Centrale – MP – MPI

Algèbre

1209. On considère, pour $n \in \mathbb{N}$, $C_n = \dfrac{1}{n+1}\dbinom{2n}{n}$.
a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $C_n \in \mathbb{N}^*$.
b) Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k}$.
c) Donner tous les entiers tels que C_n soit pair. En déduire tous les entiers tels que C_n soit impair.

1210. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{P}(n)$ l'ensemble des nombres premiers inférieurs ou égaux à n et $P_n = \displaystyle\prod_{p \in \mathcal{P}(n)} p$.
a) Montrer que $\forall n \geqslant 2$, $\dfrac{4^n}{2\sqrt{n}} < \dbinom{2n}{n} < 4^n$.
b) Montrer que $\forall n \geqslant 1$, $\dbinom{2n+1}{n} < 4^n$.
c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_{2n+1} < 4^n P_{n+1}$.

1211. Soit $(G, \cdot)$ un groupe fini commutatif tel que le nombre d'automorphismes de G est 3.
a) i) Donner la définition d'un automorphisme. Montrer que $\varphi : x \mapsto x^{-1}$ est un automorphisme de G.
ii) Montrer que, pour tout $x \in G$, $x^2 = e$.
b) Montrer que G possède un sous-groupe V d'ordre 4 et préciser les automorphismes de V.

1212. Soient p un nombre premier tel que $p \equiv 3\ [4]$ et $C = \{x \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z},\ \exists y \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z},\ x = y^2\}$.
a) Rappeler l'énoncé du petit théorème de Fermat. Montrer que $-1 \notin C$.
On pose $\pi_x = \prod_{y \in C \setminus \{x\}} (x+y)$ pour $x \in C \setminus \{0\}$ et $\pi = \prod_{x \neq y \in C} (x+y)$.
b) Déterminer le cardinal de C.
c) Montrer que $\forall x \in C \setminus \{0\}$, $\pi_x = \pi_1$.
d) Calculer π.

1213. On pose $u = 2 + \sqrt{3}$, $v = 2 - \sqrt{3}$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $M_n = 2^n - 1$ et $s_n = u^{2^n} + v^{2^n}$.
a) Montrer que, si M_n est premier, alors n est premier.
b) Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$, $s_{n+1} = s_n^2 - 2$. Qu'en déduire sur le suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
c) Soit q un nombre premier. On munit l'ensemble $B = (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^2$ des deux lois de composition interne définies par :
$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$ et $(x, y) \cdot (x', y') = (xx' + 3yy', xy' + x'y)$.
i) Montrer que les deux lois précédentes munissent B d'une structure d'anneau commutatif fini.
ii) Montrer que, si 3 n'est pas un carré modulo q, alors l'anneau précédent est un corps.
iii) On note $A = \mathbb{Z} + \sqrt{3}\mathbb{Z}$. Montrer que l'application π définie par $\pi(a + b\sqrt{3}) = (\overline{a}, \overline{b})$ est bien définie et est un morphisme surjectif d'anneaux de A dans B.
d) On suppose n premier. Montrer que, si M_n divise s_{n-2} alors M_n est premier.
Ind. On pourra raisonner par l'absurde en considérant le plus petit facteur premier q de M_n et déterminer l'ordre de $(\overline{2}, \overline{1})$ dans le groupe des éléments inversibles de l'anneau B.

1214. Soit A un anneau commutatif. On dit que A est noethérien lorsque tous ses idéaux sont engendrés par une partie finie de A.
a) Les anneaux $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{R}[X]$ sont-ils noethériens ?
b) Montrer que A est noethérien si et seulement si toute suite croissante d'idéaux est stationnaire.
c) Soit A un anneau non commutatif. On dit que $\mathcal{I}$ est un idéal à gauche de A lorsque $\mathcal{I}A \subset \mathcal{I}$ (définition similaire pour un idéal à droite). Soit A noethérien, c'est-à-dire que tous les idéaux, à droite ou à gauche, de A sont de type fini. Montrer que l'inversibilité à gauche équivaut à l'inversibilité à droite, i.e. $\forall a \in A, \Big(\exists b \in A,\ ab = 1 \Longleftrightarrow \exists b \in A,\ ba = 1\Big)$.
Ind. Considérer $\varphi : x \mapsto ax$.

1215. ***a)*** Soit G un groupe commutatif fini. Si a et b sont deux éléments de G d'ordre premiers entre eux, quel est l'ordre de ab ?
b) Soit G un groupe commutatif fini. Montrer qu'il existe un élément de G dont l'ordre est le ppcm des ordres des éléments de G.
c) Soit p un nombre premier. Montrer que le groupe $\mathbb{F}_p^*$ est cyclique.

1216. Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de polynômes réels définie par $T_0(X) = 1,\ T_1(X) = X$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $T_{n+2}(X) = 2XT_{n+1}(X) - T_n(X)$.
a) Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$, $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$.

b) Montrer que $T_n \circ T_m = T_m \circ T_n$ pour $(m,n) \in \mathbb{N}^2$.
c) Montrer que, pour $n \geqslant m$, $2T_nT_m = T_{n+m} + T_{n-m}$.
On considère l'équation différentielle $(E) : (1-x^2)P'^2 = n^2(1-P^2)$.
d) Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$, T_n et $-T_n$ sont solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.
e) Montrer que tout polynôme solution de (E) est de degré n, puis déterminer les polynômes solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

1217. Soient $a_1 < a_2 < \cdots < a_p$ et $b_1 < b_2 \cdots < b_p$ des réels et $M = (e^{a_i b_j})_{1 \leqslant i,j \leqslant p}$.
a) Calculer $\det M$ lorsque $b_k = k-1$ pour tout k.
b) Montrer que M est inversible, puis que $\det M > 0$.

1218. ***a)*** Rappeler la définition de l'indicatrice d'Euler, exprimer $\varphi(n)$ en fonction de sa décomposition en facteurs premiers.
b) Pour $n \geqslant 2$, calculer $\displaystyle\sum_{d|n} \varphi(d)$ (la somme étant restreinte aux diviseurs positifs).
c) En déduire le déterminant de A, où $A_{i,j} = i \wedge j$.

