Autres Écoles – MP

Algèbre

1382. [CCINP] ***a)*** Soient $a, b, c \in \mathbb{Z}^*$ avec $a \wedge b = 1$. Montrer que, si a divise c et b divise c alors ab divise c.
b) Trouver une solution de $(*)$: $x \equiv 6\,[17]$ et $x \equiv 4\,[15]$.
c) Trouver toutes les solutions de $(*)$.

1383. [St Cyr] Soit A l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s'écrivant $t \mapsto a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kt)$, avec $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, \ldots, a_n$ constantes réelles.
a) Montrer que A est un sous-anneau de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
b) Calculer en fonction des a_k l'intégrale $\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t$.
c) En déduire que A est intègre.

1384. [IMT] Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des couples $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$ tels que $(X-1)^n Q(X) + X^n P(X) = 1$.
a) Montrer l'existence et l'unicité d'un couple $(P_0, Q_0) \in \mathbb{R}_{n-1}[X]^2$ dans $\mathcal{S}$.
b) Déterminer $\mathcal{S}$.

1385. [St Cyr] Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme unitaire de degré 3 dont les racines z_1, z_2, z_3 sont les affixes de points M_1, M_2, M_3 d'un plan affine euclidien. Montrer que P' a une racine double si et seulement si le triangle $M_1M_2M_3$ est équilatéral.

1386. [CCINP] Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme unitaire de degré $n \in \mathbb{N}^*$, à coefficients dans $\{-1, 0, 1\}$. On suppose que $P(0) \neq 0$ et que P est scindé sur $\mathbb{R}$, et on note $x_1, \ldots, x_n$ ses racines. On note également $\sigma_1 = \sum_{i=1}^{n} x_i$, $\sigma_2 = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x_i x_j$ et $\sigma_n = \prod_{i=1}^{n} x_i$.
a) Montrer que $\ln\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) \geqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln(x_i^2)$, puis que $\left(\prod_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/n} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$.
b) Quelles sont les valeurs possibles de σ_1, σ_2, σ_n ?
c) Montrer que $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leqslant 3$.
d) Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ scindés sur $\mathbb{R}$ et à coefficients dans $\{-1, 0, 1\}$.

1387. [St Cyr] Soit $\phi : \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ vérifiant : ***i)*** $\forall A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}), \phi(AB) = \phi(A)\phi(B)$; ***ii)*** $\forall \lambda \in \mathbb{C}, \phi\left(\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \lambda$. Montrer que $\phi = \det$.

1388. [CCINP] On note S l'espace vectoriel des suites complexes. On considère l'endomorphisme (de décalage) de S défini par $L\left((u_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) = (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.
a) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Trouver le noyau de $L - \lambda\,\mathrm{id}$ et celui de $(L - \lambda\,\mathrm{id})^2$.
b) On note F le sous-espace vectoriel de S des suites (u_n) vérifiant :
$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+4} = \dfrac{1}{2}u_{n+3} + 3u_{n+2} - \dfrac{7}{2}u_{n+1} + u_n$.
c) Montrer que $F = \mathrm{Ker}\,(2L - \mathrm{id}) \oplus \mathrm{Ker}\,(L + 2\,\mathrm{id}) \oplus \mathrm{Ker}\,(L - \mathrm{id})^2$.
d) Déterminer la dimension de F et une base de F.

1389. [CCINP] Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.
a) Quel est le rang de A ? Donner une base de l'image de A.
b) Donner une équation de l'image de A. Le vecteur B appartient-il à l'image de A ?

1390. [CCINP] Soient $\varphi \in \mathbb{R}$ et $M_n = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $m_{i,j} = 2\cos(\varphi)$ si $i = j$, $m_{i,j} = 1$ si $|i - j| = 1$, les autres coefficients étant nuls.
a) On suppose que $\varphi \notin \pi\mathbb{Z}$. Trouver une relation de récurrence vérifiée par $D_n = \det(M_n)$ et exprimer D_n.
b) Déterminer D_n lorsque $\varphi \in \pi\mathbb{Z}$.

1391. [IMT] Calculer $\Delta_n(x) = \begin{pmatrix} 1+x^2 & -x & & & 0 \\ -x & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -x \\ 0 & & & -x & 1+x^2 \end{pmatrix}$.

1392. [IMT] La matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est-elle inversible ? Déterminer A^n pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

1393. [St Cyr] Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.
a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $\alpha_n, \beta_n \in \mathbb{R}$ tels que $A^n = \alpha_n A + \beta_n A^2$.
b) Programmer une fonction Python `puissance`(n) renvoyant A^n.
c) Déterminer α_n et β_n grâce à cette fonction.
d) Tracer $n \mapsto \dfrac{\alpha_n}{\beta_n}$. Conjecture ?
e) Prouver cette conjecture.

1394. [CCINP] Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.
a) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{C}$ considéré comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel si et seulement s'il existe deux nombres complexes a, b tels que $\forall z \in \mathbb{C}, f(z) = az + b\bar{z}$.
b) Montrer l'unicité du couple (a, b).
c) Montrer que f est un projecteur si et seulement si $a^2 + |b|^2 = a$ et $b(a + \bar{a}) = b$.
d) Montrer que f est un projecteur différent de l'endomorphisme nul et de l'identité si et seulement si $\mathrm{Re}(a) = \dfrac{1}{2}$ et $|a| = |b|$.

