Algèbre

517. Déterminer les sous-groupes finis de $(\mathbb{C}^*, \times)$.

518. Soient p un nombre premier et C_p l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ vérifiant $z^{p^n} = 1$.
a) Montrer que C_p est un sous-groupe infini de $\mathbb{C}^*$.
b) Déterminer les sous-groupes de C_p.

519. ★ Déterminer tous les couples $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ vérifiant : $3^m = 8 + n^2$.

520. Soient p, q deux entiers supérieurs ou égaux à 2.
a) Montrer que si $q^p - 1$ est premier, alors $q = 2$ et p est premier.
b) On suppose que p est premier et l'on note $k \in \mathbb{N}^*$ un diviseur de $2^p - 1$. Montrer que : $k \equiv 1\,[2p]$.

521. Soit $A = \{n \in \mathbb{N},\ 2^n + 1 \equiv 0\,[n]\}$.
a) Montrer que 3 est l'unique nombre premier appartenant à A.
b) Montrer que A contient toutes les puissances entières de 3.

522. ***a)*** Soit $n > 6$ un entier. Montrer qu'il existe un couple $(a, b) \in (\mathbb{N} \setminus \{0, 1\})^2$ tel que $a + b = n$ et $a \wedge b = 1$.
b) Soit (p_n) la suite croissante des nombres premiers. Montrer que, pour tout $k \geqslant 3$, $p_1 \cdots p_k \geqslant p_{k+1} + p_{k+2}$. *Ind.* Utiliser la première question avec $n = p_1 \cdots p_k$.

523. On écrit $n \in \mathbb{N}$ en base $p \in \mathcal{P}$: $n = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k p^k$ et l'on pose $S_p(n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k$.
a) Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Montrer que : $v_p\dbinom{n}{k} = \dfrac{S_p(k) + S_p(n-k) - S_p(n)}{p-1}$.
b) Exprimer $v_p\dbinom{n}{k}$ en fonction des retenues dans l'addition de $n - k$ et k en base p.
c) Est-ce que 7 divise $\dbinom{1000}{500}$?
d) Montrer que 2 divise $\dbinom{2n}{n}$. Étudier la divisibilité par 4 pour $n \geqslant 2$.

524. Soient G un groupe et $k \in \mathbb{N}$.
On suppose que : $\forall i \in [\![k, k+2]\!], \forall (a, b) \in G^2, (ab)^i = a^i b^i$. Montrer que G est abélien.

525. Soit G un groupe commutatif de cardinal pq avec p, q deux nombres premiers distincts. Montrer que G est cyclique. Trouver un contre-exemple dans le cas où G n'est pas commutatif.

526. ***a)*** Soit G un groupe cyclique d'ordre n. Soit H un sous-groupe de G. Montrer que H est cyclique d'ordre divisant n. Soit d un diviseur de n. Montrer qu'il existe un unique sous-groupe de G d'ordre d.
b) On note φ l'indicatrice d'Euler. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $D(n)$ l'ensemble des diviseurs positifs de n. Montrer l'égalité $n = \sum_{d \in \mathcal{D}(n)} \varphi(d)$.
c) Montrer que si $p, q \in \mathbb{N}^*$ sont premiers entre eux, alors $\varphi(pq) = \varphi(p)\varphi(q)$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer $\varphi(n)$ en fonction de la décomposition en facteurs premiers de n.

527. ***a)*** Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que $a\mathbb{Z} = \{ax,\, x \in \mathbb{Z}\}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$.
b) Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ non réduit à $\{0\}$.
i) Montrer que $a = \inf\left(G \cap \mathbb{R}^{+*}\right)$ existe.
ii) On suppose $a \neq 0$. Montrer que $G = a\mathbb{Z}$.
iii) On suppose $a = 0$. Montrer que G est dense dans $\mathbb{R}$.

528. Soit p un nombre premier impair.
a) Dénombrer les carrés de $\mathbb{F}_p$.
b) Montrer que -1 est un carré de $\mathbb{F}_p$ si et seulement si $p \equiv 1\,[4]$.

529. Soient A un anneau commutatif intègre et $(a_0, \ldots, a_n)$ une famille non nulle d'éléments de A. Montrer que l'équation $a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = 0$ admet au plus n solutions dans A.

530. On pose $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib,\ (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$.
Montrer que $\mathbb{Z}[i]$ est un anneau intègre et déterminer ses inversibles.

531. en Soit A un anneau commutatif.
Si I est un idéal de A, on note $R(I) = \{x \in A\ ;\ \exists n \in \mathbb{N},\ x^n \in I\}$.
a) Montrer que $R(I)$ est un idéal de A contenant I.
b) Soient I et J deux idéaux de A. Montrer :
$R(I \cap J) = R(I) \cap R(J)\,; \quad R(I) + R(J) \subset R(I + J)$.
c) Pour cette question, $A = \mathbb{Z}$. Montrer que l'ensemble des entiers naturels non nuls tels que $R(n\mathbb{Z}) = n\mathbb{Z}$ est l'ensemble des entiers naturels non nuls dont la décomposition primaire ne comporte aucun facteur premier d'exposant au moins égal à 2.

532. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $z_1, \ldots, z_n$ des nombres complexes non nuls de même module tels que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} z_k - z_i\right|$. Calculer $\left(\sum_{k=1}^{n} z_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{z_k}\right)$.

533. ***a)*** Montrer qu'il existe une unique suite (P_n) de polynômes à coefficients dans $\mathbb{Z}$ vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}^*, P_n\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^n + \frac{1}{x^n}$.
b) Soit $a \in \mathbb{Q}$ tel que $\cos(a\pi) \in \mathbb{Q}$. Montrer que : $2\cos(a\pi) \in \mathbb{Z}$.

534. ***a)*** Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$\forall \theta \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[,\ \dfrac{\sin((2n+1)\theta)}{\sin^{2n+1}(\theta)} = P_n(\text{cotan}^2\theta)$.

b) Déterminer les racines de P_n et calculer leur somme.

c) Montrer que, pour $\theta \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, $\text{cotan}^2\theta < \dfrac{1}{\theta^2} < \text{cotan}^2\theta + 1$.

d) Déduire de ce qui précède la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

535. ★ Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ unitaire de degré n. Montrer qu'il existe $k \in [\![0, n]\!]$ tel que $|P(k)| \geqslant \dfrac{n!}{2^n}$.

536. ★ Soit $P \in \mathbb{C}[X]$.

a) À quelle condition P réalise-t-il une surjection de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{C}$?

b) À quelle condition P réalise-t-il une surjection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$?

c) À quelle condition P réalise-t-il une surjection de $\mathbb{Q}$ sur $\mathbb{Q}$?

537. On pose $B_0 = 1$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $B_k = \dfrac{1}{k!}X(X-1)...(X-k+1)$.

a) Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}$, la famille $(B_0, ..., B_N)$ est une base de $\mathbb{R}_N[X]$.

b) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que si $P(\mathbb{N}) \subset \mathbb{Z}$ alors $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$.

c) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que si $\exp(2i\pi P(n)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ alors $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$.

d) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que si $P(n) - \lfloor P(n) \rfloor \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ alors $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$.

538. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![0, n-1]\!]$. Soit $P = a_nX^n + \cdots + a_1X + a_0 \in \mathbb{C}[X]$ polynôme de degré n tel que $(X-1)^k|P$. On note $\mu(P)$ le nombre de coefficients non nuls de P. On veut montrer que $\mu(P) \geqslant k+1$. On raisonne par l'absurde et on pose $A = \{i \in [\![0, n]\!],\ a_i \neq 0\}$.

a) On pose $P_0 = 1$ et $P_s = \displaystyle\prod_{j=0}^{s-1}(X-j)$ pour $s \in \mathbb{N}^*$.

Montrer que $\forall s \in [\![0, k-1]\!],\ P^{(s)}(1) = \displaystyle\sum_{i\in A} a_i P_s(i)$.

b) En déduire que $\forall i \in A$, $a_i = 0$, et conclure.

c) L'inégalité démontrée est-elle optimale ?

539. ***a)*** Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ simplement scindé sur $\mathbb{R}$ et non constant. Montrer que, si $\lambda \in \mathbb{R}$, $P' - \lambda P$ est simplement scindé sur $\mathbb{R}$.

b) Le résultat de la question précédente s'étend-il à $P'' - \lambda P$? Comment le généraliser ?

540. ***a)*** Soit P un polynôme irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$. Montrer que les racines complexes de P sont simples.

b) Soient $k \in \mathbb{N}^*$, $P \in \mathbb{Q}[X]$ non constant avec $\deg(P) \leqslant 2k-1$, $\alpha \in \mathbb{C}$ une racine de P de multiplicité k. Montrer que α est rationnel.

541. Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec : $a_0 \geqslant a_1 \geqslant \cdots \geqslant a_n > 0$.
a) Montrer que les racines complexes de P sont de module supérieur ou égal à 1.
b) Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $P(z) = 0$. Montrer $\min_{k \in [\![0,n-1]\!]} \frac{a_k}{a_{k+1}} \leqslant |z| \leqslant \max_{k \in [\![0,n-1]\!]} \frac{a_k}{a_{k+1}}$.

542. ***a)*** Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n \geqslant 1$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On considère la suite $\left(P^{(k)}(x)\right)_{k \in [\![0,n]\!]}$.
On note $v(x)$ le nombre de changements de signe stricts :
$v(x) = \left|\left\{(i,j) \in \mathbb{N}^2 \ ; \ 0 \leqslant i < j \leqslant n, \ P^{(i)}(x)P^{(j)}(x) < 0, \ \forall k \in]\!]i,j[\![, \ P^{(k)}(x)P^{(i)}(x) \geqslant 0\right\}\right|$.
Soit $a < b$ tel que $P(a)P(b) \neq 0$. Montrer que si l'on note $\mu(a,b)$ le nombre de racines comptées avec multiplicité sur $[a,b]$ de P comptées avec multiplicité, alors :
$\mu(a,b) \leqslant v(a) - v(b)$ et $\mu(a,b) \equiv v(a) - v(b)$ $[2]$.
b) Soit $P = a_0 + \cdots + a_n X^n \in \mathbb{R}[X]$ non constant. On pose $V(P)$ le nombre de changements de signe stricts de la suite $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ et $\mu(P)$ le nombre de racines strictement positives comptées avec multiplicité. Montrer que $\mu(P) \leqslant V(P)$ et $\mu(P) \equiv V(P)$ $[2]$.

543. ***a)*** Soit $P \in \mathbb{C}[X] \setminus \{0\}$. Décomposer P'/P en éléments simples.
b) On note $a_1, \ldots, a_n$ les racines de P. Soit a une racine de P'. Montrer qu'il existe des réels positifs $t_1, \ldots, t_n$ tels que $t_1 + \cdots + t_n = 1$ et $t_1 a_1 + \cdots + t_n a_n = a$.

544. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré $n \geqslant 2$, ayant n racines réelles distinctes et non nulles $a_1 < \ldots < a_n$. Calculer $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{P'(a_i)}$ et $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i P'(a_i)}$.

545. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme unitaire de degré n. On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ses racines comptées avec multiplicité. On suppose que P est à coefficients entiers.
Montrer que, pour tout $q \in \mathbb{N}^*$, $P_q = \prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_i^q)$ est à coefficients entiers.

546. Soit $\mathbb{K} = \mathbb{Q} + \sqrt{2}\mathbb{Q} + \sqrt{3}\mathbb{Q} + \sqrt{6}\mathbb{Q}$. Montrer que $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{Q}$-sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$ et que $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6})$ est une base de $\mathbb{K}$.

547. Quelle est la dimension du $\mathbb{Q}$-sous-espace de $\mathbb{R}$ engendré par $\mathbb{U}_5$?

548. Soient x, y, z des rationnels non nuls. Montrer que la matrice $\begin{pmatrix} x & y & z \\ 2y & z & 2x \\ z & x & 2y \end{pmatrix}$ est inversible.

549. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ et $D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & y & 1 & 0 \\ x^2 & 2x & y^2 & 2y & 2 \\ x^3 & 3x^2 & y^3 & 3y^2 & 6y \\ x^4 & 4x^3 & y^4 & 4y^3 & 12y^2 \end{vmatrix}$. Montrer que $D = 0$ si et seulement si $x = y$.

550. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont on note $C_1, \ldots, C_n$ les colonnes. Soit B la matrice dont les colonnes sont $C_1', \ldots, C_n'$ avec : $C_j' = \sum_{i \neq j} C_i$. Déterminer $\det B$ en fonction de $\det A$.

551. ***a)*** Soient $p \in \mathbb{N}^*$, $a_1, \ldots, a_p \in \mathbb{R}$ non tous nuls et $b_1, \ldots, b_p \in \mathbb{R}$ avec $b_1 < \cdots < b_p$. Montrer que $f_p : x \in \mathbb{R} \mapsto \sum_{i=1}^{p} a_i e^{b_i x}$ s'annule au plus $p - 1$ fois sur $\mathbb{R}$.
b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $\alpha_1 < \cdots < \alpha_n$ et $\beta_1 < \cdots < \beta_n$ des réels. Montrer que : $\det \left(e^{\alpha_i \beta_j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} > 0$.

552. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ où E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie.
Montrer que $\operatorname{rg} f = \operatorname{rg} f^2$ si et seulement si $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$.

553. Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$.
a) Montrer l'équivalence entre les trois propriétés suivantes :
(i) Im$(u) =$ Im(u^2) (ii) Ker$(u) =$ Ker(u^2) (iii) $E =$ Im$(u) \oplus$ Ker(u).
b) Donner des exemples d'endomorphismes vérifiant ces propriétés.
c) L'équivalence est-elle vraie en dimension infinie ? Montrer que (i) et (ii) équivaut à (iii).

554. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. On dit que $h \in \mathcal{L}(E)$ est une transvection s'il existe $\varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ non nulle et $a \in E$ non nul tels que : $\forall x \in E, h(x) = x + \varphi(x)a$.
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que rg$(u - \mathrm{id}) = 1$ et $(u - \mathrm{id})^2 = 0$. Montrer que u est une transvection.
La réciproque est-elle vraie ?

555. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que toutes les matrices semblables à A appartiennent au commutant de M. Déterminer M. Même question dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

556. Soient $p, q \in \mathbb{C}$. On note x_1, x_2 et x_3 les racines (non nécessairement distinctes) du polynôme $X^3 + pX + q$. Pour $j \in \mathbb{N}$, on pose $N_j = x_1^j + x_2^j + x_3^j$.
Calculer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, le déterminant de la matrice $M_n = (N_{i+j-2})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

557. ★ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\det((i \wedge j)_{1 \leqslant i,j \leqslant n})$.
Ind. On rappelle que, pour $N \in \mathbb{N}^*$, $N = \sum_{d \mid N} \varphi(d)$ où φ est l'indicatrice d'Euler.

558. Soient K_1, ... , K_n des segments non triviaux disjoints.
a) Montrer que, si $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ vérifie $\displaystyle\int_{K_j} P = 0$ pour tout $j \in \{1, ..., n\}$, alors $P = 0$.

b) Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{R}_n[X]$ non nul tel que $\displaystyle\int_{K_j} P = 0$ pour tout $j \in \{1, ..., n\}$.

559. ***a)*** Déterminer le rang de $\mathrm{Com}(A)$ en fonction du rang de A.
b) Calculer $\mathrm{Com}\ (\mathrm{Com}(A))$ lorsque $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
c) Montrer que si X est un vecteur propre de A associé à une valeur propre non nulle, alors X est un vecteur propre de $(\mathrm{Com}(A))^T$.

560. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit D l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $m_{i,j} = 0$ si i et j sont de parités différentes.
a) Montrer que D est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
b) Soit $M \in D \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Montrer que $\mathrm{Com}(M) \in D$.
c) Traiter le cas où M n'est pas inversible.