1219. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que, pour toute matrice $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, l'on ait $(f(a_{ij}))_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
a) À l'aide des matrices $U_{x,y} = \begin{pmatrix} x & 1 \\ y & 1 \end{pmatrix}$, montrer que f est injective.
b) En utilisant l'ensemble $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x < y\}$, en déduire que f est strictement monotone.
c) On suppose que $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{+*}$. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, il existe $z_{x,y} \in \mathbb{R}$ tel que $f(x)f(y) = f(a)f(z_{x,y})$, et conclure à une absurdité.
d) Traiter de même le cas $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{-*}$.

1220. ***a)*** Rappeler la formule de développement d'un déterminant par rapport à une ligne ou une colonne. En déduire, pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, une relation entre $\mathrm{Com}\, A$, A et $\det A$.
b) Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par : $a_{i,i} = 2$, $a_{i,j} = -1$ si $|i-j| = 1$ et $a_{i,j} = 0$ dans tout autre cas. Calculer le déterminant de A.
c) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice dont les coefficients diagonaux sont strictement positifs, dont les autres coefficients sont négatifs et telle que $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} > 0$ pour tout i. Montrer que A est inversible.
d) Montrer que les coefficients de A^{-1} sont positifs.

1221. Soient $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $F : X \mapsto MXM^{-1}$ et $f : (A,B) \mapsto \mathrm{tr}(A)\,\mathrm{tr}(B) - \mathrm{tr}(AB)$.
a) Montrer que, pour tous $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.
b) Trouver les endomorphismes h de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui vérifient, pour tous A, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $f(F(A),B) = f(A,h(B))$.
c) Dans cette question, on suppose que $n = 2$.

Soit $h : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mapsto \begin{pmatrix} a+c & b+d-a-c \\ c & d-c \end{pmatrix}$. Déterminer les endomorphismes k de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tels que $f(h(A), B) = f(A, k(B))$ pour tout $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$. Parmi eux, préciser ceux qui sont trigonalisables, diagonalisables.

1222. ***a)*** Énoncer et démontrer la caractérisation du rang par les matrices extraites.
b) Soit $\Omega_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices $M = (M_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ de $\mathcal{M}_n(_K)$ telles que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, la matrice $M_k := (M_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant k}$ soit inversible. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, montrer que Ω_n est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
c) Montrer qu'une matrice M de $\mathcal{M}_n(_K)$ appartient à $\Omega_n(\mathbb{K})$ si et seulement si M s'écrit TT' où T (resp. T') est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaire inférieure (resp. supérieure) inversible.

1223. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ \vdots & & \iddots & \vdots \\ \vdots & \iddots & & \vdots \\ a_n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

a) Donner la définition du polynôme minimal π_A. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que A soit diagonalisable.
b) Calculer $\det(A)$ et A^2.
c) Montrer que A est diagonalisable si et seulement si $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Ker}(A^2)$. Donner une condition sur les $a_1, \ldots, a_n$ pour que A soit diagonalisable.

1224. On se place dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
a) Montrer que toute matrice est trigonalisable sur $\mathbb{C}$.
b) Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ et $D = \mathrm{Diag}\,(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Montrer qu'il existe un polynôme f tel que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $f(\alpha_i)^2 = \alpha_i$. En déduire que $f(D)^2 = D$.

On considère la suite $(c_k)_k$ définie par $c_0 = 1$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $c_{k+1} = \displaystyle\sum_{i=0}^{k} c_i c_{k-i}$ et le polynôme $\phi = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} c_k X^{k+1}$.

c) Déterminer le reste de la division euclidienne de ϕ^2 par X^n.
d) Trouver un polynôme g tel que, pour toute matrice nilpotente $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on ait $g(N)^2 = I_n + N$.
e) Soit A une matrice inversible. Montrer qu'il existe $R \in \mathbb{C}[A]$ telle que $R^2 = A$.

1225. Soient E un espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E diagonalisable. On note E_i ses sous-espaces propres et $n_i = \dim E_i$.

a) Montrer que $E = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{r} E_i$.

b) Soit g un endomorphisme de E. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :
i) g commute avec f, ***ii)*** pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, $g(E_i) \subset E_i$.

En déduire que la dimension du commutant de f est $\sum_{i=1}^{r} {n_i}^2$.

c) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, montrer que la dimension du commutant de A est supérieure ou égale à n.

1226. Soit $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$. On note $\rho(A) = \max_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} |\lambda|$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sqrt[n]{|\mathrm{tr}\,(A^n)|}$.

a) Si $\mathrm{Sp}(A)$ est un singleton, montrer que (u_n) converge vers $\rho(A)$.

b) Donner un exemple de matrice dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle que (u_n) ne converge pas.

On suppose maintenant que A a au moins deux valeurs propres distinctes.

c) Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| = 1$. Montrer que 1 est valeur d'adhérence de (z^n). Montrer que $\rho(A)$ est valeur d'adhérence de u_n.

1227. Soit E un espace-vectoriel de dimension finie n et f un endomorphisme de E. Pour toute partie $A \subset \mathcal{L}(E)$, on note $\mathcal{C}(A) = \{u \in \mathcal{L}(E)\ ;\ \forall v \in A,\ u \circ v = v \circ u\}$. L'objectif de l'exercice est d'étudier $\mathcal{B}(f) = \mathcal{C}(\mathcal{C}(\{f\}))$.

a) Montrer que $\mathcal{B}(f)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre contenant $\mathbb{K}[f]$.

b) On suppose f nilpotente d'indice n. Montrer que $\mathcal{B}(f) = \mathbb{K}[f]$.

c) Soient G_1, G_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires stables par un $f \in \mathcal{L}(E)$. On pose $f_i = f_{|G_i}$. On suppose que $\pi_{f_1} \wedge \pi_{f_2} = 1$. Montrer que $\mathcal{B}(f) = \mathbb{K}[f]$.