1395. [IMT] Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que A est inversible, que B est nilpotente et que A et B commutent.
a) Montrer que $A - B$ et $A + B$ sont inversibles.
b) Si A et B ne commutent pas, montrer qu'alors $A + B$ n'est pas forcément inversible.

1396. [IMT] Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ telle que $f \circ f = 0$. Montrer que $\mathrm{rg}(f) \leqslant 2$.

1397. [IMT] Soient P le plan de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x + y + z = 0$ et D la droite d'équation $x = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{3}$. Écrire la matrice dans la base canonique du projecteur sur P parallèlement à D.

1398. [IMT] Soient E un espace vectoriel et u un endomorphisme nilpotent de E. Soit $x \in E$ et $k \in \mathbb{N}$ tels que $u^k(x) \neq 0$. Montrer que $(x, u(x), \dots, u^k(x))$ est libre.

1399. [IMT] ***a)*** Soient $n \in \mathbb{N}^*$, u et v deux endomorphismes nilpotents non nuls de $\mathbb{R}^n$ tels que $u \circ v = v \circ u$. Montrer que $\mathrm{rg}(u \circ v) < \mathrm{rg}(v)$.
b) Montrer que la composée de n endomorphismes nilpotents de $\mathbb{R}^n$ qui commutent deux à deux est nulle.

1400. [Navale] Soient E un espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$ et $p_1, \dots, p_n$ des endomorphismes non nuls vérifiant $\forall i, j \in [\![1, n]\!], p_i \circ p_j = \delta_{i,j} p_i$, où δ est le symbole de Kronecker.
a) Montrer que les sous-espaces vectoriels $\mathrm{Im}(p_i)$, avec $1 \leqslant i \leqslant n$, sont en somme directe.
b) Montrer que les p_i sont de rang 1.

1401. [IMT] Soient E un espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E. Montrer que $\mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(f^3) \geqslant 2\mathrm{rg}(f^2)$.
Ind. Utiliser le théorème du rang pour les restrictions de f à $\mathrm{Im}(f)$ puis $\mathrm{Im}(f^2)$.

1402. [IMT] Soit $A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$. On suppose que AB est semblable à la matrice diagonale $\mathrm{diag}(0, 9, 9)$. Calculer le rang de BA et déterminer BA.

1403. Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Calculer $\det\left(P(X + i + j)\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

1404. [IMT] Soit E un espace vectoriel de dimension n. Soit $(f, g) \in (\mathcal{L}(E))^2$.
a) Montrer la formule du rang : $n = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \mathrm{rg}(f)$.
b) Montrer que $\mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g) - n \leqslant \mathrm{rg}(f \circ g) \leqslant \min(\mathrm{rg}(f), \mathrm{rg}(g))$.

1405. [CCINP] Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ non nul tel que $u^3 + u = 0$.

a) Montrer que $E = \mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Im}(u)$ et que $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Ker}(u^2 + \mathrm{id})$.
b) Montrer que u n'est pas injective, puis que $\mathrm{rg}(u) = 2$.
c) Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1406. [IMT] Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 = -\mathrm{id}$.
a) Montrer que $\dim(E)$ est pair.
b) Montrer que, pour tout $x \in E$, $\mathrm{Vect}(x, f(x))$ est stable par f.
c) Montrer que, si $\dim(E) = 2n$, il existe des vecteurs $e_1, \cdots, e_n$ de E tels que la famille $(e_1, f(e_1), \cdots, e_n, f(e_n))$ soit une base de E. Donner la matrice de f dans cette base.

1407. [IMT] On considère $E = \{1, 2, \ldots, n\}$, $m = 2^n - 2$, $F_1, \ldots, F_m$ les parties de E non triviales (c'est-à-dire dans $\mathcal{F} = \mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset, E\}$).
a) Montrer qu'il existe une unique bijection g de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{F}$ telle que $\forall F \in \mathcal{F},\ g(F) \cap F = \emptyset$.
b) Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ telle que $a_{i,j} = 1$ si $F_i \cap F_j \neq \emptyset$, $a_{i,j} = 0$ sinon. Calculer $\det(A)$.

1408. [IMT] Soient $a, b, c \in \mathbb{R}^{+*}$ et $M = \begin{pmatrix} 1 & \frac{b}{a} & \frac{c}{a} \\ \frac{a}{b} & 1 & \frac{c}{b} \\ \frac{a}{c} & \frac{b}{c} & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer les valeurs propres et les espaces propres de M.

1409. [IMT] Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
a) La matrice A est-elle diagonalisable ?
b) On veut montrer qu'il n'existe pas de matrice B telle que $B^2 = A$. On suppose l'existence d'une telle matrice. Trouver un polynôme annulateur simple de B. Conclure.
c) Montrer que A est semblable à C.

