléatoire X suivant la loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$. Montrer que, quand $n \to +\infty$,
$$\mathbf{E}(|B_X^n|) = \sum_{p\in\mathcal{P}_{n^{1/10}}} \frac{1}{p} + O\left(\frac{1}{n^{9/10}}\right) \text{ et } \mathbf{V}(|B_X^n|) = \sum_{p\in\mathcal{P}_{n^{1/10}}} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p^2}\right) + O\left(\frac{1}{n^{8/10}}\right).$$
c) On admet que $\displaystyle\sum_{p\in\mathcal{P}_n} \frac{1}{p} = \ln(\ln n) + O(1)$ quand $n \to +\infty$. Soit (a_n) une suite à termes strictement positifs tendant vers $+\infty$.

Montrer que $\operatorname{card}\left\{x \in [\![1,n]\!]\ ;\ |\nu(x) - \ln(\ln n)| \geqslant a_n \quad \ln(\ln n)\right\} \underset{n\to+\infty}{=} o(n)$.