561. Trouver les solutions dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de $X^2 + X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

562. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AB = 0$.
Montrer $\forall k \geqslant 1$, $\mathrm{tr}(A^k) + \mathrm{tr}(B^k) = \mathrm{tr}\left((A+B)^k\right)$.

563. ***a)*** Soit $f \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K})$ vérifiant : $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2, f(AB) = f(BA)$. Montrer que f est proportionnelle à la trace.
b) Soit $g \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$ un endomorphisme d'algèbre. Montrer que $\mathrm{tr} \circ g = \mathrm{tr}$.

564. Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ non constante telle que : $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), f(AB) = f(A)f(B)$. Montrer que $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \iff f(A) \neq 0$.

565. Soient A, B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathrm{Ker}\, A = \mathrm{Ker}\, B$ si et seulement s'il existe P inversible telle que $B = PA$.

566. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer l'équivalence entre : i) $u^2 = 0$ et $\exists v \in \mathcal{L}(E),\ u \circ v + v \circ u = \mathrm{id}$, ii) $\mathrm{Im}\, u = \mathrm{Ker}\, u$.

567. Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $N = A - I_n$.
Soit (E) l'équation matricielle $X^2 = A$.
a) Quelles sont les matrices qui commutent avec N ?

b) Montrer que les solutions de (E) sont de la forme $X = \pm \begin{pmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Montrer qu'il y a au plus deux solutions.
c) Rappeler le développement limité à l'ordre n de $x \mapsto \sqrt{1+x}$. Résoudre (E).

568. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente.
a) Calculer $\det(A + I_n)$.
b) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $AM = MA$. Calculer $\det(A + M)$. On commencera par le cas où $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.
c) Le résultat est-il toujours vrai si $AM \neq MA$?

569. Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$.
a) Montrer que $|\operatorname{rg}(u) - \operatorname{rg}(v)| \leqslant \operatorname{rg}(u + v) \leqslant \operatorname{rg}(u) + \operatorname{rg}(v)$.
b) Soient F un sous-espace vectoriel de E, G et H deux supplémentaires de F. On note p (resp. q) la projection sur F (sur H) parallèlement à G (à F).
Montrer que $\operatorname{rg}(p + q) = \operatorname{rg} p + \operatorname{rg} q$.

570. Déterminer les parties G de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $(G, \times)$ soit un groupe multiplicatif et G ne soit pas un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

571. Soit G un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $\displaystyle\sum_{M \in G} \mathrm{Tr}(M)$ est un entier divisible par le cardinal de G.

572. ***a)*** Soit G un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ tel que $\displaystyle\sum_{g \in G} \operatorname{tr} g = 0$. Montrer que $\displaystyle\sum_{g \in G} g = 0$.
b) Soient G un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et V un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ stable par tous les éléments de G. Montrer que V admet un supplémentaire stable par tous les éléments de G.

573. Déterminer les idéaux bilatères de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire les sous-groupes additifs stables par multiplication à gauche et à droite par n'importe quel élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

574. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, f et g deux éléments de $\mathcal{L}(E)$ tels que $fg - gf = \mathrm{id}_E$.
a) Montrer que E est de dimension infinie ou nulle.
b) Montrer que f n'est pas nilpotent.
c) Donner un exemple de triplet (E, f, g) vérifiant les conditions précédentes.

575. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
a) Montrer que $|\det A| \leqslant \displaystyle\prod_{i=1}^{n} \Big(\sum_{j=1}^{n} |A_{i,j}| \Big)$.
b) Lorsque $\det A \neq 0$, étudier le cas d'égalité.

576. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une partie S de $\mathcal{L}(E)$ est dite dense si, pour tout $n \geqslant 1$, toute famille $(b_1, \ldots, b_n)$ de vecteurs de E et toute famille libre $(a_1, \ldots, a_n)$ de vecteurs de E, il existe $f \in S$ tel que $f(a_i) = b_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.
a) Quelles sont les parties denses de $\mathcal{L}(E)$ si E est de dimension finie ?
b) Dans cette question, on suppose que E n'est pas de dimension finie.
i) Montrer que $\{f \in \mathcal{L}(E),\ \mathrm{rg}\, f < +\infty\}$ est dense dans $\mathcal{L}(E)$.
ii) Même question avec $\{f \in \mathcal{L}(E);\ \mathrm{rg}\, f$ est fini et pair$\}$.
iii) Si S est dense dans $\mathcal{L}(E)$, déterminer $\{g \in \mathcal{L}(E)\ ; \forall f \in S,\ fg = gf\}$.

577. Soit $(M_{i,j})$ une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant : $\forall (i,j,k,\ell) \in [\![1,n]\!]^4, M_{i,j}M_{k,\ell} = \delta_{j,k}M_{i,\ell}$.
a) Montrer que $\mathrm{Im}\, M_{i,j}$ est indépendante de j. On la notera F_i.
b) Montrer que $\mathbb{K}^n = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{n} F_i$.
c) En déduire $\dim F_i$.
d) Montrer qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, M_{i,j} = PE_{i,j}P^{-1}$.
e) Expliciter les automorphismes de l'algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

578. Soit U une partie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ non vide, finie et stable par produit. Montrer qu'il existe $M \in U$ tel que $\mathrm{tr}\, M \in \{0, \ldots, n\}$.

579. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $A_x = \begin{pmatrix} 0 & x \\ x & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer la structure de l'ensemble : $\{\exp(A_x),\ x \in \mathbb{R}\}$ et expliciter $\exp(A_x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

580. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admettant n valeurs propres distinctes. Montrer que l'ensemble des matrices qui commutent avec M est $\mathrm{Vect}(I_n, M, \ldots, M^{n-1})$.

581. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^n = \mathrm{id}$. Pour $b \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, résoudre $x + \lambda u(x) = b$.

582. Soit $Z = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Calculer χ_{Z^2}. La matrice Z est-elle diagonalisable ?

583. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $U = (u_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n},\ V = (v_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ où $u_{i,i+1} = 1$ pour $1 \leqslant i \leqslant n-1$, les autres coefficients étant nuls, $v_{i,j} = 1$ si $j > i$, les autres coefficients étant nuls.
a) Calculer le polynôme minimal de U.
b) Montrer que U et V sont semblables.

584. Soient $a_1 < ... < a_n$ des réels et $M = \begin{pmatrix} a_1+1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & a_2+1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & a_n+1 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer le polynôme caractéristique de M.
b) Montrer que M est diagonalisable et que ses espaces propres sont des droites.

585. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$, $a, b \in \mathbb{R}$ et $P = X^2 + aX + b$. On suppose que P est irréductible sur $\mathbb{R}$ et annulateur de u.
a) Soit $x \in E \setminus \{0\}$. Montrer que $F_x = \mathrm{Vect}(x, u(x))$ est un plan stable par u.
b) Soient F un sous-espace vectoriel stable par u et $x \in E \setminus F$. Montrer que $F \cap F_x = \{0\}$.
c) Montrer que u est diagonalisable par blocs identiques de taille 2×2.

586. Écrire l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ non diagonalisables comme réunion de deux plans vectoriels privés de leur droite d'intersection.

587. Soient a, b dans $\mathbb{R}^*$ et A la matrice de taille $2n$ dont la diagonale contient des a, l'anti-diagonale des b et les autres coefficients sont nuls.
a) La matrice A est-elle diagonalisable ? Déterminer ses éléments propres.
b) À quelle condition A est-elle inversible ?
c) Calculer A^k pour $k \in \mathbb{N}$.

588. Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a) Montrer que A et B sont inversibles et préciser le sous-groupe G de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ engendré par ces matrices.
b) Dans le cas $n = 3$, préciser les matrices de G qui sont diagonalisables.

589. Soit u l'endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ défini par
$\forall P \in \mathbb{R}[X],\ u(P) = (X^2 - 1)P'' + 4XP'$.
a) Montrer que le spectre réel de u est l'ensemble $\{n(n+3),\ n \in \mathbb{N}\}$, et que les espaces propres associés sont des droites vectorielles.
b) Pour $n \in \mathbb{N}$, on note P_n l'unique polynôme unitaire générateur de la droite propre associée à $n(n+3)$. Trouver une relation entre P_n, P_{n-1} et P_{n-2} pour $n \geqslant 2$.

590. Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soient $A \in E$ et $u_A : M \in E \mapsto AM$.
a) Caractériser les matrices A telles que u_A soit un automorphisme de E.
b) Calculer déterminant et trace de l'endomorphisme u_A.
c) Montrer que u_A est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable.

591. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nulles et $f : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto M + \mathrm{tr}(AM)B$.

a) Déterminer un polynôme de degré 2 annulateur de f.
b) Étudier la diagonalisabilité de f.

592. Soient $(M, N) \in \mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{C})$. On suppose que $MN = 0$ et que $M + M^T$ est inversible.
a) Montrer que M et N ont un vecteur propre commun.
b) Montrer que $N + N^T$ n'est pas inversible.

593. Soient $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de projection et $f : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto PM - MP$.
a) L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?
b) Calculer la trace de f.

594. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisables. Soit Δ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ défini par $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\Delta(M) = AM + MB$. Montrer que Δ est diagonalisable et préciser ses valeurs propres.

595. Soit σ une permutation de $[\![1, n]\!]$. Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on pose $p(M) = M'$ avec : $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $m'_{i,j} = m_{i,j}$ si $i = \sigma(j)$ et $m'_{i,j} = 0$ sinon.
a) Montrer que p est un projecteur. Déterminer son noyau et son image.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ non nulle. On définit deux applications ϕ et u_A par :
$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \phi(M) = \sum_{k=1}^{n} m_{\sigma(k),k} \text{ et } u_A(M) = \phi(M)A + \phi(A)M.$$
b) Montrer que u_A est diagonalisable si et seulement si $\phi(A) \neq 0$.
c) L'endomorphisme u_A peut-il être un projecteur ?

596. Soient E un $\mathbb{R}$-espace de dimension n, $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g - g \circ f = f$.
a) Montrer que f est nilpotent.
b) On suppose que g est diagonalisable et que $\dim(\operatorname{Ker} f) = 1$. Déterminer g.

597. Soient $n \geqslant 2$, $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB - BA = B$.
a) Montrer que, pour $m \in \mathbb{N}^*$, $AB^m - B^m A = mB^m$.
b) En déduire que B est nilpotente.

598. Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie.
a) Montrer que deux endomorphismes u et v de E qui commutent ont un vecteur propre en commun.
b) Montrer qu'une famille finie F d'endomorphismes de E qui commutent admet une base de trigonalisation commune à ses éléments.

599. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$.
a) Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ annulateur de f tel que 0 soit racine simple de P.
Montrer que : $E = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f$.
On suppose dans la suite que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et que E est de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.
b) Soit $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $fg = 0$. Montrer que f et g sont cotrigonalisables.
c) Soit $f_1, \ldots, f_p \in \mathcal{L}(E)$ qui commutent. Montrer que $f_1, \ldots, f_p$ sont cotrigonalisables.
d) Soient $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{L}(E)$ nilpotents qui commutent. Calculer $f_1 \circ \cdots \circ f_n$.

600. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si $\forall P \in \mathbb{C}[X],\ P(A)$ nilpotent $\Rightarrow P(A) = 0$.

601. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec B diagonalisable. On suppose que $AB^3 = B^3A$. Montrer que A et B commutent. Généraliser.

602. Quels sont les $n \in \mathbb{N}$ tels qu'existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A^3 - A^2 = I_n$?

603. Déterminer les entiers $n \geqslant 1$ tels qu'il existe $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ vérifiant $f^3 + f^2 - \mathrm{id} = 0$ et $\mathrm{tr}\, f \in \mathbb{Q}$.

604. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On pose $f_A : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto AMA^T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
a) Soit $(X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n) \in (\mathbb{C}^n)^{2n}$. Montrer que $(X_1, \ldots, X_n)$ et $(Y_1, \ldots, Y_n)$ sont des bases de $\mathbb{C}^n$ si et seulement si $\left(X_i Y_j^T\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
b) Montrer que A est inversible si et seulement si f_A est inversible.
c) On suppose A diagonalisable. Montrer que f_A est diagonalisable.
d) Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$ une valeur propre de A et Y un vecteur propre associé. Montrer que le sous-espace vectoriel $F = \left\{XY^T,\ X \in \mathbb{C}^n\right\}$ est stable par f_A.
e) Montrer que si f_A est diagonalisable, alors A est diagonalisable.

605. Soit p une permutation de $[\![1, n]\!]^2$. On considère l'application $u : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par : $u(A) = (A_{p(i,j)})_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2}$. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Est-il diagonalisable ?

606. ***a)*** Soient $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $CD = DC$.
Montrer que $\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - BC)$.
b) Soient $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, $B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. Montrer l'équivalence des énoncés suivants :
i) λ est valeur propre de la matrice $\begin{pmatrix} 0 & A^{-1}C \\ I_n & A^{-1}B \end{pmatrix}$,
ii) il existe $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ tel que la fonction $t \mapsto e^{\lambda t}x$ soit solution de $Ay'' - By' - Cy = 0$.

607. Donner une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constituée de matrices diagonalisables.

608. Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que f est diagonalisable si et seulement si f^2 est diagonalisable et $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)$.

609. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Montrer que $A^2 = A$ si et seulement si $\mathrm{rg}\, A \leqslant \mathrm{tr}\, A$ et $\mathrm{rg}(I_n - A) \leqslant \mathrm{tr}(I_n - A)$.

610. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^{2^n} = I_2$.
Montrer que $A^2 = I_2$ ou qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^{2^k} = -I_2$.

611. Soit u un endomorphisme diagonalisable de $\mathbb{C}^n$. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

i) l'endomorphisme u admet n valeurs propres distinctes,
ii) la famille $(\mathrm{id}, u, u^2, \dots, u^{n-1})$ est libre,
iii) il existe $x \in \mathbb{C}^n$ tel que $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ soit libre.

612. Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.
a) Montrer que A est triangulaire supérieure si et seulement si, pour tout $k \geqslant 2$, A^k est triangulaire supérieure.
b) Donner un contre-exemple si A est une matrice non inversible.

613. Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que u est diagonalisable si et seulement s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$, $v_1, \dots, v_n \in \mathcal{L}(E)$ tels que $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $u^k = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} {\alpha_i}^k v_i$.

614. Soit $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$. On note $[A, B] = AB - BA$. Soit $C = [A, B]$. On suppose que $[A, C] = 0$.
a) Montrer que, pour tout $k > 0$, $\mathrm{tr}(C^k) = 0$. En déduire que C est nilpotente.
b) Montrer que, pour tout $p > 0$, $[B, A^p] = -pCA^{p-1}$.
c) On suppose que A est nilpotente. Montrer que AB l'est aussi.

615. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer l'équivalence entre :
i) l'unique valeur propre de A est 1,
ii) $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(A^2) = \cdots = \mathrm{tr}(A^n) = n$.

616. ***a)*** Soit $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Déterminer l'inverse de $\begin{pmatrix} I_n & D \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$.
b) Soit A, B, C des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $\mathrm{sp}\, A \cap \mathrm{sp}\, B = \emptyset$. Montrer que $\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ sont semblables.

617. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On pose $M_p = \dfrac{1}{p} \displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} A^k$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la suite $(M_p)_{p \geqslant 1}$ soit bornée.

618. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $C(A) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})\ ;\ AM = MA\}$.
a) Montrer que $C(A)$ est de dimension supérieure ou égale à n.
b) Montrer que $C(A)$ est de dimension n si et seulement si $\chi_A = \pi_A$.

619. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ possédant n valeurs propres distinctes. Montrer que : $C(M) = \mathrm{Vect}(I_n, M, \dots, M^{n-1})$ où $C(M)$ désigne le commutant de la matrice M.

620. Déterminer les $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ commutant à A soit diagonalisable.

621. Quelles sont les $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que, pour toute $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, PA soit diagonalisable ?

622. Quelles sont les $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que, pour toute $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, PA soit trigonalisable ?

623. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Soit u l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ défini par
$\forall T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ u(T) = AT - TB$.
a) Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ (resp. $\beta \in \mathbb{C}$) une valeur propre de A (resp. B). Montrer que $\alpha - \beta$ est valeur propre de u.
b) Soient $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de u, et $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ un vecteur propre associé.
Montrer que, pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$, $P(A)T = TP(\lambda I_n + B)$.
c) Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathrm{Sp}(A)$ et $\beta \in \mathrm{Sp}(B)$ telles que $\lambda = \alpha - \beta$.
d) En déduire une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ non nulle telle que $AT = TB$.

624. ***a)*** Pour quels $\lambda \in \mathbb{C}$ existe-t-il $(A, B) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})^2$ tel que $AB = \lambda BA$?
b) Pour quels $\lambda \in \mathbb{C}$ est-il vrai que, pour tout $(A, B) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})^2$ tel que $AB = \lambda BA$, les matrices A et B sont diagonalisables ?

625. On note $\mathbb{B}$ l'ensemble des suites bornées de $(\mathbb{C})^{\mathbb{Z}}$.
On s'intéresse à l'endomorphisme $T \in \mathcal{L}(\mathbb{B})$ qui à (u_n) associe (u_{n+1}).
a) Déterminer les valeurs et les vecteurs propres de T.
b) Soit $S \subset \mathbb{B}$ un sous-espace de dimension finie de $\mathbb{B}$ stable par T. On note $\widetilde{T}$ l'endomorphisme induit par T sur S. Montrer que l'on dispose de $(\lambda_1, \ldots, \lambda_r) \in \mathbb{C}^r$ distincts tels que
$S = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathrm{Ker}\left(\widetilde{T} - \lambda_i \mathrm{id}\right)$.

626. ***a)*** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si e^A est diagonalisable. Que se passe-t-il sur $\mathbb{R}$?
b) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Résoudre l'équation $e^M = A$.

627. $\star$ Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien de dimension n, $v_1, \ldots, v_{n+2}$ des vecteurs de E. Montrer qu'on ne peut avoir : $\forall i \neq j,\ \langle v_i, v_j \rangle < 0$.

628. Soient $(E, \langle\ ,\rangle)$ un espace euclidien, $c_1, c_2 \in E$, $r_1, r_2 \in \mathbb{R}^{+*}$.
a) À quelle condition les boules fermées $B_f(c_1, r_1)$ et $B_f(c_2, r_2)$ se rencontrent-elles ?
b) À quelle condition les sphères $S(c_1, r_1)$ et $S(c_2, r_2)$ se rencontrent-elles ?

629. Soient E un espace préhilbertien réel et $(e_1, \ldots, e_n)$ une famille libre de vecteurs de E telle que $\forall x \in E,\ \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle^2$. Montrer que la famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormée de E. Le résultat reste-t-il vrai si on ne suppose plus la famille libre, mais seulement constituée de vecteurs non nuls ?

630. ★ Soient E un espace euclidien, A une partie de E et $B = \{\langle x,y\rangle \,;\, (x,y)\in A^2\}$. Montrer que A est fini si et seulement si B est fini.

631. Soient E un espace euclidien, A et B deux sous-espaces vectoriels de E orthogonaux. Montrer que les symétries orthogonales par rapport à A et par rapport à B commutent et que leur composée est la symétrie orthogonale par rapport à $(A+B)^{\perp}$.

632. Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien et $a \in E\setminus\{0\}$.
Pour $\lambda\in\mathbb{R}$, soit $\Phi_\lambda : x\mapsto x-\lambda\,\langle a,x\rangle\, a$.
a) Déterminer les λ pour lesquels Φ_λ est inversible.
b) Si $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$, calculer $\Phi_\lambda\circ\Phi_\mu$.
c) Soit $\lambda\in\mathbb{R}$. Déterminer les éléments propres de Φ_λ.

633. Soit E un espace euclidien.
a) Trouver les endomorphismes f de E tels que :
$\forall x,y\in E, \langle x,y\rangle = 0 \implies \langle f(x), f(y)\rangle = 0$.
b) Pour un tel f, discuter de la nature de la suite de terme général $u_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f^k$.

634. ***a)*** Énoncer le théorème de réduction pour une matrice de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$.
b) Montrer que deux rotations de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ qui ont même axe commutent.
c) Montrer que deux demi-tours de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ d'axes orthogonaux commutent.
d) Montrer que si deux rotations de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ commutent, alors on est dans l'un des deux cas précédents.

635. Soient $a,b,c\in\mathbb{R}$ et $A(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & b & c\\ c & a & b\\ b & c & a\end{pmatrix}$.
a) Montrer que $A(a,b,c)$ est dans $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ si et seulement si a,b,c sont les racines d'un polynôme X^3-X^2+t où t appartient à un intervalle I que l'on déterminera.
b) Soit $a,b,c\in\mathbb{R}$. Déterminer une droite et un plan stables par $A(a,b,c)$.
c) Si $A(a,b,c)\in\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$, caractériser l'endomorphisme canoniquement associé.

636. On travaille dans l'espace $E=\mathbb{R}[X]$. Pour P et Q dans E, on pose
$\Phi(P,Q) = \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)\,Q(t)\,e^{-t}\mathrm{d}t$.
a) Montrer que Φ est correctement définie et munit l'espace E d'un produit scalaire.
b) Calculer $\Phi(X^p, X^q)$ pour $p,q\in\mathbb{N}$.
c) Calculer l'orthonormalisée de Gram-Schmidt de la famille $(1,X,X^2)$.
d) Calculer la distance de X^3 à $\mathbb{R}_2[X]$.

637. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Montrer que : $\forall P\in\mathbb{R}_{n-1}[X]$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\left(P(x)+x^n\right)^2\,\mathrm{d}x \geqslant (n!)^2$.

638. Soit $E=\mathbb{R}_3[X]$.

a) Montrer que l'application $\varphi : (P, Q) \mapsto \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\mathrm{d}t$ définit un produit scalaire sur E.

b) Déterminer $\displaystyle\inf_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \int_{-1}^{1} (t^3 - at^2 - bt - c)^2\mathrm{d}t$.

639. Calculer le minimum de la fonction $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \displaystyle\int_0^1 (t\ln(t) - xt - y)^2\mathrm{d}t$.

640. On fixe un entier $n \geqslant 0$, et on pose $Q_i = \left(X^i(1-X)^i\right)^{(i)}$ pour $i \in [\![0, n]\!]$. On munit également $\mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire défini par $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_0^1 P(t)\,Q(t)\,\mathrm{d}t$.

a) Montrer que $(Q_0, \ldots, Q_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.

b) On fixe $k \in [\![0, n]\!]$ et on note $\mathcal{F}_{k,n}$ l'ensemble des éléments de $\mathbb{R}_n[X]$ dont le coefficient de X^k est égal à 1. Montrer que $\mathcal{F}_{k,n}$ est un sous-espace affine de $\mathbb{R}_n[X]$, et préciser sa direction $\overrightarrow{\mathcal{F}}_{k,n}$.

c) Trouver $R_k \in \mathcal{F}_{k,n} \cap \overrightarrow{\mathcal{F}}_{k,n}^{\perp}$, et calculer $\displaystyle\int_0^1 R_k(t)^2\,\mathrm{d}t$. Interpréter le résultat.

641. Soient E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites réelles et $D : u \in E \longmapsto (u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

a) Vérifier que D est un endomorphisme de E. Est-il injectif ? Surjectif ?

b) Donner les éléments propres de l'endomorphisme D.

c) Soit F l'espace des suites réelles de carré sommable.
Montrer que F est stable par l'endomorphisme D.

d) On munit F de son produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$ usuel.
Décrire l'ensemble $H = \left\{ \dfrac{\langle u, D(u)\rangle}{\|u\|^2},\ u \in F \setminus \{(0)_{n\in\mathbb{N}}\} \right\}$.

642. Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$, $p, q \in \mathcal{L}(E)$ des projecteurs orthogonaux.

a) Vérifier que $\operatorname{Im} p$ est stable par pq et que l'endomorphisme induit est symétrique.

b) Montrer que $\operatorname{Ker}(pq) = \operatorname{Ker} q \oplus (\operatorname{Im}(q) \cap \operatorname{Ker}(p))$.

c) Montrer que E est somme directe orthogonale de $(\operatorname{Im} p + \operatorname{Ker} q)$ et de $(\operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Im} q)$.

d) En déduire que pq est diagonalisable.

e) Montrer que le spectre de pq est inclus dans $[0, 1]$.

643. Soient p et q deux projecteurs orthogonaux d'un espace euclidien E. Montrer que $q \circ p$ est un projecteur si et seulement si p et q commutent.

644. On munit $E = \mathbb{R}^n$ munit du produit scalaire usuel. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a) Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par A. Montrer que $F^\perp$ est stable par A^T.

b) On suppose $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $A^TA = AA^T$. Montrer que A est diagonalisable ou A est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & -\beta \\ 0 & \beta & \alpha \end{pmatrix}$ avec $\beta \neq 0$.

645. ***a)*** Quelles sont les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui commutent avec toutes les matrices de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$?
b) Quelles sont les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui commutent avec toutes les matrices de $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$?

646. Soit E un espace euclidien de dimension 4. Trouver les endomorphismes $f \neq 0$ de E tels que $\mathrm{tr}(f) = 0,\ f + f^4 = 0$ et $f^* = -f^2$.

647. Soit $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $C_k = \dfrac{1}{k+1}\displaystyle\sum_{j=0}^{k} M^j$. Étudier la convergence de la suite $(C_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

648. Soit $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Montrer que A est semblable à une matrice définie par blocs : $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ où B est inversible de taille p. Montrer que p est pair.

649. Soit $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Montrer que A est semblable à une matrice diagonale par blocs, de blocs diagonaux antisymétriques de taille au plus 2×2.

650. Soient $A, M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
a) Montrer que AA^T et A^TA sont diagonalisables.
b) Montrer que MN et NM ont les mêmes valeurs propres et que, pour toute valeur propre non nulle, les sous-espaces propres associés sont de même dimension.
c) Montrer que A^TA et AA^T ont les mêmes valeurs propres avec les mêmes multiplicités.
d) Montrer qu'il existe $U \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que : $A^TA = UAA^TU^{-1}$.

651. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A^TA = B^TB$. Montrer qu'il existe $Q \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $B = QA$.

652. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = AA^T$. Montrer que $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

653. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ nilpotente telle que : $M^TM = MM^T$. Déterminer M^TM puis M.

654. Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
a) Montrer que $\det(A) \geqslant 0$.
b) Pour $p \in [\![1, n]\!]$, on pose $A_p = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant p}$. Montrer que $\det(A_p) \geqslant 0$.

655. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On suppose que la suite $(A^k)_{k\geqslant 1}$ converge vers $B = (b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. Montrer que $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |b_{i,j}| \leqslant n\sqrt{\mathrm{rg}\, B}$.

656. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\left|\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{ij}\right| \leqslant n \leqslant \displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{i,j}| \leqslant n\sqrt{n}$.

657. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\left(\sum_{i=1}^n a_{i,i}\right)^2 \leqslant \text{rg}(A) \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j}^2$.

658. Soit $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Calculer $\max\{\text{tr}(OS)\ ;\ O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})\}$.

659. Soit E un espace euclidien. On note $\mathcal{A}(E)$ (resp. $\mathcal{S}(E)$, $\mathcal{O}(E)$) l'ensemble des endomorphismes antisymétriques (resp. symétriques, orthogonaux) de E.
a) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que l'ensemble $T = \{\mathrm{tr}(uv)\,;\, v \in \mathcal{O}(E)\}$ est majoré.
b) Montrer que si $u \in \mathcal{A}(E)$ alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\exp(tu) \in \mathcal{O}(E)$.
c) On suppose que $\sup T$ est atteint en $v = \text{id}$. Montrer que $u \in \mathcal{S}^+(E)$.
d) Étudier la réciproque.

660. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On suppose que $a_{1,1}, \dots, a_{n,n}$ sont les valeurs propres de A prises avec multiplicité. Montrer que A est diagonale.

661. ***a)*** Soit $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $\sum_{i=1}^n x_i = 0$. Montrer que $|x_j| \leqslant \left(\frac{n-1}{n}\right)^{1/2} \|x\|_2$ pour tout $j \in [\![1, n]\!]$.
b) Soient $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et λ une valeur propre de A.
Montrer que $\left|\lambda - \frac{\text{tr}\, A}{n}\right| \leqslant \left(\frac{n-1}{n}\right)^{1/2} \left(\sqrt{\|A\|_2^2 - \frac{(\text{tr}\, A)^2}{n}}\right)$.

662. Soient $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que : $\forall X \in \mathbb{R}^n, a\|X\|^2 \leqslant \langle X, AX\rangle \leqslant b\|X\|^2$. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que : $\forall x \in [a, b], P(x) > 0$. Montrer que $P(A) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

663. ***a)*** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique réelle. Montrer que les valeurs propres de A sont imaginaires pures.
b) Montrer que $(I_n + A)(I_n - A)^{-1} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.
c) Soit $Q \in \text{SO}_2(\mathbb{R})$. Résoudre l'équation $(I_2 + A)(I_2 - A)^{-1} = Q$, d'inconnue une matrice antisymétrique $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

664. Soient $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
a) Montrer qu'il existe $C \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $C^2 = A^{-1}$.
b) On pose $D = CBC$. Montrer que $\det(I_n + D)^{1/n} \geqslant 1 + \det(D)^{1/n}$.
c) En déduire que $\det(A + B)^{1/n} \geqslant \det(A)^{1/n} + \det(B)^{1/n}$.
d) Est-ce encore vrai si $A, B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$?

665. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que A appartient à $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ si et seulement si, pour toute matrice $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, on a $\text{tr}(AB) \geqslant 0$.

666. On considère la forme quadratique $q : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (x + z)^2 + 2xy + 4yz$.
a) Déterminer a, b, c tels que $q(x, y, z) = a(x + y + z)^2 + b(y - z)^2 + cz^2$.
b) La forme quadratique q est-elle définie positive ?
c) Trouver les plans de $\mathbb{R}^3$ sur lesquels la restriction de q est définie positive.

Analyse

667. Soient E un espace vectoriel normé et A une partie de E. On considère l'ensemble des parties que l'on peut obtenir en appliquant successivement des passages à l'intérieur ou à l'adhérence à partir de A.
a) Montrer qu'il y en a au plus 7.
b) Donner une partie A telle qu'il y en ait exactement 7.

668. Soient $(E, \| \|)$ un espace vectoriel normé et A une partie non vide de E.
Soit $f : x \in E \mapsto d(x, A) = \inf\{\|x - a\|,\ a \in A\}$.
a) Montrer que f est 1-lipschitzienne.
b) Montrer que A est fermé si et seulement si $A = f^{-1}(\{0\})$.
c) Montrer que tout fermé de E est intersection décroissante d'ouverts.
d) Montrer que tout ouvert est union croissante de fermés.

669. Soient E un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel de dimension finie.
a) Montrer que : $\forall x \in E, \exists y \in F, d(x, F) = \|y - x\|$.
b) On suppose que $F \neq E$. Montrer qu'il existe $u \in E$ tel que $d(u, F) = \|u\| = 1$.
c) En déduire que $B_f(0, 1)$ est compact si et seulement si E est de dimension finie.