1410. [CCINP] Soient $a, b \in \mathbb{R}$ distincts, $n \in \mathbb{N}$ et $u : P \in \mathbb{C}_n[X] \mapsto (X - a)(X - b)P' - nXP$.
a) Montrer que $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}_n[X])$.
b) Pour $P \in \mathbb{C}_n[X]$, donner la décomposition en éléments simples de P'/P.
c) Montrer que u est diagonalisable et donner ses vecteurs propres.

1411. [IMT] Soit $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2$.
a) Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\forall k \geqslant p$, $A + \dfrac{1}{k} I_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.
b) Montrer que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

1412. [IMT] Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, $u \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable, $e = (e_1, ..., e_n)$ une base de vecteur propre.
a) Montrer que $\chi_u(u) = 0$ sans utiliser le théorème de Cayley-Hamilton.

b) On écrit $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$. Calculer $\det_e(x, u(x), ..., u^{n-1}(x))$.

1413. [IMT] ***a)*** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. La matrice A admet-elle toujours une valeur propre ?
b) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A^2 + A + I_n = 0$. Que dire du spectre réel de A ? du spectre complexe ?

1414. [CCINP] ***a)*** Localiser les racines réelles de $X^3 - X - 1$.
b) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer $\chi_A(0)$, $\lim\limits_{+\infty} \chi_A$ et $\lim\limits_{-\infty} \chi_A$.
c) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A^3 = A + I_n$. Montrer que $\det(A) > 0$.

1415. [IMT] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $4A^3 + 4A^2 + A = 0$.
a) Étudier la convergence et la limite éventuelle de la suite $\left(A^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$.
b) Qu'en déduire sur la matrice A ?

1416. [IMT] Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B = A^3 + A + I_n$.
a) On suppose que A est diagonalisable, à valeurs propres réelles. Montrer que A est un polynôme en B.
b) Est-ce encore vrai si les valeurs propres de A sont complexes ?

1417. [IMT] ***a)*** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 + A + I_n = 0$. Montrer que n est pair.
b) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 + A^2 + A = 0$. Montrer que $\mathrm{rg}(A)$ est pair.

1418. [CCINP] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $A^2 + A^T = I_n$.
a) Justifier que, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{Sp}\, M = \mathrm{Sp}\, M^T$.
b) Montrer que A est inversible si et seulement si $1 \notin \mathrm{Sp}\, A$.
c) Montrer que le polynôme $X^4 - 2X^2 + X$ est annulateur de A. La matrice A est-elle diagonalisable ?

1419. [IMT] Soit $\Phi : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \mathrm{tr}(M)A - M^T$.
a) L'application Φ est-elle un automorphisme ?
b) L'application Φ est elle diagonalisable ? Donner les valeurs propres et les sous-espaces propres associés.

1420. [CCINP] Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^{*2}$, $(M, A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^3$ telles que $A + B = I_n$, $M = \lambda A + \mu B$, $M^2 = \lambda^2 A + \mu^2 B$.
a) Déterminer $M^2 - (\lambda + \mu)M + 2\lambda\mu I_n$.
b) Montrer que M est inversible et calculer M^{-1}.
c) Montrer que A et B sont des matrices de projecteurs.
d) La matrice M est-elle diagonalisable ? Déterminer son spectre.

1421. [IMT] Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$.
On pose $\Phi_u : v \in \mathcal{L}(E) \mapsto u \circ v \in \mathcal{L}(E)$.
a) Quels sont les éléments propres de ϕ_u ?
b) Montrer que ϕ_u est diagonalisable si et seulement si u est diagonalisable.

1422. [IMT] Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ pour laquelle qu'il existe $n \geqslant 1$ telle que $M^n = I_2$. Montrer que $M^{12} = I_2$.

1423. [CCINP] Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix}$.

a) Montrer que, pour $P \in \mathbb{R}[X]$, $P(B) = \begin{pmatrix} P(A) & AP'(A) \\ 0 & P(A) \end{pmatrix}$.

b) Donner une condition nécessaire et suffisante sur A pour que B soit diagonalisable.

1424. [St Cyr] Soit $n \in \mathbb{N}$, avec $n \geqslant 3$. On note U l'application qui à un polygone P constitué de n points $M_1, \ldots, M_n$ du plan complexe associe le polygone :
$\dfrac{M_1 + M_2}{2}, \ldots, \dfrac{M_{n-1} + M_n}{2}, \dfrac{M_n + M_1}{2}$.

a) Écrire une fonction Python calculant `U`(P).

b) L'application U est visiblement linéaire. Donner sa matrice dans la base canonique. C'est une matrice stochastique que l'on notera M.

c) Montrer que les valeurs propres de M sont de module au plus égal à 1.

d) Montrer que 1 est la seule valeur propre de M de module 1.

1425. [IMT] Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et (E) l'équation $AM = MB$.

a) On suppose que (E) admet une solution $M \neq 0$.
Montrer que $\forall P \in \mathbb{C}[X], P(A)M = MP(B)$. Montrer que A et B admettent une valeur propre commune.

b) Établir la réciproque.