1228. Soient E un espace vectoriel euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}$, $a \in E$ un vecteur unitaire, et H l'hyperplan orthogonal à la droite vectorielle dirigée par a. On note σ la symétrie orthogonale par rapport à l'hyperplan H, et p la projection orthogonale sur H.

a) Montrer que, pour tout sous-espace vectoriel F de E, $F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp = E$.

b) Montrer que, pour $x \in E$, $p(x) = x - \langle a, x\rangle a$.

c) Soit $\Omega = \{x \in E,\ \langle a, x\rangle \geqslant 0 \ \text{ et } \ \langle x, \sigma(x)\rangle \leqslant 0\}$.

Montrer les équivalences suivantes, pour $x \in E$:

  i) $x \in \Omega$ si et seulement si $\langle a, x\rangle \leqslant \|p(x)\|$,

  ii) $x \in \Omega$ si et seulement si $\forall y \in \Omega$, $\langle x, y\rangle \leqslant 0$.

1229. Soit E un espace euclidien. Soit $s \in \mathcal{L}(E)$.

a) Rappeler l'identité du parallélogramme et les identités de polarisation.

b) Montrer l'équivalence suivante :

i) $\exists c \in \mathbb{R},\ \forall (x, y) \in E^2,\ \langle s(x), s(y)\rangle = c\langle x, y\rangle$,

ii) $\forall (x, y) \in E^2$, $\langle x, y\rangle = 0 \ \Rightarrow\ \langle s(x), s(y)\rangle = 0$.

1230. ***a)*** Montrer que $(P, Q) \mapsto \displaystyle\int_0^1 PQ$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. En déduire qu'il existe un unique $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $\displaystyle\int_0^1 x^k P(x)\,\mathrm{d}x = 1$ pour $0 \leqslant k \leqslant n-1$. On pose $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_{n-1} X^{n-1}$.

b) Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue telle que $\displaystyle\int_0^1 x^k f(x)\,\mathrm{d}x = 1$ pour $0 \leqslant k \leqslant n-1$. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 f^2 \geqslant \sum_{i=0}^{n-1} a_i$, puis que $\displaystyle\int_0^1 f^2 \geqslant n^2$.

1231. ***a)*** Montrer que l'application $(P,Q) \mapsto \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
b) Soit (E,ϕ) un espace euclidien et $B = (e_1, ..., e_n)$ une base de E. Montrer que la matrice $(\phi(e_i,e_j))_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est symétrique définie positive.
c) Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on pose $L_p = \dfrac{d^p}{dX^p}\,[X^p(1-X)^p] \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que la famille (L_p) est orthogonale pour le produit scalaire de la question a. Est-elle orthonormale ?
d) Soit $M = \left(\dfrac{1}{i+j-1}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n+1}$. Montrer que la matrice M est symétrique définie positive et calculer $\det M$.

1232. Soient $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n$.
a) Rappeler la définition d'une matrice définie positive. Donner des propriétés d'une telle matrice.
b) Pour $x \in \mathbb{R}^n$, on pose $J(x) = \langle Ax, x\rangle - \langle b, x\rangle$. Montrer que J est strictement convexe, c'est-à-dire que : $\forall x \neq y, \forall \lambda \in]0,1[,\ J(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda J(x) + (1-\lambda)J(y)$.
c) Montrer que J atteint un minimum en un unique point de $\mathbb{R}^n$ et que ce vecteur est solution de l'équation $Ax = b$.

1233. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha > 0$. On note $S_\alpha = \{M \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}),\ \det M \geqslant \alpha\}$. Le but de cet exercice est de s'intéresser, pour $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, à la quantité $m_\alpha(A) = \inf_{M\in S_\alpha} \mathrm{tr}(AM)$.
a) Montrer que les valeurs propres d'une matrice symétrique réelle sont réelles. Rappeler le théorème spectral. Justifier l'existence de $m_\alpha(I_n)$ puis la calculer.
b) Soit $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Justifier l'existence de $R \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $A = R^2$. Prouver l'unicité puis calculer $m_\alpha(A)$.
c) Que se passe-t-il lorsque $\alpha = 0$?

1234. Soient $d \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ à coefficients dans $\{0,1\}$ et de trace nulle. On suppose que $A^2 + A - (d-1)I_n = J_n$ où J_n est la matrice dont tous les coefficients valent 1.
a) Montrer que chaque ligne de A contient d coefficients égaux à 1.
b) Montrer que $AU = dU$ où $U = (1 \cdots 1)^T$. En déduire que $n = d^2 + 1$.
c) Montrer que la multiplicité de d est égale à 1.
d) Montrer que les autres valeurs propres de M sont racines de $X^2 + X - d + 1 = 0$.
e) Montrer qu'il existe deux entiers naturels m_1 et m_2 tels que $m_1 + m_2 = n - 1$ et $d + m_1 r_1 + m_2 r_2 = 0$ où r_1 et r_2 sont les solutions de l'équation précédente.
f) Montrer que si $m_1 = m_2$ alors $d = 2$. On suppose $d > 2$ dans la suite.
g) Montrer qu'il existe un entier k tel que $4d - 3 = (2k+1)^2$ puis que $k^4 \equiv 1\ [2k+1]$.
h) Montrer que, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, on a $16k^4 \equiv 1\ [2k+1]$. En déduire qu'on a forcément $d \in \{2, 3, 7, 57\}$.

1235. Soit $A = \begin{pmatrix} A_1 & B \\ B^T & A_2 \end{pmatrix}$ une matrice symétrique définie positive avec $A_1 \in \mathcal{S}_p(\mathbb{R})$ et $A_2 \in \mathcal{S}_q(\mathbb{R})$.
a) Montrer que A_1 et A_2 sont définies positives.
b) Montrer qu'il existe R_1 et R_2 symétriques définies positives telles que $R_1^2 = A_1$ et $R_2^2 = A_2$.
c) Montrer que $\det(A) \leqslant \det(A_1)\det(A_2)$.

1236. On considère la relation binaire pour $(A, B) \in (\mathcal{S}_n(\mathbb{R}))^2 A \preceq B \Leftrightarrow B - A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
a) Montrer que l'on définit ainsi une relation d'ordre sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
b) Montrer qu'une partie de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est bornée si et seulement si elle est majorée et minorée pour $\preceq$.
c) Montrer que toute suite croissante majorée pour $\preceq$ converge.
d) Soient A et B dans $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer que $A \preceq B \implies B^{-1} \preceq A^{-1}$.