670. Déterminer les sous-groupes compacts de $\mathbb{C}^*$.

671. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$. Montrer que f est surjective si et seulement si l'image de tout ouvert par f est un ouvert.

672. ***a)*** Soient f une fonction continue de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ et N une norme sur $\mathbb{R}^n$. Montrer l'équivalence entre :
(i) $|f(x)| \to +\infty$ lorsque $N(x) \to +\infty$;
(ii) l'image réciproque de tout compact par f est un compact.
b) Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$. On suppose que l'image réciproque de tout compact par f est un compact. Montrer que l'image directe de tout fermé par f est un fermé.
c) La réciproque du résultat précédent est-elle vraie ?

673. On munit $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ de la norme $\| \|_\infty$.
Si $f \in E$, on pose $u(f) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^k f\left(\frac{1}{k}\right). \in \mathbb{R}$.
a) Montrer que u est bien définie sur E.
b) Montrer que u est continue sur E et déterminer sa norme subordonnée.

674. Soient $L^1(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des suites sommables et $N : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|$.
a) Montrer que N est une norme.
b) Soit A l'ensemble des suites de $L^1(\mathbb{R})$ nulle à partir d'un certain rang. Donner l'adhérence et l'intérieur de A. *Ind.* Remarquer que A est dense dans $L^1(\mathbb{R})$.

675. On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique.
Soit $D = \left\{(x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}^+)^n \,;\, \sum x_i^2 < 1,\, \sum x_i > 1\right\}$. Soit $f : D \to \mathbb{R}$ telle que $\forall x, y \in D, |f(x) - f(y)| \leqslant \|x - y\|^2$. Que dire de f ?

676. Soient $(E, \| \, \|)$ un espace normé réel, $p \in \mathbb{N}^*$, $(x_1, \ldots, x_p) \in E^p$,.
a) Montrer que $(x_1, \ldots, x_p)$ est libre si et seulement si
$\inf \left\{ \left\| \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i \right\| \;;\; (\lambda_1, \ldots \lambda_p) \in \mathbb{R}^p \right\} > 0.$
b) En déduire que l'ensemble des $(x_1, \ldots, x_p) \in E^p$ tels que $(x_1, \ldots, x_p)$ est libre est un ouvert de E^p. Retrouver ce résultat plus simplement si E est de dimension finie.

677. Soient $n \geqslant 2$, K un compact de $\mathbb{R}^n$ et $\varepsilon > 0$. Une partie $A \subset K$ est ε-séparée si, pour tous $x, y \in A$ tel que $\|x - y\| < \varepsilon$, on a $x = y$.
a) Montrer qu'il existe un entier $M(\varepsilon)$ tel que toute partie ε-séparée de K est de cardinal inférieur à $M(\varepsilon)$ et il existe une partie ε-séparée de K de cardinal $M(\varepsilon)$.
b) Soit $f : K \to K$. On suppose que, pour tous $x, y \in K$, $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$. Montrer que f est surjective.

678. * Soient $n \geqslant 2$ et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continue telle que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(\{a\})$ est compact. Montrer que f admet un extremum global. Que se passe-t-il si $n = 1$?

679. Soient $(E, \| \, \|)$ un espace normé réel de dimension finie, $k \in]0, 1[$, f une application k-lipschitzienne de E dans E. Montrer que f admet un unique point fixe.

680. Soit $E = \mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme. Pour $f \in E$ on pose $\varphi(f) = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t - \int_{-1}^0 f(t)\,\mathrm{d}t$.
a) Montrer que φ est une forme linéaire continue sur E et calculer $|\!|\!| \varphi |\!|\!|$.
b) Existe-t-il f unitaire telle que $|\varphi(f)| = |\!|\!| f |\!|\!|$?

681. On note E l'espace vectoriel des fonctions de $[-1, 1]$ vers $\mathbb{R}$ continues par morceaux, muni du produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} fg$ et de la norme euclidienne associée $\| \, \|$.
On dit qu'une suite $(f_n)_{n \geqslant 0} \in E^{\mathbb{N}}$ converge fortement (resp. faiblement) vers $f \in E$ si $\|f_n - f\| \to 0$ (resp. $\langle f_n, \phi \rangle \to \langle f, \phi \rangle$ pour tout $\phi \in C^1([-1, 1], \mathbb{R})$).
a) Montrer que la convergence uniforme implique la convergence forte. La réciproque est-elle vraie ?
b) Montrer que la convergence forte implique la convergence faible.
c) Soit $(f_n)_{n \geqslant 0} \in E^{\mathbb{N}}$ convergeant faiblement vers $f \in C^1([-1, 1], \mathbb{R})$ et vérifiant de plus $\|f_n\| \to \|f\|$. Montrer qu'alors $(f_n)_{n \geqslant 0} \in E^{\mathbb{N}}$ converge fortement vers f.
d) Soit $(\phi_n)_{n \geqslant 0} \in C^1([-1, 1], \mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ convergeant uniformément vers ϕ et telle que $(\phi_n')_{n \geqslant 0}$ converge uniformément. Soit par ailleurs $(f_n)_{n \geqslant 0} \in E^{\mathbb{N}}$ bornée et convergeant faiblement vers f. Montrer qu'alors $\langle f_n, \phi_n \rangle \to \langle f, \phi \rangle$.
e) On pose $f_n(x) = \sin(nx)$ pour $n \geqslant 0$ et $x \in [-1, 1]$.

f) Montrer que $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge faiblement vers la fonction nulle.
g) La suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge-t-elle fortement ?

682. Soient $a_1 < \cdots < a_p$ des réels et $P = \prod_{i=1}^{p}(X - a_i)$.
On pose : $E = \left\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ P(M) = 0\right\}$.
a) Soit $M \in E$. Déterminer les valeurs possibles de $\operatorname{tr} M$.
b) Déterminer les matrices $M \in E$ vérifiant $\operatorname{tr} M = na_1$.
c) Montrer que la matrice $a_1 I_n$ est isolée dans E.
d) La matrice $\operatorname{Diag}(a_2, a_1, \ldots, a_1)$ est-elle isolée ?
e) Généraliser.

683. ***a)*** Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ unitaire de degré $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que P est scindé sur $\mathbb{R}$ si et seulement si : $\forall z \in \mathbb{C}$, $|P(z)| \geqslant |\operatorname{Im}(z)|^n$.
b) Montrer que l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ trigonalisables est fermé.
c) Quelle est l'adhérence de l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

684. Soient $n \geqslant 2$ et $r \in [\![1, n-1]\!]$. L'ensemble $\mathcal{E}$ des matrices carrées de taille n et de rang r est-il ouvert ? fermé ? Déterminer l'intérieur et l'adhérence de $\mathcal{E}$.

685. On munit l'espace $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ du produit scalaire usuel défini par
$\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ et de la norme associée $\|\ \|_2$. Soit F un sous-espace de E tel qu'il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que $\forall f \in F$, $\|f\|_\infty \leqslant C\|f\|_2$.
a) Montrer que $F \neq E$.
b) Soit $(f_1, \ldots, f_n)$ une famille orthonormale de F.
Montrer que $\forall a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, $\left|\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i f_i\right| \leqslant C\sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i^2}$.
c) En déduire que F est de dimension finie majorée par C^2.

686. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si l'ensemble $\{PAP^{-1},\ P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})\}$ est fermé.

687. Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Montrer que l'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est connexe par arcs.

688. Soient $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$, $\mathcal{D}$ l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
a) L'ensemble $\mathcal{D}$ est-il un sous-espace vectoriel ?
b) Quel est le sous-espace vectoriel engendré par $\mathcal{D}$? par $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \setminus \mathcal{D}$?
c) L'ensemble $\mathcal{D}$ est il ouvert ? fermé ?

689. On pose $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et, pour $A \in E$, $\|A\| = \sup\limits_{1\leqslant j\leqslant n} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}|$.

a) Montrer que $\| \ \|$ est une norme d'algèbre.
b) Soit $A \in E$. Étudier la convergence de la série $\sum A^k$ si $\|A\| < 1$.
Cette condition est-elle nécessaire pour que la série soit convergente ?
c) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $U_k = \left(I_n + \dfrac{A}{k}\right)^k$. Étudier la convergence et la limite de la suite (U_k).

690. Lorsque J est un intervalle de $\mathbb{R}$, on pose $S_n(J) = \{M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})\ ,\ \ \mathrm{Sp}(M) \subset J\}$.
a) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Montrer que $S_n(I)$ est convexe.
b) Montrer que $S_n(\overline{I}) = \overline{S_n(I)}$.

691. ***a)*** Montrer que $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ est un fermé non compact de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
b) Montrer que $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.
c) Soit $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe un unique couple $(O, S) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $M = OS$.
d) En déduire que $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$ sont connexes par arcs.

692. Déterminer la limite de la suite de terme général $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{n-k}{n}\right)^n$.

693. On pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^k$ pour tout $n \geqslant 1$.
a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est divergente.
b) Donner un équivalent de u_n quand $n \to +\infty$.

694. Soit $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ une fonction C^1. On pose $u_n = \displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n} + \frac{k}{n^2}\right)$ pour $n \geqslant 1$.
Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$.

695. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{\sqrt{k}}{n}\right)$. Déterminer un équivalent de u_n.

696. Soit $\mathcal{B}$ le sous-espace de $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ formé des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ bornées. Soit T l'endomorphisme de $\mathcal{B}$ qui à $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ associe $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{Z}}$.
a) Montrer que T est linéaire. Déterminer ses valeurs propres et ses sous-espaces propres.
b) Déterminer les sous-espaces de dimension finie de $\mathcal{B}$ stables par T.

697. Étudier les suites définies par u_1, v_1 réels et
$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = u_n + v_n \arctan\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ et $v_{n+1} = v_n - u_n \arctan\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

698. ★ Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $D_n = \left\{d \in \mathbb{N}\ ;\ d|n \text{ et } \sqrt{\dfrac{n}{2}} \leqslant d \leqslant \sqrt{2n}\right\}$ et $d_n = |D_n|$.

a) La suite $(d_n)_{n\geqslant 1}$ est-elle convergente ?
b) La suite $(d_n)_{n\geqslant 1}$ est-elle bornée ?

699. Soit $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite strictement positive, croissante et non majorée.
a) Montrer que, si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle convergente de limite ℓ, alors $\dfrac{1}{b_n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(b_{k+1}-b_k)a_k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.
b) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Montrer que, si la suite $\left(\dfrac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell\in\mathbb{R}$, alors $\dfrac{a_n}{b_n}\to\ell$ quand $n\to+\infty$.
c) La réciproque de la propriété précédente est-elle vraie ?

700. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite réelle décroissante de réels strictement positifs, telle que $a_0=1$. On pose $b_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{a_{k-1}}{a_k}\right)\frac{1}{a_k}$ pour tout $n\geqslant 1$.
a) Montrer que $b_n\in[0,1]$ pour tout $n\geqslant 1$.
b) On fixe $\ell\in[0,1]$. Montrer que l'on peut choisir la suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ de telle sorte que $b_n\to\ell$.

701. Soit $a\in]0,1[$. On définit (u_n) par $u_0=a$ et, pour $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=u_n+u_n^2\ln(u_n)$.
a) Montrer que (u_n) est définie et étudier sa convergence.
b) On pose $F : x\mapsto \displaystyle\int_a^x \frac{\mathrm{d}t}{t^2\ln t}$. Montrer que $F(u_{n+1})-F(u_n)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
c) En déduire un équivalent de $F(u_n)$. Qu'en déduire sur u_n ?

702. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0\in]0,\pi/2]$ et $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=\sin(u_n)$. Étudier la convergence de (u_n). Déterminer un équivalent de u_n.

703. Pour tout $n\geqslant 2$, on pose $f_n(x)=x^n-nx+1$.
a) Montrer que l'équation $f_n(x)=0$ admet une unique solution x_n dans $[0,1]$.
b) Étudier la monotonie de la suite (x_n). Montrer sa convergence.
c) Déterminer la limite de la suite (x_n) et un équivalent simple de x_n.
d) Déterminer un développement asymptotique à deux termes de x_n.

704. Soit (u_n) une suite réelle définie par $u_0\geqslant 0$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=\sqrt{u_n}+\dfrac{1}{n+1}$.
a) Si (u_n) converge, quelle est sa limite ?
b) On suppose que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n\leqslant 1$. Montrer que (u_n) converge. Quelle est sa limite ?
c) Étudier la convergence de (u_n) dans le cas général.

705. Pour $n\geqslant 2$, on considère l'équation $\sin(x)=\dfrac{x}{n}$.
a) Montrer que cette équation admet une unique solution sur $]0,\pi[$ qu'on notera x_n.
b) Montrer que la suite $(x_n)_{n\geqslant 2}$ converge. Quelle est sa limite ?

c) Donner un développement asymptotique de x_n à la précision $o\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$.

706. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $P_n = \displaystyle\prod_{i=0}^{n}(X - i)$.
a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists! r_n \in \left]0, 1\right[, P_n'(r_n) = 0$.
b) Déterminer un équivalent simple de r_n.

707. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 \geqslant 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{n + u_n}$
a) Montrer que $u_n \to +\infty$.
b) Donner un développement asymptotique à trois termes de u_n.

708. Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, on pose $N(P) = \sup_{t\in[0,1]} |P(t)|$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note E_n l'ensemble des polynômes unitaires de $\mathbb{R}_n[X]$ et $a_n = \inf_{P\in E_n} N(P)$.
a) Montrer que $a_n > 0$; calculer a_0 et a_1.
b) Montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et de limite nulle.

709. Limite et développement asymptotique en $o(1/n)$ de $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{\sqrt{k(n-k)}}{n^{3/2}}\right)$.

710. Soit (u_n) une suite réelle vérifiant : $\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2, u_{n+m} \leqslant u_m + u_n$. Montrer que : $\dfrac{u_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \inf\left\{\dfrac{u_n}{n} \text{ pour } n \in \mathbb{N}^*\right\}$.

711. ***a)*** Montrer que tout sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ est de la forme $a\mathbb{Z}$ $(a \in \mathbb{R})$ ou dense dans $\mathbb{R}$.
Soit $\theta \in \mathbb{R}^*$ tel que $\dfrac{\pi}{\theta} \notin \mathbb{Q}$.
b) Montrer que $A = \left\{p\theta + 2\pi q,\ (p, q) \in \mathbb{Z}^2\right\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
c) Expliciter les valeurs d'adhérence de la suite $(\cos(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}$.
d) Expliciter les valeurs d'adhérence de la suite $\left(\cos(\sqrt{n}\theta)\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

712. Soit $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$. Convergence et somme de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{2^n} \tan\left(\frac{x}{2^n}\right)$.

Ind. Montrer que $\tan(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)} - 2\dfrac{\cos(2x)}{\sin(2x)}$.

713. Soit (u_n) une suite réelle telle que $n(u_{n+1} - u_n) \to 1$. Quelle est la nature de la série $\sum u_n$?

714. Déterminer la convergence et la somme de la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n + (-1)^n}$.

715. Déterminer la nature de $\displaystyle\sum \frac{\cos(\ln n)}{\ln n}$.

716. Si $n \in \mathbb{N}^*$, soit $u_n = \sum_{k=1}^{n} (\ln(k))^2$. Déterminer la nature de $\sum \frac{1}{u_n}$.

717. Nature de la série de terme général $\frac{(-1)^n}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} - (-1)^n}$?

718. Soit $\alpha > 0$ fixé. Nature de la série de terme général $\sum \frac{\lfloor \sqrt{n+1} \rfloor - \lfloor \sqrt{n} \rfloor}{n^\alpha}$?