1426. [IMT] ***a)*** Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E. On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ ses valeurs propres distinctes et $P = \prod_{k=1}^{p} (X - \lambda_i)$.
Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur P pour que u soit diagonalisable et la démontrer.

b) Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^7)$. Est-il possible d'avoir simultanément $Q = (X-1)(X^2+1)$ annulateur de f et $\mathrm{Tr}(f) = 0$?

c) Soit $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^7)$ tel que $Q(g) = 0$. Calculer $\det(g)$.

1427. [CCINP] Soit $\phi : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto M + \mathrm{tr}(M) I_n$.

a) Montrer que ϕ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b) Cet endomorphisme est-il diagonalisable ?

c) Trouver une base des sous-espaces propres de ϕ.

d) Déterminer $\mathrm{tr}\, \phi$ et $\det \phi$.

e) L'endomorphisme ϕ est-il inversible ? Si oui, déterminer ϕ^{-1}.

1428. [Navale] Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\phi : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto AM$.

a) Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur A pour que ϕ soit diagonalisable.

b) Décrire les éléments propres de ϕ.

1429. [CCINP] Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et N_n l'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :
i) A est diagonalisable ; ii) $\forall P \in \mathbb{C}[X], P(A) \in N_n \Leftrightarrow P(A) = 0$.

1430. [CCINP] Soient $a \in \mathbb{R}^*$, $U = (a^{j-i})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ canoniquement associé à U.
a) Déterminer le rang de u et son déterminant.
b) Déterminer la dimension du noyau de u ainsi qu'une équation de ce noyau.
c) Déterminer la dimension de l'image de u et une base de cette image.
d) Étudier la diagonalisabilité de u.
e) Pour $k \in \mathbb{N}^*$, exprimer U^k en fonction de U.
f) Déterminer le polynôme minimal de u et retrouver le résultat de la question précédente.

1431. [IMT] On pose $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ vérifiant $\exp(M) = A$.
a) Montrer que M admet une unique valeur propre de la forme $ik\pi$. Préciser k.
b) Montrer que M est triangulaire supérieure.
b) Déterminer les $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telles que $\exp(M) = A$.

1432. [IMT] Soit $A \in \mathbb{R}_n[X] \setminus \{0\}$.
a) Montrer que l'application $f : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ qui à tout polynôme P associe le reste de la division euclidienne de P par A est un projecteur. Donner son noyau et son image.
b) On munit $\mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire : $\langle P, Q \rangle = \displaystyle\int_0^1 PQ$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f soit un projecteur orthogonal.

1433. [St Cyr] On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ et $(f_1, \ldots, f_n)$ une famille de vecteurs telle que :
$\forall k \in [\![1, n]\!], \|f_k - e_k\| < \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.
a) Montrer que $(f_1, \ldots, f_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$.
b) Montrer que le résultat précédent serait en défaut en remplaçant l'inégalité stricte par une inégalité large.

1434. [IMT] Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} \mathrm{d}t$.
a) Montrer l'existence et calculer I_n.
Pour $(P, Q) \in (\mathbb{R}[X])^2$, on pose $\langle P, Q \rangle = \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t) Q(t) e^{-t} \mathrm{d}t$.
b) Montrer que $\langle \, , \, \rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x > 0$, on pose $L_n(x) = \dfrac{e^x}{n!} \cdot \dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^n e^{-x})$ (polynôme de Laguerre).
c) Montrer que L_n est un polynôme de coefficient dominant $\dfrac{(-1)^n}{n!}$.
d) Montrer que $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de polynômes orthogonaux pour le produit scalaire défini en ***b)*** .

1435. [IMT] On pose $E = \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$. Pour $(f,g) \in E^2$, on pose $\langle f, g \rangle = \displaystyle\int_0^1 (fg + f'g')$.
a) Montrer que $\langle\ ,\ \rangle$ est un produit scalaire.
Soient $V = \{f \in E,\ f(0) = f(1) = 0\}$ et $W = \{f \in E,\ f'' = f\}$.
b) Montrer que V et W sont des sous-espaces vectoriels puis que $\{t \mapsto e^t, t \mapsto e^{-t}\}$ est une base de W.
c) Montrer que V et W sont orthogonaux.
d) Calculer $p_W(f)$ le projeté orthogonal de $f \in E$ sur W.
e) Montrer que V et W sont supplémentaires.

1436. [CCINP] Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien, $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\forall x \in E$, $\|v(x)\| \leqslant 1$.
a) Montrer que $\mathrm{Ker}(v - \mathrm{id}) \oplus \mathrm{Im}(v - \mathrm{id}) = E$.
Ind. Considérer l'application $t \mapsto \|x + ty\|^2 - \|v(x + ty)\|^2$.
b) Soit, pour $x \in E$ et $p \in \mathbb{N}$, $w_p(x) = \dfrac{1}{p+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{p} v^k(x)$.
Montrer que, pour tout $x \in E$, la suite $(w_p(x))$ converge. Déterminer sa limite.

1437. [CCINP] On note $E = \mathbb{R}[X]$.
a) Montrer que l'on définit un produit scalaire sur E en posant $\langle P, Q \rangle = \displaystyle\int_0^1 P(t)\,Q(t)\,\mathrm{d}t$.
a) Trouver a et b dans $\mathbb{R}$ tels que $\displaystyle\int_0^1 (t^2 - at - b)^2\,\mathrm{d}t$ soit minimal :
– en construisant une base orthonormée de $\mathbb{R}_1[X]$;
– en recherchant a et b tels que $X^2 - aX - b$ soit orthogonal à $\mathbb{R}_1[X]$.