1237. Si $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on note $\lambda_1(S) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n(S)$ le spectre ordonné de S. On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique noté $\langle\ ,\ \rangle$ et on note S^{n-1} la spère unité.
a) Montrer que, si $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $\lambda_1(S) = \min\{\langle Sx, x\rangle\ ;\ x \in S^{n-1}\}$.
b) Si $d \in [\![1, n]\!]$, soit $\mathcal{V}_d$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension d de $\mathbb{R}^n$. Montrer que, si $k \in [\![1, n]\!]$ et $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$,
$\lambda_k(S) = \min\limits_{V \in \mathcal{V}_k} \max\{\langle Sx, x\rangle\ ;\ x \in V \cap S^{n-1}\} = \max\limits_{V \in \mathcal{V}_{n-k+1}} \min\{\langle Sx, x\rangle\ ;\ x \in V \cap S^{n-1}\}$.
c) Si $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $i + j \leqslant n + 1$ et $(S, S') \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})^2$, montrer que
$\lambda_{i+j-1}(S + S') \leqslant \lambda_i(S) + \lambda_j(S')$.

Analyse

1238. Soient $(E, \|\ \|)$ un espace normé, F un sous-espace vectoriel fermé strict de E et $\delta \in]0, 1[$. Montrer qu'il existe un vecteur unitaire u de E tel que $d(u, F) \geqslant \delta$.

1239. Soient (E, N) et (E', N') deux espaces vectoriels normés.
Soit $d \in \mathbb{N}$. Pour $P(X) = p_0 + p_1X + \cdots + p_dX^d \in \mathbb{R}_d[X]$ on pose $\|P\| = \max(|p_0|, ..., |p_d|)$.
a) Vérifier que l'application $\|\ \|$ est une norme sur $\mathbb{R}_d[X]$.
b) ***i)*** Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E, convergeant vers $\ell \in E$.
Montrer que l'ensemble $Y = \{y_n,\ n \in \mathbb{N}\} \cup \{\ell\}$ est compact.
ii) Soit $f : E \to E'$ continue telle que, pour tout compact K de E', $f^{-1}(K)$ est un compact de E. Montrer que, si F est un fermé de E, alors $f(F)$ est un fermé de E'.
c) Soit $P \in \mathbb{R}_d[X]$ un polynôme unitaire. Montrer que, si $x \in \mathbb{R}$ est une racine de P telle que $|x| > 1$, alors $|x| \leqslant \|P\| + 1$. En déduire que l'ensemble des polynômes unitaires et scindés de $\mathbb{R}_d[X]$ est fermé dans $\mathbb{R}_d[X]$.

1240. ***a)*** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $e^z = -1$.
b) Soit $f : \mathbb{U} \to \mathbb{R}$ continue. Montrer qu'il existe $z \in \mathbb{U}$ tel que $f(-z) = f(z)$. En déduire que, si A et B sont deux parties fermées de réunion $\mathbb{U}$, il existe deux points de $\mathbb{U}$ diamétralement opposés tous deux dans A ou tous deux dans B.

c) Soient D le disque unité fermé du plan complexe et $g : D \to \mathbb{C}^*$ continue telle que, pour tout $z \in \mathbb{U}$, $g(-z) = -g(z)$. On admet qu'il existe h continue telle que $g = \exp \circ h$. Montrer qu'il existe $z \in D$ tel que $h(-z) = h(z)$.

1241. Soit $(E, \| \ \|)$ un espace vectoriel normé. Pour $A \subset E$ non vide et $x \in E$, on note $d(x, A) = \inf\{\|x - a\|,\ a \in A\}$.
a) On suppose A fermé. Soit $x \in E$. Montrer que $d(x, A) = 0$ si et seulement si $x \in A$.
b) Soient $F \subsetneq E$ un sous-espace vectoriel fermé de E et $\delta \in]0, 1[$. Montrer qu'il existe $x \in E$ unitaire vérifiant $d(x, F) \geqslant \delta$.
c) On suppose E de dimension infinie et on admet que les sous-espaces vectoriels de dimension finie sont fermés. Montrer que la sphère unité n'est pas un compact de E.

1242. Soit φ la fonction définie sur $[0, 1]$ par $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(t) = -t\ln(t)$ pour $t \in]0, 1]$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose S_n l'ensemble des vecteurs $p = (p_1, ..., p_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que $p_1 + ... + p_n = 1$ et $p_i \geqslant 0$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$. On pose enfin $H_n(p) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \varphi(p_i)$ pour $p \in S_n$.
a) i) Donner la définition d'une partie compacte d'un espace vectoriel normé, et en donner une caractérisation en dimension finie.
ii) Montrer que S_n est une partie compacte et convexe de $\mathbb{R}^n$.
b) i) Montrer que H_n est continue.
ii) Montrer que H_n atteint sur S_n un maximum en un unique point p_0, et expliciter p_0.
Soit $v = (v_1, ..., v_n) \in \mathbb{R}^n$. On pose $f_v(p) = H_n(p) + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i v_i$ pour $p \in S_n$.
On pose $f_v^* = \sup_{p \in S_n} f_v(p)$ et $E_v = \{p \in S_n,\ f_v(p) = f_v^*\}$.
c) Montrer que E_v est non vide. Déterminer f_v^* et E_v.

1243. Soient $(E, \| \ \|)$, $(E', \| \ \|)$ deux espaces vectoriels normés de dimension finie, A un fermé non vide de E, B une partie non vide de E'. Soit $f : A \to B$ continue bijective telle que l'image réciproque par f de toute partie bornée de B est bornée. Montrer que f^{-1} est continue.

1244. Un espace normé réel est dit séparable lorsqu'il contient une partie dénombrable dense.
a) L'espace $\mathbb{R}$ est-il séparable ?
b) Montrer qu'un espace normé de dimension finie est séparable.
c) Soit E un espace préhilbertien réel de dimension infinie. Montrer que E est séparable si et seulement s'il existe une suite orthonormée $(e_n)_{n \geqslant 0}$ telle que $\mathrm{Vect}\,(e_n)_{n \geqslant 0}$ soit dense dans E.