719. Soient $\alpha > 0$ et $\beta \in]0, 1[$. Nature de la série $\sum \frac{(-1)^{\lfloor n^\beta \rfloor}}{n^\alpha}$.

720. ***a)*** Montrer que $\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$.

b) Nature de la série de terme général $u_n = \ln\left(\tan\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}\right)\right)$?

721. Soient a, b deux réels tels que $0 < a < b$.
On pose $u_0 > 0$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{n+a}{n+b} u_n$.

a) Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que la série $\sum u_n$ soit convergente.

b) Dans ce cas, calculer la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} n(u_{n+1} - u_n)$.

c) En déduire la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

722. $\star$ Soit $(u_n)_{n \geqslant 0}$ une suite décroissante de réels positifs. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{1}{1 + n^2 u_n}$. Montrer que si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ diverge.

723. On pose $u_n = \int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{(n+1)\pi}} \sin(x^2)\,\mathrm{d}x$. Quel est le signe de u_n ? Montrer que la série $\sum u_n$ est semi-convergente.

724. Étudier $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n}{k\sqrt{k^2 - n^2}}$.

725. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \int_n^{n+1} \frac{\cos(\ln(t))}{t}\,\mathrm{d}t$ et $v_n = \frac{\cos \ln(n)}{n}$.

a) Déterminer la nature de la série $\sum u_n$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $u_n - v_n = \displaystyle\int_n^{n+1} (t-n-1)\frac{\cos\ln(t)+\sin\ln(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

c) En déduire la nature de la série $\sum v_n$.

726. Soit $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{+*})$ telle que $\dfrac{f'(x)}{f(x)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$. Montrer que $\sum f(n)$ converge.

727. On dit que la série de terme général u_n enveloppe $a \in \mathbb{R}^{+*}$ lorsque, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left|a - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k\right| \leqslant |u_{n+1}|$. On dit qu'elle enveloppe strictement $a \in \mathbb{R}^{+*}$ lorsqu'il existe une suite $(\theta_n) \in]0,1[^{\mathbb{N}}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = \theta_{n+1}u_{n+1}$.

a) Soit $a > 0$. Donner un exemple de série divergente qui enveloppe a.
b) Donner un exemple de série convergente qui enveloppe un réel $a \in \mathbb{R}^{+*}$.
c) Donner un exemple de série convergente qui n'enveloppe aucun réel $a \in \mathbb{R}^{+*}$.
d) Montrer que, si une série enveloppe strictement un réel $a > 0$, alors elle est alternée.

728. ***a)*** Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$. Montrer que si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum \dfrac{u_n}{S_n}$ diverge aussi.

b) Soit $\sum y_n$ une série à termes complexes telle que, pour toute suite (x_n) qui tend vers 0, la série $\sum x_n y_n$ converge. Montrer que $\sum |y_n|$ converge.

729. Soit $(u_n) \in (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}}$. On suppose que $\sum u_n$ converge. Construire $(v_n) \in (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}}$, croissante et de limite $+\infty$, telle que $\sum u_n v_n$ converge.

730. Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :
i) pour toute série $\sum u_n$ convergente de terme général positif, la série $\sum f(u_n)$ est convergente ;
ii) l'application $x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ est bornée au voisinage de 0^+.

731. Soit $\sum u_n$ une série convergente à termes strictement positifs.

a) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k u_k = o(n)$.

b) Montrer que $\dfrac{1}{n(n+1)} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k u_k$ est le terme général d'une série convergente.

c) Montrer que la série de terme général $\dfrac{1}{n+1}\left(n!\displaystyle\prod_{k=1}^{n} u_k\right)^{1/n}$ est convergente et que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+1}\left(n!\prod_{k=1}^{n} u_k\right)^{1/n} \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} u_k.$$

732. Pour toute permutation f de $\mathbb{N}^*$, on note $E_f = \left\{\alpha \in \mathbb{R},\ \sum \frac{f(n)}{n^\alpha} < +\infty\right\}$.
a) Montrer qu'il existe $f \in S(\mathbb{N}^*)$ tel que $E_f = \varnothing$.
b) Soit $f \in S(\mathbb{N}^*)$. Montrer que si $E_f \neq \varnothing$, alors c'est un intervalle minoré par 2 et non majoré.
c) Montrer que, si $\beta > 2$, alors il existe $f \in S(\mathbb{N}^*)$ tel que $E_f =]\beta, +\infty[$.

733. Soit $f_n = x \mapsto \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$.
a) Montrer que, pour n pair, f_n ne s'annule pas et que, pour n impair, f_n s'annule en un unique point r_n.
b) Montrer que, pour n impair, $-2n-3 < r_n < 0$.

734. Soit α un réel non nul. On pose, pour $x \in [-1,1]$, $g_\alpha(x) = \cos(\alpha \arcsin x)$. À quelle condition sur α la fonction g_α est-elle polynomiale ?

735. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe C^2, telle que $f(0) = f'(0) = f'(1) = 0$ et $f(1) = 1$. Montrer qu'il existe $c \in]0,1[$ tel que $|f''(c)| \geqslant 4$.

736. Soient I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ de classe C^2. Montrer que f est convexe si et seulement si : $\forall (x,y) \in I^2,\ \exists t \in]0,1[,\ f((1-t)x+ty) \leqslant (1-t)f(x)+tf(y)$.

737. Trouver les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues en 0 telles que $f(0) = 1$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(2x) = f(x)\cos(x)$.

738. Soient $A, B \in \mathbb{R}^+$, $f : \mathbb{R} \to$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leqslant A$ et $|f''(x)| \leqslant B$.
a) Montrer que, pour tout $h \in \mathbb{R}^{+*}$, $|f'(x)| < \frac{A}{h} + \frac{Bh}{2}$.
b) Trouver la meilleure majoration de $|f'(x)|$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

739. Soit $f : x \in]-1,+\infty[\mapsto x - \ln(1+x)$.
a) Montrer que f définit une bijection f_1 de $]-1,0]$ sur $\mathbb{R}^+$ et une bijection f_2 de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}^+$.
b) Déterminer un équivalent de f en 0. En déduire un équivalent de f_1^{-1} et f_2^{-1} en 0.
c) Déterminer le développement asymptotique à l'ordre 2 de f_2^{-1} en 0.

740. Soit $E = \mathcal{C}^0([-1,1],\mathbb{C})$. Soit $g \in \mathcal{C}^0([-1,1],[-1,1])$ strictement croissante et surjective. Soit $\Phi \in \mathcal{L}(E)$ l'application qui à $f \in E$ associe $f \circ g$. Soit F un sous-espace de E de dimension finie stable par Φ. On note Φ_F l'endomorphisme de F induit par Φ sur F.
a) Montrer que Φ_F est un automorphisme de F.
b) Montrer que la seule valeur propre de Φ_F est 1.
c) Soit $\Psi = \Phi_F - \mathrm{id}_F$. Montrer que Ψ est nilpotent.

741. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dérivable. Montrer l'équivalence entre les assertions suivantes :
i) $f(0) = I_n$ et $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f'(0)f(x)$,
ii) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) = f(x)f(y)$ et $\forall x \in \mathbb{R}, \det(f(x)) \neq 0$.

742. Soient $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $D : f \in E \mapsto f'$. Montrer que D est un endomorphisme de E et déterminer ses éléments propres.

743. Soient $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ de classe $\mathcal{C}^1$, $\ell \in \mathbb{R}^{+*}$ et $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_n \neq 0$. On suppose que $f'(x)\, P\,(f(x)) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$. Déterminer un équivalent de f en $+\infty$.

744. Soient $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ continue, $\ell \in \mathbb{R}^{+*}$, $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose : $h(x) \displaystyle\int_0^x h^n \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$. Déterminer un équivalent de h en $+\infty$.

745. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et $E = \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$.
On pose $F = \big\{g \in \mathcal{C}^2([a,b],\mathbb{R})\ ;\ g(a) = g(b) = g'(a) = g'(b) = 0\big\}$.
a) On fixe $f \in E$.
Montrer qu'il existe $g \in F$ tel que $f = g''$ si et seulement si $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b tf(t)\mathrm{d}t = 0$.
b) Soit $h \in E$ tel que $\forall f \in F$, $\displaystyle\int_a^b hg'' = 0$. Montrer que h est affine.

746. Soient $E = C^0([0,1],\mathbb{R})$ et u l'application définie par : $\forall f \in E, \forall x \in [0,1], u(f)(x) = \displaystyle\int_0^1 \min(x,t) f(t)\,\mathrm{d}t$. Vérifier que u est un endomorphisme de E. Déterminer ses éléments propres.

747. Montrer qu'il n'existe pas de fraction rationnelle $F \in \mathbb{R}(X)$ telle que :
$\forall x \in \mathbb{R}, \displaystyle\int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t = F(x)\, e^{x^2}$.

748. Étudier la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{1-t}}$.

749. Calculer $I = \displaystyle\int_{-1}^1 \frac{\cos x}{e^{\frac{1}{x}} + 1}\,\mathrm{d}x$.

750. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, $f \in \mathcal{C}^0([a,b],R)$, $\epsilon > 0$. Montrer qu'il existe $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ tels que $\forall x \in [a,b]$, $P(x) \leqslant f(x) \leqslant Q(x)$ et $\displaystyle\int_a^b (Q-P) \leqslant \epsilon$. Est-ce toujours vrai si f est uniquement continue par morceaux ?

751. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue.

a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\displaystyle\int_0^1 f(t)\, t^k \mathrm{d}t = 0$. Montrer que f s'annule au moins $n+1$ fois.

b) On suppose que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^1 f(t)\, t^k \mathrm{d}t = 0$. Montrer que f est nulle.

752. Soit $f \in C^0([a,b],\mathbb{R})$ telle que : $\forall(\alpha,\beta) \in [a,b]^2$, $\displaystyle\int_\alpha^\beta f = 0$. Montrer que $f = 0$.

753. Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et $F = \{g \in \mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R}),\ g(a) = g(b) = 0\}$. Déterminer les $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ vérifiant : $\forall g \in F$, $\displaystyle\int_a^b fg = 0$.

754. ★ Soit $f \in \mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{R})$ telle que $f(0) = f(1) = 0$.
Montrer : $120\left(\displaystyle\int_0^1 f\right)^2 \leqslant \displaystyle\int_0^1 (f'')^2$.

755. Soient $E = \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ muni de $\|\ \|_\infty$ et B la boule unité fermée de E. Soit $f \in E$. Montrer que $\displaystyle\sup_{g\in B} \int_a^b fg = \int_a^b |f|$.

756. Étudier la convergence et calculer $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^6+1}$.

757. Étudier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t|\cos t|^{t^5}\, \mathrm{d}t$.

758. Nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} |\sin(x)|^x\, \mathrm{d}x$ puis de $\displaystyle\int_0^{+\infty} |\sin(x)|^{x^\alpha} \mathrm{d}x$ avec $\alpha \in]1, +\infty[$.

759. Soit $\alpha > 0$. Étudier la convergence de l'intégrale : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\exp\left(\frac{\sin^2 x}{x^\alpha}\right) - 1\right) \mathrm{d}x$.

760. Nature suivant $a \in \mathbb{R}$ de $I(a) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x - \ln(1+x)}{x^a}\, \mathrm{d}x$? Calculer $I(5/2)$.

761. ***a)*** Soit $\sum u_n$ une série convergente à termes positifs. Nature de $\sum u_n^2$?

b) Soit f une fonction continue, positive et intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Nature de $\displaystyle\int_0^\infty f^2$?

762. Soient $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\, \mathrm{d}t$ et $J_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)t}{t}\, \mathrm{d}t$.

a) Montrer que I_n et J_n sont bien définies. Montrer que (I_n) est constante.

b) Montrer que $I_n - J_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

c) Montrer la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t$ et la calculer.

763. Soit $a > 0$. Montrer que l'intégrale : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(ax) + \arctan(x/a)}{1 + x^2} \,\mathrm{d}x$ converge et calculer sa valeur.

764. Soit $f \in C^1([0,1], \mathbb{R})$ telle que $f(0) = f(1) = 0$.
a) Soient $I_1 = \displaystyle\int_0^1 (1 + \operatorname{cotan}^2(\pi t)) f(t)^2 \,\mathrm{d}t$ et $I_2 = \displaystyle\int_0^1 f'(t) f(t) \operatorname{cotan}(\pi t) \,\mathrm{d}t$. Montrer la convergence de I_1 et I_2. Trouver une relation entre I_1 et I_2.
b) Montrer que $\displaystyle\int_0^1 f'(t)^2 \,\mathrm{d}t \geqslant \pi^2 \int_0^1 f(t)^2 \,\mathrm{d}t$ et étudier le cas d'égalité.

765. Soit f continue et T-périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer l'existence et l'unicité de λ tel que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\lambda - f(t)}{t} \,\mathrm{d}t$ converge.

766. Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une fonction continue décroissante.
a) On suppose que f est intégrable sur $[0, +\infty[$. Montrer que $f(x) \underset{x \to +\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
b) Étudier la réciproque.

767. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$ telle que f' est bornée et $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f$ converge.
Montrer que $\lim\limits_{+\infty} f = \lim\limits_{-\infty} f = 0$.

768. Étudier la convergence $\displaystyle\int_0^{+\infty} t |\cos(t)|^{t^5} \,\mathrm{d}t$.

769. Étudier la convergence et la convergence absolue de $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\cos(x)}{\ln(x)} \mathrm{d}x$.

770. ***a)*** Soient f et g deux fonctions continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose f de signe constant. Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $\displaystyle\int_a^b f(t) g(t) \mathrm{d}t = g(c) \int_a^b f(t) \mathrm{d}t$.
b) Soit $f : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$ continue telle que f admet la limite $\lambda \in \mathbb{R}$ en 0 et il existe $\mu \in \mathbb{R}$ telle que la fonction $t \mapsto \dfrac{f(t) - \mu}{t}$ est d'intégrable convergente sur $[1, +\infty[$. Montrer que, pour tout $a < b$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(at) - f(bt)}{t} \mathrm{d}t$ existe et la calculer.

771. Soit f une fonction continue par morceaux et de carré intégrable de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$. Pour $x \in \mathbb{R}^{+*}$, soit $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} \displaystyle\int_0^x f$.
a) Déterminer la limite de g en 0.

b) Déterminer la limite de g en $+\infty$.

772. Donner un équivalent, quand $x \to +\infty$, de $\displaystyle\int_1^x t^t \mathrm{d}t$?

773. Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} \mathrm{d}t$.
a) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ et seulement sur cet ensemble.
b) Étudier l'intégrabilité de f sur $\mathbb{R}^{+*}$.

774. Si $a > 0$ et $b > 0$, calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} \mathrm{d}t$.

775. Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^{+*}$ une fonction de classe C^1. On suppose que f'/f tend vers une limite $a \in \mathbb{R}^{-*}$ en $+\infty$.
a) Montrer que f et f' sont intégrables sur $\mathbb{R}^+$.
b) Donner un équivalent de $\displaystyle\int_x^{+\infty} f$ lorsque x tend vers $+\infty$.

776. Trouver une valeur approchée rationnelle à 10^{-3} près de $\displaystyle\int_0^1 e^{-t} \ln(t)\, \mathrm{d}t$.

777. Quelles sont les fonctions de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ qui sont limite uniforme sur $\mathbb{R}^+$ d'une suite d'applications polynomiales réelles ?

778. Soient S un segment de $\mathbb{R}$ non réduit à un point, $n \in \mathbb{N}^*$, $m \in \mathbb{R}^{+*}$, $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$, f une fonction de classe C^n de S dans $\mathbb{R}$ telle que $\|f^{(n)}\|_{\infty,S} < m$. Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\|f - p\|_{\infty,S} < \varepsilon$ et $\|p^{(n)}\|_{\infty,S} < m$.