1438. [IMT] Calculer $\displaystyle\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^{+\infty} e^{-t}(t^2 - at - b)^2\,\mathrm{d}t$.

1439. [CCINP] On définit trois fonctions sur le segment $[0,1]$: $f_0 : t \mapsto 1$, $f_1 : t \mapsto t$ et $f_2 : t \mapsto \mathrm{e}^t$, et on note $E = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(f_0, f_1, f_2)$.
a) Montrer que $(f,g) \mapsto \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ est un produit scalaire sur E.
b) Trouver une base orthonormée de $F = \mathrm{Vect}(f_0, f_1)$.
c) Trouver a et b tels que la distance de f_2 à $t \mapsto at + b$ soit minimale.

1440. [St Cyr] Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. On munit E du produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$ défini par $\langle f, g \rangle = \displaystyle\int_0^1 f(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t$. Soit $K : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ une fonction continue et symétrique c'est-à-dire telle que $\forall (x,t) \in [0,1]^2, K(x,t) = K(t,x)$. Soit u l'application qui à $f \in E$ associe la fonction $u(f) : x \in [0,1] \mapsto \displaystyle\int_0^1 K(x,t)\,f(t)\,\mathrm{d}t$.
On admet le théorème de Fubini :
$\forall \phi \in \mathcal{C}^0([0,1]^2,\mathbb{R})$, $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^1 \phi(x,t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\int_0^1 \phi(x,t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}t$.
a) Montrer que u est un endomorphisme de E.

b) Montrer que u est autoadjoint : $\forall f, g \in E$, $\langle f, u(g)\rangle = \langle u(f), g\rangle$.
c) Montrer que u est continu.

1441. [St Cyr] Pour $t \in \mathbb{R}$, on note $M_t = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}(t) & \mathrm{sh}(t) \\ \mathrm{sh}(t) & \mathrm{ch}(t) \end{pmatrix}$.
a) Montrer que les matrices M_t sont diagonalisables et trouver une base de vecteurs propres indépendante de t.
b) Montrer que l'application $\theta : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ définie par $\theta(t) = M_t$ est injective. Montrer que $\theta(t+t') = \theta(t)\theta(t')$.
c) Soient $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $E = \mathbb{R}^2$, $\mathfrak{b}$ sa base canonique, $f \in \mathcal{L}(E)$ et $q : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2 - y^2$. Montrer que, si $q \circ f = q$, alors $M = \mathrm{Mat}_{\mathfrak{b}}(f)$ vérifie $(*)$: $M^T JM = J$. Montrer que les matrice M_t, avec $t \in \mathbb{R}$, vérifient $(*)$ et trouver toutes les matrices vérifiant $(*)$.

1442. [Navale] ***a)*** Rappeler l'algorithme de Gram-Schmidt.
b) On note $T_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ triangulaires supérieures, à coefficients diagonaux strictement positifs. Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe un unique couple $(O, T) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times T_n^+(\mathbb{R})$ tel que $A = OT$.

1443. [CCINP] Soient E un espace euclidien, a et b deux vecteurs linéairement indépendants. Soit $u : x \mapsto \langle a, x\rangle a + \langle b, x\rangle b$.
a) Montrer que u est un endomorphisme symétrique.
b) Déterminer son noyau.
c) Déterminer les éléments propres de u.

1444. [CCINP] Soit $A = \dfrac{1}{7}\begin{pmatrix} -1 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 5 & -2 & -2 \\ 4 & -2 & 5 & -2 \\ 4 & -2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.
a) Calculer $A^T A$.
b) Sans utiliser χ_A, trouver les valeurs propres de A et les multiplicités associées.
c) Calculer π_A et χ_A.
d) Trouver $P \in \mathcal{O}_4(\mathbb{R})$ telle que $P^T AP$ soit diagonale.
e) Trouver le commutant de A.

1445. [IMT] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $AA^T + 2A^T + I_n = 0$. Déterminer A.

1446. [IMT] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = -A$.
a) Montrer que $\mathrm{rg}(A)$ est pair.
b) Que dire si $A = A^T$?

1447. [IMT] Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Trouver une base orthonormale de diagonalisation de A.

1448. [CCINP] Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, où $a_{1,i} = a_{i,1} = 1$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$, les autres coefficients étant nuls. On note f l'endomorphisme canoniquement associé à A.
a) Quel est le rang de A ?
b) Trouver les valeurs propres et sous-espaces propres de A.
c) Donner la matrice de la projection orthogonale de $\mathbb{R}^n$ sur l'image de f pour la structure euclidienne canonique.

1449. [CCINP] Soient u et v deux endomorphismes autoadjoints d'un espace euclidien $(E, \langle\ ,\ \rangle)$.
a) Montrer que u et v commutent si et seulement si $u \circ v$ est autoadjoint.
b) Montrer que u et v commutent si et seulement s'il existe une base orthonormée de vecteurs propres communs à u et v.
c) Soit s la symétrie orthogonale par rapport au plan $x+y+z=0$. Caractériser les symétries orthogonales de $\mathbb{R}^3$ qui commutent avec s.