1245. Soit E l'espace des fonctions polynomiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout $f \in E$, on note $\varphi(f)$ la primitive de f d'intégrale nulle sur l'intervalle $[0, 1]$.
a) Justifier la définition de φ puis établir qu'il s'agit d'une application linéaire sur E.
On munit E de la norme $\| \ \|_\infty$ sur $[0, 1]$.
On note $\|\varphi\|_{\mathrm{op}} = \sup \left\{ \dfrac{\|\varphi(f)\|_{\infty,[0,1]}}{\|f\|_{\infty,[0,1]}},\ f \in E \setminus \{0_E\} \right\}$.
b) Montrer que $\|\varphi\|_{\mathrm{op}}$ est correctement définie et en trouver un majorant.

c) Soient $f \in E$ et G la primitive de $F = \varphi(f)$ nulle en 0. Établir que, pour tout $x > 0$, $G(x) = xF(x) - \int_0^x tf(t)\mathrm{d}t = (x-1)F(x) - \int_x^1 (1-t)f(t)\mathrm{d}t$.
d) Déterminer la norme $\|\varphi\|_{\mathrm{op}}$.

1246. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $f_A(x) = (A + xI_n)^{-1}A$ pour x réel convenable.
a) Montrer que la fonction f_A est définie au voisinage épointé de 0.
b) Étudier le comportement de la fonction f_A en 0 dans le cas où A est inversible, puis dans le cas où A est nilpotente.
c) Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Montrer l'existence de $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathrm{Im}(u^p) \oplus \mathrm{Ker}(u^p) = \mathbb{R}^n$.
En déduire l'existence de deux supplémentaires F et G dans $\mathbb{R}^n$, stables par u, tels que u induit sur F un automorphisme et induit sur G un endomorphisme nilpotent.
d) Caractériser les matrices A pour lesquelles f_A a une limite en 0.

1247. Soient (a_n) une suite à termes réels positifs et (b_n) une suite à termes complexes. On suppose que la série $\sum a_n$ diverge et que $b_n \sim a_n$. On note $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$.
a) Montrer que la série $\sum b_n$ diverge et que les sommes partielles des deux séries sont équivalentes.
b) On suppose qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que $\frac{S_n}{na_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda$. Déterminer la limite de $\frac{1}{n^2 a_n}\sum_{k=0}^{n} ka_k$.

1248. ***a)*** Rappeler la règle de d'Alembert pour une série numérique à termes positifs.
b) On considère une suite croissante $(q_n)_{n\geqslant 1}$ d'entiers $\geqslant 2$.
i) Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{z^n}{q_1\cdots q_n}$?
ii) Montrer que si la suite (q_n) est stationnaire alors le réel $x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{q_1\cdots q_n}$ appartient à $\mathbb{Q} \cap \,]0,1]$.
iii) On admet réciproquement que si (q_n) tend vers $+\infty$ alors $x \notin \mathbb{Q}$. Montrer que les réels e, $\mathrm{ch}(\sqrt{2})$ et $e^{\sqrt{2}}$ sont irrationnels.
c) Montrer la réciproque admise ci-dessus.

1249. Soit $I =]-1,+\infty[$. On dit que $f \in \mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$ vérifie $(*)$ si et seulement si :
$\forall x, y \in I,\ f(x) + f(y) = f(x+y+xy)$.
On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $x_n = \frac{1}{(n+2)(2n+1)}$ et $y_n = \frac{n}{n+1}$. Soit $f \in \mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$.
a) Simplifier $x_n + y_n + x_n y_n$. Montrer que la série de terme général $f(x_n)$ converge et exprimer $\sum_{n=0}^{+\infty} f(x_n)$ en fonction de $f(1)$.
b) Montrer que f est dérivable.

c) Trouver toutes les fonctions continues vérifiant $(*)$.

1250. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ trois fois dérivable telle que $ff^{(3)} = 0$.
a) Montrer que, si f' est strictement monotone sur un intervalle I, alors f prend une même valeur au plus deux fois sur I.
b) On pose $\Gamma = \{x \in I, f''(x) = 0\}$. Montrer que, si Γ est non vide, alors Γ n'est ni majoré, ni minoré.
c) Montrer que Γ est un intervalle et en déduire f.

1251. ***a)*** Soit $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue et injective. Montrer que g est strictement monotone.
On cherche les fonctions g continues sur $\mathbb{R}$ telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g^2(x) = 2g(x) - x$.
b) Montrer qu'une telle fonction est bijective et strictement croissante.
c) Exprimer g^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ puis conclure.

1252. ***a)*** Rappeler la définition d'une fonction lipschitzienne. Montrer qu'une fonction lipschitzienne est continue. Soient $\alpha \in]0, 1]$ et
$H_\alpha = \left\{f : [0,1] \to \mathbb{R} \mid \exists L > 0, \forall (x, y) \in [0, 1], |f(x) - f(y)| \leqslant L|x - y|^\alpha\right\}$.
b) Montrer H_α est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, que si $0 < \alpha \leqslant \beta \leqslant 1$, alors $H_\beta \subset H_\alpha$. Vérifier que $x \mapsto x^\alpha \in H_\alpha$.
c) Montrer que, pour $0 < \alpha < \beta \leqslant 1$, H_β est strictement inclus dans H_α.
d) Montrer que $\mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R}) \subset H_\alpha \subset \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ et que ces inclusions sont strictes.

1253. ***a)*** Soient a, b dans $\bar{\mathbb{R}}$ avec $a < b$ et $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ dérivable. On suppose que f admet la même limite finie ℓ en a et en b. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.
b) Soit $f : x \in]-1, 1[\mapsto e^{\frac{1}{x^2-1}}$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1, 1[$ et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n tel que $f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{(x^2 - 1)^{2n}} f(x)$. Quel est le degré de P_n ?
c) Combien $f^{(n)}$ a-t-elle de zéros ?