779. Soit f une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une suite $(p_n)_{n\geqslant 0}$ d'applications polynomiales réelles telle que $(p_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément vers f sur tout segment de $\mathbb{R}$.

780. Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$ et $S = [a, b]$.
a) On suppose que $S \cap \mathbb{Z} \neq \emptyset$. Expliciter une fonction continue f de S dans $\mathbb{R}$ qui n'est pas limite uniforme sur S d'une suite d'éléments de $\mathbb{Z}[X]$.
b) On suppose $S \subset]0, 1[$. On définit une suite $(P_n)_{n\geqslant 0}$ de polynômes par $P_0 = X$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_{n+1} = 2P_n(1 - P_n)$. Montrer que $(P_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément sur S vers la fonction constante égale à $\dfrac{1}{2}$.
c) On suppose que $S \cap \mathbb{Z} = \emptyset$. Montrer que toute fonction continue f de S dans $\mathbb{R}$ est limite uniforme sur S d'une suite d'éléments de $\mathbb{Z}[X]$.

781. Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto x^n(1 - \sqrt{x})$.
a) Déterminer le domaine de convergence D de la série de fonctions $\sum f_n$.
b) Y a-t-il convergence normale sur D ?

c) Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(2n+3)}$.

782. Soit $\alpha > 0$. Étudier les modes de convergence de la série de fonctions $\sum u_n$ définie par $u_n(x) = \dfrac{x}{n^\alpha(1+nx^2)}$.

783. Soit $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{e^{-nx}}{x+n}$. Domaine de définition, continuité de f, équivalent de f aux extrémités de son domaine de définition.

784. Soit $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{x}{n(1+nx^2)}$. Domaine de définition, continuité, étude de la dérivabilité, équivalents en 0 et $+\infty$.

785. ***a)*** Montrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum \frac{x\, e^{-nx}}{\ln(n)}$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ mais non normalement.
b) Montrer la convergence uniforme sur $\mathbb{R}^+$.

786. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}^+$, on pose $f_n(x) = \dfrac{x}{\sqrt{n}(n+x)}$.

a) Montrer la convergence simple de $\sum f_n$ sur $\mathbb{R}^+$. On note $f = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$.

b) Montrer que la série $\sum f_n$ converge normalement sur les segments de la forme $[0, M]$ avec $M > 0$. Y a-t-il convergence normale sur $\mathbb{R}^+$?
c) Étudier la continuité de f. Montrer que f est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.

d) Soient $n \geqslant 1$ et $x_0 \geqslant n$. Montrer : $f(x_0) \geqslant \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\sqrt{k}}$. En déduire : $f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

e) Montrer que $f(x) \underset{x \to +\infty}{=} o(x)$.

787. Soit $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$.
On pose $f_0 = f$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [a, b]$, $f_n(x) = \displaystyle\int_a^x f_{n-1}(t)\mathrm{d}t$.
Étudier la convergence simple de la série $\sum f_n$ et calculer sa somme.

788. Soit $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\sin(nx))^2}{n^2}$.
a) Montrer que la fonction f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
b) La fonction f est-elle dérivable en 0 ?

789. Soient $a > 0$ et $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{a}{n^2x^2}\right)$.

a) Déterminer l'ensemble de définition de f.

b) Déterminer un équivalent de f en 0, et en $+\infty$.

790. ***a)*** Justifier la convergence pour $x \in [0,1[$ de : $f(x) = \prod_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1+x^n}{1+x^{n+1}}\right)^{x^n}$.

b) Montrer que, pour tout $x \in]0,1[$, on a : $\ln f(x) = \frac{x-1}{x} \sum_{n=1}^{+\infty} x^n \ln(1+x^n) + \ln 2$.

c) En déduire : $\forall x \in [0,1[\,, \ln f(x) = \ln 2 + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{m} \frac{x^m}{1+x+\cdots+x^m}$.

d) Montrer que f possède une limite finie en 1^- et l'expliciter.

791. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $u_n(x) = e^{-x\sqrt{n}}$.

a) Déterminer les domaines de définition des fonctions $f = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ et $g = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u_n$.

b) Trouver une équation fonctionnelle reliant f et g.

c) Montrer que f est analytique. Qu'en est-il de g ?

792. Rayon de convergence et somme de $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+2}}{n(n+1)(2n+1)}$.

793. Rayon de convergence et somme de $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{4n^2-5n+1}$.

794. Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum z^{n+(-1)^n}$.

795. Soit u qui à $P \in \mathbb{C}[X]$ associe $u(P) : z \mapsto e^{-z} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P(n)}{n!} z^n$. Montrer que u est bien définie, et que c'est un automorphisme de $\mathbb{C}[X]$. Déterminer ses éléments propres.

796. Soient $q \in]-1,1[$ et $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \sin(q^n x)$.

a) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^\infty$.

b) Montrer que f est développable en série entière.

797. Soient α et β deux réels strictement positifs.

a) Montrer que la série $\sum \frac{(-1)^n}{\alpha n + \beta}$ est convergente.

b) On note S la somme de la série ci-dessus et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\alpha k + \beta}$.
Exprimer S et r_n sous forme intégrale.
c) Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum r_n x^n$. Étudier son comportement aux bornes de l'intervalle de convergence.

798. Montrer qu'au voisinage de 0, la fonction $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \ln(1 + xe^{-t})\,\mathrm{d}t$ est développable en série entière et en donner les coefficients.

799. Expliciter le développement en série entière de $\ln(x^2 - x\sqrt{2} + 1)$ au voisinage de 0.

800. Soient $\tau \in \mathbb{R}$ et $f : x \mapsto \arctan\left(\tau \frac{x-1}{x+1}\right)$ · Montrer que f est développable en série entière en 0 et préciser le domaine exact de validité.

801. Rayon de convergence, ensemble de définition et somme de $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{ch}(n)}{n} x^{2n}$?

802. Déterminer le développement en série entière en 0 de $f : x \mapsto \sin\left(\frac{1}{3}\arcsin(x)\right)$.

803. On pose : $\forall n \geqslant 2, u_n = \sum_{\substack{(i,j)\in(\mathbb{N}^*)^2 \\ i+j=n}} \frac{1}{(ij)^2}$ et $S : x \mapsto \sum_{n=2}^{+\infty} u_n x^n$.
a) Déterminer un équivalent simple de u_n.
b) Déterminer le rayon de convergence R de S et simplifier $S(x)$ sur $]-R, R[$.
c) Étudier la bonne définition et la continuité de S en R et en $-R$.

804. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $p \in \mathbb{N}^*$.
a) Déterminer le rayon de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} P(n)x^n$ et montrer que la somme de cette série s'écrit sous la forme $\frac{Q(x)}{R(x)}$ avec $Q, R \in \mathbb{R}[X]$.
b) Soit $M = (P(i+j))_{1\leqslant i,j\leqslant p+1}$. Montrer que $\det(M) = 0$.
c) Montrer que $\det(P(i+j))_{1\leqslant i,j\leqslant p} \neq 0$.

805. Soit $f : x \mapsto (\arcsin(x))^2$.
a) Montrer que f est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2, sur un intervalle que l'on précisera.
b) Montrer que f est développable en série entière au voisinage de 0. Exprimer les coefficients de ce développement en série entière et donner son rayon de convergence.

806. On définit la suite (a_n) par : $a_0 = a_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_{n+1} = a_n + \frac{2}{n+1} a_{n-1}$.

a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 1 \leqslant a_n \leqslant n^2$ et en déduire le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n x^n$.

On pose $f : x \in \left]-R, R\right[\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

b) Montrer que f est solution de $(1-x)y' - (1+2x)y = 0$.
c) Expliciter f à l'aide des fonctions usuelles.

807. On pose $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n+in^2x}$.
a) Montrer que f est bien définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$.
b) Est-elle développable en série entière ?

808. ***a)*** Rappeler la formule de Stirling.
b) Calculer le rayon de convergence de la série entière $\sum \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) x^n$.
c) Calculer la somme de cette série entière en -1 après s'être assuré de son existence.
d) Calculer $\int_0^1 \frac{(-1)^{\lfloor 1/x \rfloor}}{x} \mathrm{d}x$.

809. ***a)*** Déterminer le rayon de convergence de $f : z \mapsto \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} z^k$.
b) Soit $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| < 1$. Calculer $\exp(f(z))$. *Ind.* Considérer $t \in [0,1] \mapsto \exp(f(tz))$.
c) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer l'existence de $\alpha > 0$ tel que :
$$\forall z \in \mathbb{C},\ |z| \leqslant \alpha \Rightarrow \det(I_n + zA) = \exp\left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} \operatorname{tr}(A^k)\, z^k\right).$$

810. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. ***a)*** Déterminer le rayon de convergence de la série $f(z) = \sum_{p \in \mathbb{N}} \operatorname{tr}(A^p) z^p$
b) Calculer $f(z)$ en fonction du polynôme caractéristique de A.

811. Soit $(a_n)_{n \geqslant 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On suppose que la série $\sum n|a_n|$ converge.
a) Montrer que le rayon de $\sum a_n z^n$ est supérieur ou égal à 1.
b) On suppose $|a_1| \geqslant \sum_{n=2}^{+\infty} n|a_n|$ avec $a_1 \neq 0$. Montrer que $f : z \in \mathbb{D} \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est injective.

812. ***a)*** Développer en série entière $\varphi : z \mapsto \frac{z}{(1-z)^2}$. Montrer que φ est injective sur $D_o(0,1)$.

On pose $f : z \mapsto z + \sum_{n=2}^{+\infty} a_n z^n$ avec (a_n) une suite réelle. On suppose que f est définie et injective sur $D_o(0,1)$.

b) Montrer que $f(z) \in \mathbb{R} \iff z \in \mathbb{R}$.
c) En déduire que $\operatorname{Im} z \geqslant 0 \iff \operatorname{Im} f(z) \geqslant 0$.
c) Soit $R \in]0,1[$. Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi} \operatorname{Im} f(Re^{it}) \sin(nt)\,\mathrm{d}t$.
d) Montrer que : $\forall n \geqslant 2, |a_n| \leqslant n$.

813. Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \tan(t)^n\,\mathrm{d}t$.
a) Trouver une relation de récurrence sur (I_n).
b) Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_{2n} = (-1)^n \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$. Donner une expression similaire pour I_{2n+1}.
c) Donner un équivalent de I_n.

814. Soit, pour $n \geqslant 2$, $I_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t+\cdots+t^n}$. Déterminer de trois façons différentes la nature de $\sum I_n$.

815. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \exp(-x^n)\,\mathrm{d}x$. Justifier l'existence de (u_n). Étudier la convergence de la suite (u_n) et de la série $\sum u_n$.

816. Développement asymptotique à deux termes de $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-nx} \ln(n+x)\mathrm{d}x$?

817. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}^+$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^n \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-\alpha x}\,\mathrm{d}x$. Déterminer un équivalent simple de u_n dans les cas $\alpha = 0$, $\alpha > 1$, $\alpha = 1$.

818. ***a)*** Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos\left(u^2\right)\mathrm{d}u$ converge.
b) Soit $(a,b) \in \left(\mathbb{R}^{+*}\right)^2$. Trouver un équivalent de $I_n = \displaystyle\int_0^1 \cos\left(n\left(au^2+bu^3\right)\right)\mathrm{d}u$.
Ind. Poser $t = \sqrt{na}u$.

819. Soit $\alpha > 1$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^\alpha)^n}$.
a) Justifier la convergence de $I_n(\alpha)$.
b) Établir une relation entre $I_{n+1}(\alpha)$ et $I_n(\alpha)$. En déduire une expression de $I_n(\alpha)$ en fonction de $I_1(\alpha)$ et de α.
c) Déterminer la limite de la suite $(I_n(\alpha))_{n\in\mathbb{N}}$.
d) Montrer l'existence d'un réel $K(\alpha)$ tel que $I_n(\alpha) \sim \dfrac{K(\alpha)}{n^{1/\alpha}}$ quand $n \to +\infty$.

820. On pose, pour tout $x \in]0,1[$, $f(x) = \dfrac{x^2 \ln x}{x-1}$.

a) Montrer que f est prolongeable en une fonction de classe C^1 sur $[0,1]$, qu'on appellera toujours f par la suite.

b) Donner un équivalent de $\displaystyle\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x$.

c) Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n \int_0^1 x^n f(x^n)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

821. Soit $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, continue par morceaux, intégrable, continue en 0. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 x\, g(u)\, \mathrm{e}^{-xu}\,\mathrm{d}u \xrightarrow[x\to+\infty]{} g(0)$. On commencera par le cas où g est bornée.

822. Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{itx}-1}{t} e^{-t}\mathrm{d}t$.

a) Montrer que, pour tout $u \in \mathbb{R}$, $|e^{iu}-1| \leqslant |u|$.

b) En déduire que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ puis simplifier l'expression de f.

823. On admet que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$.

a) Montrer que $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(t^2)\mathrm{d}t$ converge.

On pose $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-(t^2+i)x^2}}{t^2+i}\mathrm{d}t$.

a) Montrer que F est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$.

b) En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-ix^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+i}$.

c) En déduire la valeur de I.

824. On pose, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $h(t) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi(x^2+2itx)}\,\mathrm{d}x$. Montrer que l'intégrale $h(t)$ est bien définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ puis la calculer explicitement.

825. On pose $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{t+x}\,\mathrm{d}t$.

a) Déterminer le domaine de définition de f.

b) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et expliciter f'.

c) On pose $g : x \mapsto f(x) + f(1/x)$. Simplifier $g(x)$ pour $x > 0$.

826. Soit $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$.

a) Montrer que F est définie sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^2$.

b) Exprimer F à l'aide de fonctions usuelles.

827. On pose $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2-\frac{x^2}{t^2}}\,\mathrm{d}t$.
a) Montrer que F est définie sur $\mathbb{R}$.
b) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.
c) Trouver une équation différentielle d'ordre 1 vérifiée par F.
d) En déduire F.

828. Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{tx-t^2}\,\mathrm{d}t$.
a) Montrer que f est définie et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. Quelle équation différentielle vérifie f ?
b) Trouver les solutions du problème de Cauchy $-2y'' + xy' + y = 0$ avec les conditions initiales $y(0) = \sqrt{\pi}$ et $y'(0) = 0$.

829. ***a)*** Déterminer le domaine de définition de $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} e^{-xt}\,\mathrm{d}t$.
b) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^+$.
c) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
d) Donner une expression de f' puis de f.
e) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.

830. On pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} |\sin(t)|e^{-xt}\mathrm{d}t$. Déterminer le domaine de définition de la fonction f et montrer qu'elle y est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Expliciter la valeur de $f(x)$.

831. Soient $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $g : x \mapsto \displaystyle\frac{1}{x}\int_0^x \cos(x-y)f(y)\,\mathrm{d}y$. Montrer que g est bien définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ et trouver sa limite en 0. On suppose que f tend vers ℓ en $+\infty$. Étudier la limite de g en $+\infty$.

832. Soient $C > 0$, $d > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que $\displaystyle\int_0^d e^{-tx^2}(C+x^2)^\alpha \mathrm{d}x \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{C^\alpha}{\sqrt{t}}$.

833. Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{\pi} \ln(x^2 - 2x\cos t + 1)\,\mathrm{d}t$.
a) Déterminer le domaine de définition de f, étudier la continuité et les symétries.
b) Expliciter $f(x)$.

834. On pose $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1 - xt + xt^2}$.
a) Déterminer le domaine de définition de f.
b) Déterminer le développement de f en série entière sur un intervalle I centré en 0 que l'on précisera.

835. On pose, pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(1 + xe^{-t})\,\mathrm{d}t$. Montrer que f est développable en série entière au voisinage de 0 et expliciter son développement.