1450. [IMT] ***a)*** Soit $q \in \mathbb{N}$. On pose $I_q = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^q e^{-t}\,\mathrm{d}t$. Montrer que I_q est bien définie et que $I_q = q!$.
b) Pour $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, on pose $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t$. Montrer que $\langle\ ,\ \rangle$ est un produit scalaire.
c) Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on définit $\phi(P) = XP'' + (1-X)P'$. Montrer que ϕ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
d) Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que $\langle \phi(P), Q\rangle = -\displaystyle\int_0^{+\infty} tP'(t)Q'(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t$. Montrer que ϕ est un endomorphisme symétrique.

1451. [CCINP] Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien E.
a) On suppose que $\forall x \in E, \langle u(x), x\rangle = 0$. L'endomorphisme u est-il nécessairement nul ?
b) Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes : i) $u \circ u^* = u^* \circ u$,
ii) $\forall x, y \in E,\ \langle u(x), u(y)\rangle = \langle u^*(x), u^*(y)\rangle$, iii) $\forall x \in E,\ \|u(x)\| = \|u^*(x)\|$.

1452. [IMT] Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, telle que $A^{2022} = A^{2024}$. Montrer l'égalité $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} {a_{i,j}}^2 = \mathrm{rg}(A)$.

1453. [St Cyr] Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien et $x_1, \ldots, x_n$ des éléments de E. On note $G = (\langle x_i, x_j\rangle)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.
a) Montrer que $G \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
b) Montrer l'existence d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $G = A^T A$.
c) En déduire que le rang de G et égal à celui de la famille $(x_1, \ldots, x_n)$.

1454. [IMT] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 + A^T = I_n$.
a) Trouver $P \in \mathbb{R}_4[X]$ tel que $P(A) = 0$. Que dire sur A et $\mathrm{Sp}(A)$?
b) On suppose, pour cette question seulement, que $0 \notin \mathrm{Sp}(A)$. Montrer que $A - I_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et que $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

c) On prend $n = 3$. Montrer que $\mathrm{tr}(A) \neq 0$.

1455. [CCINP] Soient E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^* \circ u = u \circ u^*$.
a) Soient $\lambda \in \mathrm{sp}\, u$ et x un vecteur propre associé. Montrer que $\|u^*(x)\|^2 = \lambda^2 \|x\|^2$. Montrer que u et u^* ont les mêmes espaces propres.
b) Montrer que u et u^* ont les mêmes espaces propres.
c) Montrer que les espaces propres de u sont orthogonaux.
d) Montrer que, si u est diagonalisable, alors u est symérique.

1456. [CCINP] Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \geqslant 2$, f un endomorphisme autoadjoint de E, a sa plus petite valeur propre et b sa plus grande valeur propre.
a) Montrer que, pour tout $x \in E$, $a\|x\|^2 \leqslant \langle x, f(x)\rangle \leqslant b\|x\|^2$.
b) Soient $k \in \mathbb{R}$ et $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ où $a_{i,j} = k$ si $i = j$, $a_{i,j} = 1$ si $|i-j| = 1$, les autres coefficients étant nuls.
Montrer que la plus grande valeur propre b de A vérifie $k + 2 \geqslant b$.

Analyse

1457. [St Cyr] Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$ non restreint à la fonction nulle. On note I l'ensemble des rapports $\dfrac{\|f\|_\infty}{\|f\|_2}$ quand f décrit F privé de la fonction nulle, où usuellement $\|f\|_\infty = \sup\limits_{[0,1]} |f|$ et $\|f\|_2 = \sqrt{\displaystyle\int_0^1 f^2}$.
a) Que dire de I si F est de dimension 1 ?
b) Dans le cas général, montrer que I est un intervalle inclus dans $[1, +\infty[$.
c) On suppose F de dimension finie. Montrer que I est fermé.

1458. [IMT] On note E l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$ telles que $f(0) = 0$. Pour $f \in E$, on pose $N(f) = \|f + f'\|_\infty$ et $N'(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$.
a) Montrer que N et N' sont des normes sur E.
b) Montrer que N et N' sont équivalentes. *Ind.* Exprimer f en fonction de $g = f + f'$.

1459. [IMT] Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé de dimension finie. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ une suite telle que, pour tout vecteur $x \in E$, la suite $(\|x - u_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a une valeur d'adhérence.
b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

1460. [IMT] Soit E le plan euclidien.
a) L'ensemble $\mathcal{H} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ y^2 - x^2 = 1\}$ est-il un fermé de E ?
b) Donner la définition d'une partie connexe par arcs.
c) Montrer que le cercle de centre 0 et de rayon 1 est une partie connexe par arcs de $\mathbb{R}^2$.
d) Soit $f : E \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que l'image par f d'une partie connexe par arcs, fermée et bornée est un segment.