1254. ***a)*** Donner la définition de la multiplicité d'une racine d'un polynôme puis sa caractérisation à l'aide des dérivées successives du polynôme.
b) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non nul. Exprimer P'/P à l'aide des racines de P.
c) Soit $r > 0$. On suppose que P ne s'annule pas sur le cercle $C(0, r)$ du plan complexe. On pose $N_r(P) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{P'(re^{it})}{P(re^{it})} re^{it}\, \mathrm{d}t$. Montrer que $N_r(P)$ est égal au nombre de racines de P (comptées avec multiplicité) dans le disque $D(0, r)$.

1255. Soit E l'ensemble des fonctions $f \in C^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ telles que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f^2 < \infty$. Soit $f \in E$. On pose $\|f\| = \left(\displaystyle\int_0^{+\infty} f^2\right)^{1/2}$ et on définit l'application Tf par : $Tf(0) = f(0)$ et, pour tout $x > 0$, $Tf(x) = \dfrac{1}{x} \displaystyle\int_0^x f$.

a) i) Rappeler le théorème concernant la dérivabilité des fonctions $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f$.

ii) Montrer que Tf est continue.

ii) Montrer que, pour tout $x > 0$, on a $Tf(x)^2 \leqslant \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)^2\,\mathrm{d}t$.

b) Soit $A > 0$. Montrer que $\displaystyle\int_0^A Tf(x)^2\,\mathrm{d}x \leqslant 2\int_0^A \frac{f(x)}{x}\left(\int_0^x f\right)\mathrm{d}x$.
En déduire que $Tf \in E$ et que $\|Tf\| \leqslant 2\|f\|$ $(*)$.
c) Montrer que la constante 2 est optimale dans l'inégalité $(*)$. On pourra considérer les fonctions $f_a : t \mapsto t^{-a}$.

1256. Soient (a_n) une suite réelle telle que $\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k\right)$ est bornée, (b_n) une suite réelle décroissante de limite nulle et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \mapsto \sin(nx)$.
a) Montrer qu'une série absolument convergente est convergente.
b) Montrer que la série de terme général $a_n b_n$ converge.
c) Montrer que la série de fonctions de terme général $b_n f_n$ converge.

1257. Soit $f \in C^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{+*})$ croissante telle que $\dfrac{f'(x)}{f(x)} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{a}{x}$ où $a > 0$.
a) Citer le théorème d'intégration des relations de comparaison, puis trouver un équivalent de $\ln(f(x))$ quand $x \to +\infty$.
b) Donner le domaine de définition de $u : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f(n)\,e^{-nx}$. Déterminer les limites de u aux bornes de son domaine de définition.
c) Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $u(x) \sim \dfrac{C}{x} f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ lorsque $x \to 0^+$.

1258. Soient $\alpha \in \mathbb{N}$ avec $\alpha \geqslant 2$ et $\beta \in]1, +\infty[$. Soit $f : t \mapsto \displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{\cos(2\pi\alpha^n t)}{\beta^n}$.
a) Montrer que f est définie et continue. Si $\alpha < \beta$, montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
b) On suppose $\alpha \geqslant \beta$. Montrer que f n'est pas dérivable en 0.

1259. Soit $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \sin(nx)\,e^{-n^\alpha}$ avec $\alpha > 0$. Montrer que f est $\mathcal{C}^\infty$ puis développable en série entière au voisinage de l'origine.

1260. On considère la série entière $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ où $a_n = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^1 \prod_{k=0}^{n-1}(t-k)\,\mathrm{d}t$ avec $a_0 = 1$.
a) Montrer que le rayon de convergence R est $\geqslant 1$.
b) Calculer $S(x)$ pour $|x| < 1$ puis montrer que $R = 1$.
c) Déterminer un équivalent de a_n.

1261. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $c_n = \dfrac{1}{n+1}\dbinom{2n}{n}$.

a) Donner le développement en série entière de $x \mapsto (1+x)^\alpha$. Exprimer le développement en série entière de $f : x \mapsto \dfrac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$ (avec $f(0)=1$) à l'aide des c_n.

b) Soit r un rationnel que l'on peut écrire $r = \dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ avec $b \wedge d = 1$. Montrer que r est entier. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $c_n \in \mathbb{N}$.

c) Donner la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} c_k c_{n-k}$ en fonction de c_{n+1}.

1262. Pour $n \geqslant 1$, on note t_n le nombre de $\sigma \in \mathcal{S}_n$ telles que $\sigma \circ \sigma = \mathrm{id}$. On convient que $t_0 = 1$.

a) Montrer que la série entière $\displaystyle\sum \frac{t_n}{n!} x^n$ a un rayon de convergence $\geqslant 1$.

b) Calculer t_1, t_2, t_3. Montrer que, si $n \geqslant 2$, $t_n = t_{n-1} + (n-1)t_{n-2}$.

c) Déterminer $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t_n}{n!} x^n$ pour $x \in]-1,1[$. En déduire une expression de t_n sous forme de somme. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{t_n}{n!}$.

1263. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des polynômes P à coefficients dans $\{0,1,2\}$ tels que $P(2) = n$, et $a_n = |\mathcal{P}_n|$. On note s_n la somme des chiffres de l'écriture binaire de l'entier n, et pour $k \in [\![0,7]\!]$, on pose $b_{n,k} = |\{i \in [\![0,n]\!],\ s_i - s_{n-i} \equiv k\ [8]\}|$.

a) Calculer a_0, a_1, a_2 et a_3.

b) Montrer que $\mathcal{P}_n$ est fini.

c) Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$, $a_{2n+1} = a_n$ et que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $a_{2n} = a_n + a_{n-1}$.

Ind. Pour la première égalité, on pourra exhiber une bijection entre $\mathcal{P}_n$ et $\mathcal{P}_{2n+1}$.

d) Montrer que la série entière $\sum a_n x^n$ a un rayon de convergence égal à 1.

On note $A(x)$ la somme de cette série.

e) Montrer que, pour $x \in]-1,1[$, $A(x) = (1+x+x^2)A(x^2)$.