836. Soit $f \in C^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$. On considère la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t)\,\mathrm{d}t$.
a) On suppose f bornée. Montrer que F est définie et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
b) On suppose que f admet une limite finie non nulle ℓ en $+\infty$. Donner un équivalent de F en 0^+.
c) On suppose f développable en série entière sur $\mathbb{R}^+$: $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, et que la série $\sum n! a_n$ converge. Étudier le comportement de $F(1/x)$ au voisinage de 0 et de $+\infty$.
d) Donner des exemples de fonctions f telles que le domaine de définition de F soit $]0, +\infty[$, $]1, +\infty[$ ou $\emptyset$.

837. On note $\mathcal{L}$ l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{C}$ continues et intégrables, et $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{C}$ continues telles que, pour tout $s > 0$, la fonction $u \mapsto \dfrac{f(u)}{u+s}$ est intégrable. Si $f \in \mathcal{E}$, on pose $\widehat{f}(s) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(u)}{u+s}\,\mathrm{d}u$ pour tout $s > 0$.
a) Quelles inclusions existent entre $\mathcal{L}$ et $\mathcal{E}$?
b) Dans cette question, on suppose que $f(u) = u^{\alpha-1}$, où $\alpha \in]0, 1[$. Montrer que $\widehat{f_\alpha}$ est proportionnelle à f_α.
c) Soit $f \in \mathcal{E}$. Montrer que $\widehat{f}$ est continue, et déterminer $\lim\limits_{s \to +\infty} \widehat{f}(s)$.

838. Montrer que $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln(t)}{1-t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1-t)}{t}\mathrm{d}t$ et en déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n n^2}$.

839. ***a)*** Soit $(a_n)_{n \geqslant 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ sommable. Montrer $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{t^n}{n!}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.
b) Montrer le même résultat en ne supposant que la convergence de la série $\sum a_n$.

840. Soient $\alpha \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et $f : t \mapsto \dfrac{1}{1 - \sin\alpha\cos t}$.
a) Expliciter une suite (a_n) telle que : $\forall t \in \mathbb{R}$, $f(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos(nt)$.
b) En déduire, pour $n \in \mathbb{N}$, la valeur de : $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\cos(nt)}{1 - \sin\alpha\cos t}\,\mathrm{d}t$.

841. Soit $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante de réels strictement positifs.
On pose : $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \exp(-\lambda_n x)$.
a) Déterminer le domaine de définition de f.

On suppose dans la suite que (λ_n) tend vers $+\infty$.

b) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f$ converge et la calculer.

c) Traiter le cas particulier où $\lambda_n = n+1$.

842. Soient a et b deux fonctions continues de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ et S l'ensemble des solutions de $y' = ay + b$. Montrer l'équivalence entre :
i) tous les éléments de S sont bornés, ii) a et b sont intégrables.

843. Déterminer les fonctions y de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivables et telles que $y'(x) = y(\pi - x)$.

844. Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = 0$ et que $\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = e^{-1/x^2}$.

a) Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

b) La fonction f est-elle solution d'une équation différentielle linéaire homogène ?

845. Résoudre l'équation différentielle $y' + |y| = 1$.

846. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\omega \in \mathbb{C}$ tel que $\omega^n = 1$. Trouver les fonctions $y \in C^n(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ solutions de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} y^{(k)}\omega^{n-k} = 0$.

847. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \exp(-x^{-2})$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. Montrer que f n'est solution d'aucune équation différentielle linéaire homogène à coefficients constants (d'ordre quelconque).

848. Résoudre le système différentiel $\left\{\begin{array}{r} x' = 2x + 3y + 3z + te^t \\ y' = 3x + 2y + 3z + e^t \\ z' = 3x + 3y + 2z + t^2e^t \end{array}\right.$

849. Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note (S) le système différentiel : $\forall p \in [\![1, n]\!], x_p^{(m)} = \displaystyle\sum_{q=1}^{n} a_{p,q}x_q(t)$.
Montrer que A est nilpotente si et seulement si toutes les solutions de (S) sont polynomiales.

850. Résoudre les systèmes : $\begin{cases} x' = x + 2y - z + e^t \\ y' = 2x + 4y - 2z + te^t \\ z' = -x + 2y + z + t^2e^t. \end{cases}$, $\begin{cases} x' = x + 8y + te^t \\ y' = 2x + y + e^{-t}. \end{cases}$

851. Déterminer les solutions développables en série entière au voisinage de 0 de l'équation : $2xy'' - y' + 2y = 0$. Les exprimer à l'aide des fonctions usuelles.

852. ***a)*** Résoudre l'équation : $(1+t^2)y'' + 4ty' + 2y = 0$ sur $\mathbb{R}$ en cherchant des solutions développables en série entière.

b) Résoudre : $(1+t^2)y'' + 4ty' + 2y = \dfrac{1}{1+t^2}$.

853. On considère l'équation différentielle : $y'' - y = |\cos x|$. Existe-t-il des solutions positives ? Bornées ? Positives et bornées ?

854. Soient a, b des fonctions continues et 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit (E) l'équation différentielle $y' + a(x)y + b(x) = 0$. Soit $A : x \mapsto \int_0^x a(t)\,\mathrm{d}t$ et $I = A(2\pi)$.
a) Trouver une condition sur I pour que A soit 2π-périodique.
b) Montrer que si y est solution de (E), alors $x \mapsto y(x+2\pi)$ est aussi solution de (E).
c) Supposons $I \neq 0$. Montrer que (E) admet une unique solution 2π-périodique.
d) Que dire si $I = 0$?
e) Donner un exemple pour illustrer chacune de ces situations.

855. Soit $f : x \mapsto \int_0^{2\pi} e^{x\sin(t)}\mathrm{d}t$.
a) Montrer que f est solution de $(*) : xy'' + y' = xy$.
b) Quelles sont les solutions développables en série entière sur $\mathbb{R}$ de $(*)$?

856. ***a)*** Soient $A \in \mathbb{R}^+$, $f, g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ continues. On suppose que $\forall x \geqslant 0,\ f(x) \leqslant A + \int_0^x f(t)\,g(t)\mathrm{d}t$. Montrer que $\forall x \geqslant 0,\ f(x) \leqslant A\exp\left(\int_0^x g(t)\mathrm{d}t\right)$.
Soit $(*)$ l'équation différentielle $x''(t) + a(t)x(t) = b(t)$ avec a et b continues sur $\mathbb{R}^+$, b et $t \mapsto t\,a(t)$ intégrables sur $\mathbb{R}^+$. Soit x solution de $(*)$.
b) Montrer que
$\forall t \geqslant 1,\ x(t) = x(1) + (t-1)x'(1) - \int_1^t (t-u)\,a(u)\,x(u)\mathrm{d}u + \int_1^t (t-u)\,b(u)\mathrm{d}u.$
c) On pose, pour $t \geqslant 1$, $y(t) = \frac{|x(t)|}{t}$. Montrer l'existence de K tel que :
$\forall t \geqslant 1,\ y(t) \leqslant K\exp\left(\int_1^t u\,|a(u)|\mathrm{d}u\right) \leqslant K\exp\left(\int_1^{+\infty} u\,|a(u)|\mathrm{d}u\right)$.

857. Soient $T \in \mathbb{R}^{+*}$, A une application continue et T-périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer qu'il existe une application X de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}^n$ et $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tels que $\forall t \in \mathbb{R},\ X(t+T) = \lambda X(t)$.

858. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = -I_n$; Expliciter les solutions de $X'(t) = AX(t)$.

859. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. À quelle condition est-il vrai que toutes les solutions du système différentiel $X'(t) = AX(t)$ sont bornées sur $\mathbb{R}$?

860. Soient $D = [0,1]^2$ et $f : D \to \mathbb{R}$ telle que $f(x,y) = x(1-y)$ si $x \leqslant y$ et $f(x,y) = y(1-x)$ sinon. Montrer que f admet un minimum et un maximum sur D et les déterminer.

861. Étudier la différentiabilité de la fonction f définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ par $f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$.

862. On note T le triangle plein défini par les points $(0,0)$, $(1,0)$ et $(0,1)$. Déterminer le minimum sur T de la fonction $f:(x,y)\mapsto x^2+y^2+\dfrac{1}{2}(1-x-y)$.

863. Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ telle que $f(0,0)=1$ et $f(x,y)=(x^2+y^2)^x$ si $(x,y)\neq(0,0)$.
a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
b) Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.
c) La fonction f admet-elle des dérivées partielles en $(0,0)$?
d) Étudier les variations de $g:x\mapsto f(x,0)$.
e) Déterminer les extrema de f.

864. Soit $f:(\mathbb{R}^+)^2\to\mathbb{R}$ définie par $f(0,0)=0$ et $f(x,y)=\dfrac{xy}{(x+1)(y+1)(x+y)}$ sinon.
a) Montrer que f est continue.
b) Étudier les extrema de f.

865. Soient E un espace vectoriel normé de dimension finie, f une forme linéaire sur E. Montrer que l'application $g:x\in E\mapsto f(x)\,e^{-\|x\|^2}$ admet un minimum et un maximum, puis déterminer ce maximum et ce minimum.

866. Déterminer les fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $(\mathbb{R}^{+*})^2$ vérifiant $x^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}-y^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$. On pourra faire le changement de variables $u=xy$, $v=\dfrac{x}{y}$.

867. Soit $K\in\mathbb{R}$. Déterminer toutes les fonctions $f:]0,+\infty[\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ solutions de l'équation $x\dfrac{\partial}{\partial y}f(x,y)-y\dfrac{\partial}{\partial x}f(x,y)=K\,f(x,y)$.

868. Soient $\alpha\in\mathbb{R}$ et $f\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$. On dit que f est homogène de degré α si :
$\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, $\forall t\in\mathbb{R}^{+*}$, $f(tx,ty,tz)=t^\alpha f(x,y,z)$. Montrer que f est homogène de degré α si et seulement si $x\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\dfrac{\partial f}{\partial y}+z\dfrac{\partial f}{\partial z}=\alpha f$.

869. Résoudre $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}-3\,\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+2\,\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$.
Ind. Utiliser le changement de variable $(u,v)=(x+y,\,2x+y)$.

870. ***a)*** Soit $f\in C^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$.
Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}^n$, $f(x)=f(0)+\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i\int_0^1\frac{\partial f}{\partial x_i}(tx)\,\mathrm{d}t$.
On pose $E=C^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ et
$D=\Big\{\phi\in\mathcal{L}(E,\mathbb{R})\ ;\ \forall(f,g)\in E^2,\phi(fg)=f(0)\phi(g)+g(0)\phi(f)\Big\}$.
b) Montrer que la famille $(\phi_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est libre, avec : $\phi_i:f\mapsto\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(0)$.
c) Montrer que D est de dimension finie.

871. Soient $f \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, $k \in [0, 1[$ tels que : $\forall a \in \mathbb{R}^2, \left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(a)\right| + \left|\dfrac{\partial f}{\partial y}(a)\right| \leqslant k$. Soit (u_n) définie par $(u_0, u_1) \in \mathbb{R}^2$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = f(u_n, u_{n+1})$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $a_n = \max(|u_{n+1} - u_n|, |u_{n+2} - u_{n+1}|)$.
a) Montrer : $\forall (a, b) \in (\mathbb{R}^2)^2, \exists c \in \mathbb{R}^2, f(b) - f(a) = (b - a|\nabla f(c))$.
b) Montrer que : $\forall (x, y, x', y') \in \mathbb{R}^4, |f(x, y) - f(x', y')| \leqslant k \max(|x - x'|, |y - y'|)$.
c) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+2} \leqslant k a_n$, puis qu'il existe deux constantes q et C telles que : $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leqslant C q^n$.
d) Montrer que (u_n) est une suite convergente et donner une propriété vérifiée par sa limite.

872. Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}$, K une partie compacte non vide de Ω, f une fonction de classe C^2 de Ω dans $\mathbb{R}$.
a) On suppose que $\Delta f > 0$. Montrer que f n'admet pas d'extremum local.
b) On suppose que $\Delta f \geqslant 0$. Montrer que $\max_K f = \max_{\text{Fr}(K)} f$.

873. Soient $R \in \mathbb{R}^{+*}$, $D_R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x^2 + y^2 < R^2\}$, $(a_n)_{n \geqslant 0}$ une suite complexe telle que $\sum a_n z^n$ ait pour rayon de convergence R. Pour $(x, y) \in D_R$, on pose $f(x, y) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x + iy)^n$. Montrer que f est de classe C^2 et harmonique sur D_R.

874. Soient $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathbb{R}^n$. On pose : $f : X \in \mathbb{R}^n \mapsto X^T A X - 2B^T X$.
a) Calculer $\nabla f(X)$.
b) Montrer que f admet un minimum global et le déterminer.
c) Soit (X_k) une suite de vecteurs non nuls vérifiant
$\forall k \in \mathbb{N}, X_{k+1} = X_k - \dfrac{\|\nabla f(X_k)\|}{X_k^T A X_k} \nabla f(X_k)$. On suppose que la suite (X_k) est convergente. Déterminer sa limite.

875. Pour $x = (x_0, \ldots, x_n)$ et $y = (y_0, \ldots, y_n)$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$, on pose

$$f(x, y) = \left(\sum_{\substack{0 \leqslant i, j \leqslant n \\ i + j = k}} x_i y_j \right)_{k \in [\![0, 2n]\!]} \in \mathbb{R}^{2n+1}.$$

a) Soient $x, y \in (\mathbb{R}^{n+1}$ non nuls. Montrer que $f(x, y)$ est non nul.
b) Soient u et v les applications de $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ dans $\mathbb{R}^{2n+1}$ définies par $u : x \mapsto f(x, x)$ et $v : x \mapsto \dfrac{f(x, x)}{\|f(x, x)\|}$ où $\| \ \|$ est la norme euclidienne canonique sur $\mathbb{R}^{2n+1}$. Calculer les différentielles de u et v.
c) Soit $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ non nul. Calculer $\text{rg}(\text{d}v(x))$.

876. * Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ différentiable telle que : i) pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\text{d}f(x)$ est injective ; ii) $\|f(x)\| \underset{\|x\| \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
Soient $a \in \mathbb{R}^n$ et $g : x \in \mathbb{R}^n \mapsto \|f(x) - a\|^2$.
a) Calculer $\text{d}g$.

b) Montrer que g admet un minimum.
c) En déduire que f est surjective.

877. Soient U un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1.
a) Montrer que f est convexe si et seulement si $f(y)-f(x) \geqslant df_x(y-x)$ pour tous $x, y \in U$. Que donne cette caractérisation dans le cas où $n = 1$?
b) Soient α et β des réels fixés. On note E l'ensemble des fonctions $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telles que $f(0) = \alpha$ et $f(1) = \beta$. Soit $\Phi : f \in E \mapsto \int_0^1 \sqrt{1 + f'(x)^2}\,\mathrm{d}x$. Montrer que Φ atteint sa borne inférieure en un unique élément de E, que l'on précisera.

878. Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni de la norme euclidienne canonique.
On pose $f : M \in E \mapsto \|M\|^2 = \mathrm{tr}(M^T M)$ et $g : M \in E \mapsto \det M - 1$. On note h la restriction de f à $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$.
a) Justifier que f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer leur gradient en une matrice $M \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$.
b) Montrer que f admet un minimum sur $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$. Soit M_0 une matrice où il est atteint.
c) Soit $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ orthogonale au gradient de g en M_0. Montrer qu'il existe un chemin γ de classe $\mathcal{C}^1$ défini sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ tel que $\gamma(0) = M_0$ et $\gamma'(0) = H$.
d) Montrer que $(\nabla f_{M_0})^\perp = (\nabla g_{M_0})^\perp$.
e) Calculer le minimum de h sur $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$.