1461. [IMT] Soit N définie sur $\mathbb{R}[X]$ par $N\Big(\sum_{i=0}^{n} a_i X^i\Big) = \max_{0 \leqslant i \leqslant n} |a_i|$

a) Montrer que N est une norme.
b) Soient $a \in \mathbb{R}$ et $\phi : P \in \mathbb{R}[X] \mapsto P(a)$. Pour quelles valeur de a, l'application ϕ est-elle continue pour la norme N ?

1462. [CCINP] On note $E = \mathbb{C}[X]$. Pour $P \in E$ d'écriture développée $P = \sum_{k \geqslant 0} a_k X^k$, on pose $\|P\| = \sup_k |a_k|$.
a) Montrer que $\| \ \|$ est une norme de E.
b) Soit $b \in \mathbb{C}$, on souhaite étudier la continuité de l'application $f : P \in E \mapsto P(b) \in \mathbb{C}$.
c) Montrer que, si $|b| < 1$, alors f est continue.
d) Étudier la continuité de f si $|b| = 1$ en utilisant la suite de polynôme $(P_n)_{n \geqslant 0}$, où, pour $n \in \mathbb{N}$, $P_n = \sum_{k=0}^{n} \bar{b}^k X^k$.
e) Montrer que, si $|b| > 1$, alors f n'est pas continue.

1463. [IMT] Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Déterminer $\lim_{n \to +\infty} \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{a}{n}\right) & \sin\left(\frac{b}{n}\right) \\ \sin\left(\frac{b}{n}\right) & \cos\left(\frac{a}{n}\right) \end{pmatrix}^n$.

1464. [IMT] Soient E un espace euclidien et $\mathcal{K}$ l'ensemble des projecteurs orthogonaux de E. Soit p un projecteur.
a) Montrer que : $p \in \mathcal{K} \Leftrightarrow \forall x \in E, \|p(x)\| \leqslant \|x\|$.
b) Montrer que $\mathcal{K}$ est un compact.

1465. (Dauphine) Trouver la limite de la suite de terme général $\sum_{k=1}^{n} \tan\left(\frac{1}{k+n}\right)$.

1466. [IMT] Montrer la convergence des suites (x_n), (y_n), (z_n) définies par leurs premiers termes respectifs x_0, y_0, z_0 et les relations, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{y_n}{4} + \frac{z_n}{4}$, $y_{n+1} = \frac{x_n}{4} + \frac{y_n}{2} + \frac{z_n}{4}$, $z_{n+1} = \frac{x_n}{4} + \frac{y_n}{4} + \frac{z_n}{2}$.

1467. [St Cyr] Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit l'équation $(E_n) : x^n + x - 1 = 0$.
a) Montrer que (E_n) a une solution unique dans $]0, +\infty[$. On la note x_n.
b) Montrer que la suite (x_n) est croissante et majorée.
c) (Python) Écrire un programme qui renvoie une valeur approchée de x_n à ε près obtenue par dichotomie.
d) (Python) Afficher les 100 premières valeurs de x_n et conjecturer la limite de la suite.
e) Démontrer la conjecture.

1468. [St Cyr] Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $P_n = X^n + X^{n-1} + \cdots + X - 1$.
a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, P_n a une unique racine réelle positive que l'on notera a_n.
b) Écrire une fonction Python qui renvoie une valeur approchée de a_n.

c) Afficher un graphe représentant les 20 premières valeurs de la suite (a_n). Conjecturer la nature de (a_n).
d) Montrer la convergence de (a_n) et déterminer sa limite.

1469. [Dauphine] Soit (x_n) une suite de réels strictement positifs qui tend vers 0.
a) Montrer qu'il existe une infinité de n tels que $x_n = \min(x_0, \ldots, x_n)$.
b) Montrer qu'il existe une infinité de n tels que $x_n = \max\{x_k,\ k \geqslant n\}$.

1470. [IMT] On définit, pour x réel, $f(x) = \lfloor x \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor)^2$.
a) Discuter la continuité de f.
b) Tracer le graphe de f.
c) On définit la suite (x_n) par $x_0 \in \mathbb{R}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = f(x_n)$. Étudier la monotonie et la convergence de (x_n).

1471. [Navale] ***a)*** Pour $m > 1$, montrer qu'il existe un unique $x_m \in]-1, -2[$ tel que $m \ln\left(1 + \dfrac{x_m}{m+1}\right) = x_m$.
b) Étudier la suite $(x_m)_{m>1}$.

1472. [IMT] Étudier la convergence de $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^{2\alpha} + (-1)^n}}$

1473. [IMT] Nature de la série $\displaystyle\sum \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$?

1474. [IMT] Nature de la série $\displaystyle\sum \cos\left(n^2\pi \ln\left(\frac{n-1}{n}\right)\right)$?

1475. [IMT] On définit la suite (u_n) par $u_0 \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sin(u_n)$.
a) Montrer que (u_n) converge vers 0.
b) Déterminer $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $(u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha)$ converge vers une limite non nulle.
c) Déterminer un équivalent de u_n. Quelle est la nature de $\sum u_n$?

1476. [IMT] On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}\right)$. Donner un équivalent de u_n lorsque n tend vers $+\infty$. Quelle est la nature de la série $\sum u_n$?