En déduire que $\forall x \in]-1,1[$, $A(x) = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \prod_{k=0}^{n} (1 + x^{2^k} + x^{2^{k+1}})$.

f) On note $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Établir que, pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]-1,1[$,

$$\prod_{k=0}^{n} (1 + x^{2^k} + x^{2^{k+1}}) = \left(\sum_{k=0}^{2^{n+1}-1} (-j)^{n-s_k} x^k\right)\left(\sum_{k=0}^{2^{n+1}-1} (-\bar{j})^{n-s_k} x^k\right).$$

g) Que peut-on en déduire sur (a_n) ?

1264. ***a) i)*** Rappeler la définition de partie dense dans $\mathbb{R}$ et en donner une caractérisation séquentielle.

ii) Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues en 0 telles que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) = f(x) + f(y)$.

On dit qu'une suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la propriété (P) si :

(i) La série entière $\sum a_n x^n$ a un rayon de convergence supérieur ou égal à 1,

(ii) La somme S_a de cette série entière admet une limite réelle en 1^-.

b) i) Montrer que, si la série $\sum a_n$ converge absolument, alors la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie (P).
ii) Étudier la réciproque.
iii) Trouver toutes les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ périodiques qui vérifient (P).

1265. Soient $(a_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de carré sommable et $f : t \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n-t}$.
a) Préciser le domaine de définition de f.
b) Montrer que f est développable en série entière autour de 0.
c) Montrer que si f est identiquement nulle sur $[-1/2, 1/2]$ alors la suite (a_n) est nulle.

1266. ***a)*** Rappeler la définition d'une fonction f développable en série entière en 0 et préciser une expression de $f^{(k)}(0)$ en fonction des coefficients pour $k \in \mathbb{N}$.
b) Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0 pour laquelle il existe $\alpha > 0$, $M > 0$ et $a > 0$ tels que $\forall x \in]-\alpha, \alpha[,\ \forall k \in \mathbb{N},\ |f^{(k)}(x)| \leqslant M a^k k!$.
Montrer que f est développable en série entière en 0.
c) Soit f une fonction développable en série entière en 0. Montrer l'existence de $\alpha > 0$, $M > 0$ et $a > 0$ tels que $\forall x \in]-\alpha, \alpha[,\ \forall k \in \mathbb{N},\ |f^{(k)}(x)| \leqslant M a^k k!$.

1267. ★★ On admet le théorème suivant : *Pour S une série entière de rayon de convergence infini dont la somme ne s'annule pas sur $\mathbb{C}$, il existe une série entière L de rayon de convergence infini telle que* $\forall z \in \mathbb{C}, \exp(L(z)) = S(z)$.
a) i) Rappeler tous les modes de convergence d'une série entière sur son disque ouvert de convergence.

ii) Soient $F(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ de rayon de convergence infini et $G(z) = \mathrm{Re}(F(z))$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\displaystyle\int_0^{2\pi} F(re^{it})\mathrm{d}t = 2\pi a_n R^n$, puis que

$\displaystyle\int_0^{2\pi} G(Re^{it})e^{-int}\mathrm{d}t = \pi a_n R^n$ et $\displaystyle\int_0^{2\pi} G(Re^{it})\mathrm{d}t = 2\pi\mathrm{Re}(a_0)$.
b) Montrer que, s'il existe p et q réels strictement positifs tels que $\forall z \in \mathbb{C},\ |G(z)| \leqslant p|z| + q$, alors F est un polynôme de degré au plus 1.
c) Montrer que l'application $z \mapsto z\exp(z)$ est une surjection de $\mathbb{C}$ sur lui-même.

1268. Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que, pour tout $t \in]-r, r[,\ \det(\mathrm{id} - tu) = \exp\Big(-\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t^k\,\mathrm{tr}(u^k)}{k}\Big)$.

1269. ***a) i)*** Rappeler la définition de fonction continue par morceaux sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

ii) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit une fonction f_n sur $\mathbb{R}^+$ par $f_n(x) = \dfrac{1}{n}\left(1 - \dfrac{x}{n}\right)$ si $x \in [0, n]$ et $f_n(x) = 0$ sinon.
Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers une fonction f à préciser et que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^+} f_n \not\longrightarrow \int_{\mathbb{R}_+} f$ quand $n \to +\infty$.
b) Rappeler le théorème de convergence dominée.
Le démontrer sous l'hypothèse supplémentaire d'une convergence uniforme sur tout segment.
c) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions qui converge simplement sur $\mathbb{N}$ vers une suite $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On suppose l'existence d'une suite sommable positive $\varphi \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in \mathbb{N},\ |f_n(t)| \leqslant \varphi(t)$.
Montrer que les suites f_n et f sont sommables et que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} f_n(k) = \sum_{k=0}^{+\infty} f(k)$.

1270. Pour tout réel a, on pose $\{a\} = a - \lfloor a \rfloor$.
a) On fixe un entier $n \geqslant 1$. Montrer que la fonction $f_n : x \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto \left\{\dfrac{1}{x}\right\}^n$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}^{+*}$ et que l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$ est convergente.
b) Montrer que la famille $\mathcal{F} = \left(\dfrac{(-1)^i i}{(i+1)k^{i+1}}\right)_{\substack{i\geqslant 1\\ k\geqslant 2}}$ est sommable et exprimer sa somme S sous la forme d'une série faisant intervenir la fonction ζ.
c) Exprimer I_1 en fonction de S.

1271. ***a)*** Montrer le théorème d'intégration des séries uniformément convergentes sur un segment.
b) Pour $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ de classe C^1 et $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ continue, on pose $\displaystyle\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t$. Même définition lorsque f est à valeurs dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
On note, pour $r > 0$, $\gamma_r : t \in [0, 2\pi] \mapsto re^{it}$.
Soit $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la somme d'une série entière de rayon de convergence infini. Soient $a \in \mathbb{C}$ et $r > |a|$. Montrer que $f(a) = \dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z-a}\,\mathrm{d}z$.
c) En déduire, pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et pour r assez grand (à préciser), l'égalité $\exp(M) = \dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_{\gamma_r} e^z (zI_n - M)^{-1}\,\mathrm{d}z$.