879. Si $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer $T_{I_n}\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$, puis, si $M \in \mathrm{SO}_n(_R)$,$T_M\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$.

Probabilités

880. On tire au hasard un élément A de $P(\llbracket 1, n \rrbracket)$. Calculer la probabilité que $\mathrm{card}\,A$ soit un entier pair.

881. Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$ tel que $m \leqslant \dfrac{n}{2}$. On se donne deux urnes contenant chacune des boules numérotées de 1 à n. On tire m boules dans chaque urne et l'on note X le nombre de doublons. Calculer la loi de X puis sa variance.

882. Un couple met au monde quatre enfants. Chaque enfant a la probabilité $p \in]0,1[$ d'être une fille, et les naissances sont indépendantes. On considère les événements A : « le dernier est une fille », B : « le couple a autant de filles que de garçons », C : « les garçons naissent toujours après une fille ».
a) Les événements A et B (resp. A et C) sont-ils indépendants ?
b) Les événements A, B, C sont-ils mutuellement indépendants ?

883. Soit $p \in]0,1[$. Dans un sac contenant n jetons numérotés de 1 à n, on tire S jetons où S est une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètre n et p. Quelle est la probabilité d'obtenir des jetons de numéros consécutifs ?

884. On lance une pièce jusqu'à obtenir deux piles de plus que de faces ou deux faces de plus que de piles. On note $p \in\ ]0,1[$ la probabilité que la pièce donne pile. On note X la variable aléatoire associée au nombre de lancers. Déterminer la loi de X et montrer que X est presque sûrement finie. La variable aléatoire X est-elle d'espérance finie ?

885. Une urne contient $n \in \mathbb{N}^*$ boules noires et $b \in \mathbb{N}^*$ boules blanches. On tire successivement et sans remise les boules. On note X la variable aléatoire qui donne le rang de la dernière boule blanche tirée. Calculer la loi, l'espérance et la variance de X.

886. On considère une urne qui contient une proportion $p \in \,]0,1[$ de boules blanches. On effectue un tirage avec remise des boules. Soit X_n la variable donnant le nombre de tirages successifs nécessaires pour obtenir n boules blanches. Donner la loi de X_1 ainsi que sa fonction génératrice $\mathcal{G}_{X_1}$. En déduire $\mathcal{G}_{X_n}$. Loi et espérance de X_n ?

887. On considère une urne remplie avec des boules numérotées de 1 à $2n$. On procède à une suite de tirages sans remise.
a) Calculer la probabilité que les boules impaires soient tirées exactement dans l'ordre $1, 3, \ldots, 2n-1$.
b) Soit X la variable correspondant au nombre de tirages nécessaires pour obtenir toutes les boules impaires. Déterminer la loi et l'espérance de X.

888. Soit $n \geqslant 2$. On place n boules numérotées de 1 à n dans une urne et l'on réalise des tirages successifs avec remise. On note X le rang du tirage donnant pour la première fois un numéro supérieur ou égal aux précédents.
a) Déterminer la loi de X.
b) Calculer l'espérance et la variance de X.

889. Une urne contient $n+1$ boules numérotées de 0 à n. On y effectue des tirages avec remise. On pose $X_1 = 1$. Pour $i \geqslant 2$, X_i est la variable de Bernoulli égale à 1 si le numéro de la boule tirée au i-ème tirage n'avait jamais été obtenu avant. On pose, pour $i \in \mathbb{N}^*$, $Y_i = X_1 + \cdots + X_i$.
a) Déterminer la loi des X_i.
b) Calculer l'espérance et la variance de Y_i. Donner un équivalent de $\mathbf{E}(Y_n)$.
c) Pour $(i,j) \in (\mathbb{N}^*)^2$, calculer $\mathbf{P}(X_i = 1, X_j = 1)$.
d) Étudier l'indépendance des X_i.

890. Soit $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de joueurs. Le joueur J_0 affronte le joueur J_1 ; le gagnant affronte J_2, puis le gagnant de ce nouveau match affronte J_3 et ainsi de suite. Lors d'un match, le joueur entrant a une probabilité $p \in]0,1[$ de remporter le match. Le jeu termine lorsqu'un même joueur remporte trois victoires. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note A_n l'événement « le n-ième match est joué ». Déterminer la limite de $\mathbf{P}(A_n)$ quand $n \to +\infty$.

891. On suppose que lorsqu'un enfant naît, il a une chance sur deux d'être un garçon. Dans une famille donnée, le nombre d'enfants est la variable aléatoire Z et le nombre de filles est X.
a) Montrer que : $\forall t \in [0,1], G_X(t) = G_Z\left(\dfrac{1+t}{2}\right)$.
b) Expliciter la loi de X si Z suit une loi de Poisson de paramètre λ.

892. Une puce se trouve sur l'origine de $\mathbb{Z}^2$. À chaque étape, elle saute aléatoirement dans l'une des quatre directions. On note X_n l'abscisse de la puce à l'étape n. Calculer $\mathbf{E}(X_n)$ et $\mathbf{E}(X_n^2)$.

893. On munit $\mathcal{S}_n$ de la probabilité uniforme. Calculer la probabilité π_n que $\sigma \in \mathcal{S}_n$ ait un cycle de longueur strictement supérieure à $\frac{n}{2}$ dans sa décomposition en produit de cycles à supports disjoints. Déterminer un équivalent de π_n.

894. Soient X_1, X_2 deux variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi géométrique de paramètre $p \in \,]0,1[$. On pose $Y = |X_1 - X_2|$.
a) Calculer $\mathbf{P}(Y = 0)$.
b) Déterminer la loi de Y.
c) Montrer que Y est d'espérance finie et calculer $\mathbf{E}(Y)$.
d) Montrer que Y possède un moment d'ordre 2 et calculer $\mathbf{V}(Y)$.

895. ***a)*** Déterminer la loi de la somme de n variables géométriques de paramètre $p \in]0,1[$, indépendantes et identiquement distribuées.
b) Soit $p \in]0,1[$. On lance des dés tels que la probabilité de tomber sur 6 en jetant un dé est p. Soit X la variable aléatoire égale au rang du n-ième 6. Déterminer la loi et l'espérance de X.

896. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, σ une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $\mathcal{S}_n$. Pour $m \in [\![1,n]\!]$, on note $X_m = \min\big\{k \in [\![1,n]\!],\ \sigma(k) \geqslant m\big\}$ et $Y_m = \max\big\{k \in [\![1,n]\!],\ \sigma(k) \geqslant m\big\}$. Calculer la loi de X_m et Y_m, et leur espérance.

897. Soient $\lambda > 0$ et X une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre λ. Soient $b \in \mathbb{N}^*$ et Y le reste de la division euclidienne de X par b. Déterminer la loi de Y.

898. Soit $p \in \,]0,1[$. Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. vérifiant :
$\mathbf{P}(X_k = 1) = p$ et $\mathbf{P}(X_k = -1) = 1 - p$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$. Montrer que $p = \frac{1}{2}$ si et seulement si : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \max_{k\in\mathbb{Z}} \mathbf{P}(S_{2n} = k) = \mathbf{P}(S_{2n} = 0)$.

899. Soient A, B, C des variables aléatoires indépendantes telles que A suive la loi de Rademacher, et B et C la loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$.
a) Calculer la probabilité que le trinôme $AX^2 + BX + C^2$ admette deux racines réelles distinctes.
b) Calculer la probabilité que le trinôme $AX^2 + BX + C^2$ admette une unique racine réelle.
c) Calculer la probabilité que le trinôme $AX^2 + BX + C^2$ n'admette aucune racine réelle.
d) Cette dernière probabilité peut-être égale à $\frac{1}{2}$? Dans ce cas, donner une valeur approchée de p à 10^{-1} près.

900. On considère une variable aléatoire X suivant la loi de poisson de paramètre λ et on pose $Y = X^2 + 1$.

a) Calculer l'espérance de Y.
b) Calculer la probabilité de l'événement $(2X < Y)$.
c) Comparer les probabilités des événements $(X \in 2\mathbb{N})$ et $(X \in 2\mathbb{N}+1)$.

901. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[a,b]$, d'espérance $\mathbf{E}(X) = m.$
a) Montrer que $\mathbf{V}(X) \leqslant (m-a)(b-m)$.
b) Montrer que cette inégalité est optimale.

902. Soient $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $b \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On pose $M = \begin{pmatrix} A & b \\ b^T & c \end{pmatrix}$ et on suppose que les racines du polynôme caractéristique de M ne sont pas toutes simples.
a) Montrer que M admet un vecteur propre de la forme $V = (v_1, ..., v_n, 0)^T$.
b) Montrer que $(v_1, ..., v_n)^T$ est vecteur propre de A et orthogonal à b.
c) Soient $X_1, ..., X_5$ variables de Bernoulli indépendantes de paramètre $p \in]0,1[$.
On pose $N = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & X_1 \\ 0 & 1 & X_5 & X_2 \\ 0 & X_5 & -1 & X_3 \\ X_1 & X_2 & X_3 & X_4 \end{pmatrix}$. Montrer que la probabilité que le polynôme caractéristique de la matrice N n'ait que des racines simples est supérieure ou égale à $3p^3 - 2p^4$.

903. Soit $p \geqslant 3$ premier. Soit $K = \{x^2,\ x \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\}$.
a) Dénombrer le cardinal de K.
b) Soient A, B deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Soit N variable aléatoire comptant le nombre de solutions de (E) : $X^2 + AX + B = 0$. Déterminer l'espérance et la variance de N.

904. Caractériser les couples (X,a) avec X variable aléatoire discrète complexe et $a \in \mathbb{C}$ tels que $X \sim aX$.

905. Soit $\alpha > 1$. On munit $\mathbb{N}^*$ de la loi de probabilité $\mathbf{P}_\alpha$ définie par $\mathbf{P}_\alpha(\{n\}) = \dfrac{1}{\zeta(\alpha)n^\alpha}$ pour $n \geqslant 1$.
a) Calculer $\mathbf{P}_\alpha(m\mathbb{N}^*)$ pour $m \geqslant 1$.
b) On note $(p_k)_{k \geqslant 1}$ la suite strictement croissante des nombres premiers. Montrer que les $p_k\mathbb{N}^*$ sont mutuellement indépendants.
c) En déduire la formule d'Euler $\zeta(\alpha) = \displaystyle\prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{p_k^\alpha}\right)^{-1}$.

906. Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes strictement positives, de même loi et d'espérance finie. Montrer que $\mathbf{E}(X/Y) \geqslant 1$. ***Ind.*** Commencer par le cas où X et Y sont indépendantes.

907. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. suivant la loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$.
On pose : $Y_n = \min(X_1, \ldots, X_n), \alpha_n = \mathbf{E}(Y_n)$ et $Z_n = \max(X_1, \ldots, X_n), \beta_n = \mathbf{E}(Z_n)$.
a) Étudier la monotonie des suites (α_n) et (β_n).

b) Exprimer α_n en fonction de n.
c) Déterminer la limite de (β_n) puis un équivalent simple.

908. Soient $p, q \in]0,1[$. On considère deux variables aléatoires X et Y, indépendantes, suivant les lois géométriques de paramètres respectifs p et q. Soit $M = \begin{pmatrix} X & 1 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$. Quelle est la probabilité que M soit diagonalisable ?

909. Soient $p \in]0,1[$, X une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p. On pose $Y = \left\lfloor \dfrac{X+1}{2} \right\rfloor$.
a) Montrer que la variable Y suit une loi géométrique.
b) Montrer que les variables Y et $2Y - X$ sont indépendantes.

910. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. suivant la loi uniforme sur $[\![1,d]\!]$. Pour $j \in \{1, \ldots, n\}$, on pose $Y_j = |\{i \in [\![1,n]\!],\ X_i = j\}|$.
a) Déterminer la loi de Y_j.
b) Soient $i, j \in [\![1,n]\!]$ avec $i \neq j$ et $k, \ell \in [\![1,n]\!]$. Calculer $\mathbf{P}(Y_i = k, Y_j = \ell)$.

911. Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$ telle que $\mathbf{E}\left(\dfrac{1}{X}\right) < +\infty$. Pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, on pose : $F_X(t) = \mathbf{E}(e^{-tX})$.
a) Montrer que F_X est bien définie (à valeurs réelles) et continue.
b) Montrer la convergence et calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} F_X(t)\,\mathrm{d}t$.
c) Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. Calculer $\mathbf{E}\left(\dfrac{1}{X+Y}\right)$.
d) Généraliser à m variables i.i.d. suivant la loi géométrique de paramètre p.

912. Soit $(X_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. suivant la loi uniforme sur $\{-1, 2\}$. On pose $S_0 = 0$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.
Pour $n \in \mathbb{Z}$, soit $A_n = (\exists k \geqslant 0,\ S_k = -n)$ et $p_n = \mathbf{P}(A_n)$.
a) Exprimer $\mathbf{P}(\exists k > 0,\ S_k = 0)$ en fonction de p_{-1} et de p_2.
b) Trouver une relation entre p_{n+2}, p_n et p_{n-1}.
c) En déduire la valeur de p_n.

913. Soient X une variable aléatoire à valeurs dans $\{-1, 1\}$, $(X_k)_{k \geqslant 1}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires suivant la loi de X. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que, pour toute partie finie A de $\mathbb{Z}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(S_n \in A) < +\infty$.

914. Soit (X_n) une suite i.i.d. de variables de Bernoulli de paramètre $1/2$.

a) Donner la loi de $Z_n = \sum_{k=0}^{n} 2^{n-k} X_k$.
b) Déterminer $\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(Z_n \geqslant 3^n)$ et $\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(Z_n \geqslant 2^n)$.

915. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.
a) Montrer que $\mathbf{P}(X \geqslant x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
b) On suppose que $\mathbf{E}(X) < +\infty$. Montrer que $\mathbf{P}(X \geqslant x) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x}\right)$.
c) Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires.
On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $R_n = |\{X_1, \ldots, X_n\}|$.
i) Donner un équivalent de $\mathbf{E}(R_n)$ lorsque les X_i suivent la loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$.
ii) Dans le cas général, montrer que $\mathbf{E}(R_n) = o(n)$.

916. Soit $(X_i)_{i\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. On suppose que chaque variable aléatoire $X_i + 1$ suit la loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.
a) Déterminer la loi de S_n.
b) Déterminer $M_n = \max\{\mathbf{P}(S_n = k),\ k \in \mathbb{N}\}$ puis un équivalent simple de M_n quand n tend vers $+\infty$.

917. Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires suivant la loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. Montrer l'existence de $\alpha > 0$ que l'on déterminera tel que :
$\forall \epsilon > 0, \mathbf{P}\left(\left|\frac{1}{\ln(n)} \max_{1\leqslant k\leqslant n} X_k - \alpha\right| \geqslant \epsilon\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$

918. Soit $g : t \mapsto \dfrac{e^t}{(1+e)-t}$
a) Montrer que g est la fonction génératrice d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$.
b) Soit $(X_{i,j})_{1\leqslant i<j\leqslant n}$ une famille i.i.d. de variables aléatoires de même loi que X. Déterminer la probabilité que $M = \begin{pmatrix} 0 & X_{1,2} & \cdots & X_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & X_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ ait un nombre fini de de sous-espaces stables.

919. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires i.i.d. suivant la loi de Bernoulli de paramètre p. On pose $U = (X_1 \ \cdots \ X_n)$ et $M = U^T U$.
a) Déterminer la loi des variables aléatoires $\mathrm{tr}(M)$ et $\mathrm{rg}(M)$.
b) Calculer la probabilité que M soit une matrice de projection.