1272. Soient $E = \mathcal{C}^\infty([0, \pi], \mathbb{R})$ et $F = \{f \in E,\ f(0) = f(\pi) = 0\}$. Soient $\phi, q \in E$, la fonction q étant positive. On note α une primitive de ϕ. On pose $D(y) = y'' + \phi y' - qy$ et $L(y) = -e^\alpha D(y)$ pour tout $y \in E$, et $\langle y, z\rangle = \displaystyle\int_0^\pi y(x)L(z)(x)\,\mathrm{d}x$ pour tous $y, z \in F$.
a) Rappeler le théorème de Cauchy-Lipschitz.
b) Montrer que $\langle\ ,\ \rangle$ est un produit scalaire sur F.
c) Soit $h \in E$. Montrer qu'il existe une unique fonction $f_0 \in F$ telle que $D(f_0) = h$.

1273. ***a)*** Soient E un espace euclidien, U un ouvert de E, et $f : U \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^1$. Rappeler la définition de la différentielle $\mathrm{d}f(a)$ de f en $a \in U$ et du gradient $\nabla f(a)$, ainsi que l'expression de $\nabla f(a)$ en base orthonormale.
b) On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de sa structure euclidienne canonique.
Montrer que $\nabla(\det)(A) = \mathrm{Com}(A)$.
c) Quel est le coefficient de X dans χ_A ?
d) Déterminer l'espace tangent à $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ en I_n.

1274. Soient $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$ et $J : x \mapsto \dfrac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \langle b, x\rangle$.
a) Montrer que J est strictement convexe.
b) Montrer que $J(x) \to +\infty$ quand $\|x\| \to +\infty$.
c) En déduire que J admet un minimum.
d) Calculer ∇J et conclure quant au minimum de J.

1275. Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace préhilbertien réel et F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E.
a) Pour tout $x \in E$, exprimer la projection orthogonale de x sur F à l'aide d'une base orthonormale de F. Justifier la formule.
a) On définit la fonction $d_F : E \setminus F \to \mathbb{R}, x \mapsto d(x, F)$. Montrer que d_F est différentiable, et calculer sa différentielle.

Probabilités

1276. On note d_n le nombre de dérangements de n objets, c'est-à-dire le nombre de permutations $\sigma \in \mathcal{S}_n$ sans point fixe.
a) ***i)*** Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_{n-k} = n!$.
ii) Montrer que la série entière $\displaystyle\sum \frac{d_n}{n!}\, t^n$ a un rayon de convergence supérieur ou égal à 1.
On note $D(t)$ la somme de cette série.
iii) Calculer $e^t D(t)$.
iv) En déduire que $d_n = n! \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.
v) Calculer la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de la probabilité p_n qu'un élément de $\mathcal{S}_n$ soit un dérangement.
c) ***i)*** Pour n et p entiers naturels, on note $s_n(p)$ le nombre de surjections de $[\![1, n]\!]$ sur $[\![1, p]\!]$.
Montrer que $p^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k} s_n(k)$.
ii) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que la famille $\left(s_n(p)\dfrac{x^p}{p!}\dfrac{y^n}{n!}\right)_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable.
Sa somme est notée $S(x, y)$.
iii) Calculer $e^x S(x, y)$.

iv) En déduire la valeur de $s_n(p)$ dans le cas $n = p$, puis dans le cas général $(n, p) \in \mathbb{N}^2$.

1277. On mélange les cartes d'un jeu de $2n$ cartes.
Avec quelle probabilité les cartes de numéro impair sont-elles correctement ordonnées ?

1278. Pour $A_1, ..., A_n$ parties finies d'un ensemble E, on admet que
$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1} \sum_{1\leqslant i_1<i_2<\ldots<i_k\leqslant n} |A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}|.$$
a) Expliciter la formule précédente pour $n = 2$ et $n = 3$.
La démontrer pour $n = 2$.
b) On définit une fonction μ sur $\mathbb{N}^*$ par $\mu(1) = 1$, $\mu(n) = (-1)^k$ si l'entier $n \geqslant 2$ s'écrit $n = p_1...p_k$ où $p_1, \ldots, p_k$ sont k nombres premiers distincts et $\mu(n) = 0$ sinon.
Calculer la probabilité que deux entiers choisis aléatoirement dans l'ensemble $\{1, 2, ..., n\}$ soient premiers entre eux à l'aide de la fonction μ.

1279. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires i.i.d. suivant la loi de Poisson de paramètre 1. On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ et $T_n = \dfrac{S_n - n}{\sqrt{n}}$.
a) Déterminer la loi de S_n. Qu'en déduire sur T_n ?
b) Montrer que $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} \frac{k(n^k - 1)}{(n + k)!}$ converge et calculer la somme.
c) Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathbf{P}(T_n \geqslant x)\, \mathrm{d}x$.

1280. ***a)*** Rappeler les formules des probabilités totales et composées.
On fixe $d \in \mathbb{N}^*$ et $(U_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes uniformément distribuées sur $[\![1, d]\!]$. Soit $N_d = \inf\{n \geqslant 2,\ U_n \in \{U_1, \ldots, U_{n-1}\}\}$.
b) Quelles sont les valeurs prises par N_d ?
c) Montrer que $\mathbf{P}(N_d > k) = \dfrac{d!}{d^k(d - k)!}$ pour tout $k \in [\![0, d]\!]$.
d) Pour tout réel $x > 0$, calculer $\displaystyle\lim_{d\to+\infty} \mathbf{P}\left(\frac{N_d}{\sqrt{d}} > x\right)$.

1281. ***a)*** Soient $x > 0$ et X_x une variable de Poisson de paramètre x. Calculer l'espérance de X_x. Montrer que $\mathbf{P}(|X_x - \mathbf{E}(X_x)| \geqslant \varepsilon x) = O\left(\dfrac{1}{x}\right)$ quand $x \to +\infty$.

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $u_\alpha : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^\alpha}{n!} x^n$.
b) Déterminer le domaine de définition de u_α.
c) Déterminer u_1 et u_2.
d) Montrer que, pour tout $\alpha < 0$, $u_\alpha(x) = o\left(\mathrm{e}^x\right)$ quand $x \to +\infty$.
e) Montrer que, si $\alpha \in]-1, 0[$, $u_\alpha(x) \sim x^\alpha e^x$ quand $x \to +\infty$.