1477. [St Cyr] Pour un entier n, on note r_n le reste de la division euclidienne de n par 5.
a) Montrer que la série de terme général $\dfrac{r_n}{n(n+1)}$ converge.
b) On note $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{r_k}{k(k+1)}$. Déterminer S_{5n} en fonction de termes de la suite (H_p), où $H_p = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k}$.

c) En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r_n}{n(n+1)}$.

1478. [IMT] On pose $u_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t, v_n = (-1)^n u_n, w_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2 \mathrm{d}t,$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
a) Justifier l'existence de u_0 et w_0.
b) Déterminer les limites de (u_n) et de (w_n).
c) Nature de $\sum u_n$, $\sum v_n$ et $\sum w_n$?

1479. [St Cyr] Soient $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$ et $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une fonction deux fois dérivable et majorée. On suppose que $\forall t \in \mathbb{R}^+, f''(t) \geqslant \alpha^2 f(t)$.
a) Montrer que f est convexe.
b) Montrer que f' est négative.
c) Montrer que f admet une limite finie en $+\infty$, déterminer sa valeur.
d) Montrer que f' admet une limite finie en $+\infty$, déterminer sa valeur.
e) Montrer que $\alpha^2 f^2 - f'^2$ est négative.
f) En déduire que $\forall t \in \mathbb{R}^+, f(t) \leqslant f(0)\,\mathrm{e}^{-\alpha t}$.

1480. [IMT] Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \displaystyle\int_x^{4x} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^4)^2}$.
a) Étudier les variations de f et tracer son graphe.
b) Donner un équivalent de f en 0.

1481. [IMT] Soit $f : x \in [-1/3, +\infty[\mapsto \displaystyle\int_x^{3x} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^3}}$. Étudier f et donner son graphe.

1482. [IMT] Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{x^2} \frac{\ln(1+t)}{t}\mathrm{d}t$.
a) Montrer que f est dérivable sur $]0,1[$ et exprimer sa dérivée.
b) Montrer que f est continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $[0,1[$. Est-elle est dérivable en 1 ? Pourquoi ?
c) Donner un développement limité à l'ordre 2 de f en 0.

1483. [IMT] Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $\phi(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}u}{3+\cos^2 u}$. Calculer $\phi(x)$.
Ind. Utiliser le changement de variable $v = \tan u$.

1484. [St Cyr] Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et concave.
a) Montrer que $\forall x \in [0,1],\ x\,f(x) \leqslant \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t - x$.
b) En déduire $\displaystyle\int_0^1 x\,f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{2}{3}\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

1485. [IMT] On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $u_0 = \mathrm{id}$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sin \circ u_n + u_n$.
a) Étudier la convergence simple de (u_n).
b) La convergence est-elle uniforme ?

1486. [Dauphine] Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $P_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$. Soit $R > 0$. Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $n \geqslant N$, toutes les racines complexes de P_n sont de module $\geqslant R$.

1487. [Navale] Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On définit une suite de fonctions (f_n) sur $[0,1]$ par $f_n(x) = f\left(x + \dfrac{x(1-x)}{n}\right)$ pour $n \geqslant 1$ et $f_0(x) = 0$.
a) Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de (f_n).
b) Montrer que les résultats restent valides pour une fonction f seulement lipschitzienne.

1488. [CCINP] On pose, pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0,1]$, $g_n(t) = e^t\left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n$.
a) Montrer que : $\forall (t,n) \in [0,1] \times \mathbb{N}^*$, $|g_n'(t)| \leqslant \dfrac{e^t}{n}$.
b) Montrer que : $\forall (t,n) \in [0,1] \times \mathbb{N}^*$, $\left|e^{-t} - \left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n\right| \leqslant \dfrac{t}{n}$.
c) Étudier la convergence simple et uniforme sur $[0,1]$ de la suite de fonctions $(G_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $G_n : x \in [0,1] \mapsto \displaystyle\int_0^x g_n(t)\,\mathrm{d}t$.

1489. [CCINP] Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : x \in [0, \pi/2] \mapsto n\cos^n(x)\sin(x)$.
a) Étudier la convergence simple de (f_n).
b) i) La suite converge-t-elle uniformément sur $[0, \pi/2]$?
Indication Considérer $\displaystyle\int_0^{\pi/2} f_n(t)\mathrm{d}t$.
ii) Soit $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$. La suite converge-t-elle uniformément sur $[\alpha, \pi/2]$?
c) Soit $g \in \mathcal{C}^0([0,\pi/2], \mathbb{R})$. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi/2} f_n(t)g(t)\mathrm{d}t = g(0)$.
Ind. Utiliser $\left|\displaystyle\int_0^{\pi/2} [f_n(t)g(t) - f_n(t)g(0) + f_n(t)g(0)]\,\mathrm{d}t - g(0)\right|$.

1490. [St Cyr] On définit une suite de fonctions $f_n : I = [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ par $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{1+nx}}$.
a) Étudier la convergence simple de $\sum f_n$.
b) La série converge-t-elle normalement sur I ? uniformément sur I ?
c) Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.

1491. [IMT] Soit $f : x \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto \dfrac{\sin\left(x^3\right)}{x\sqrt{x}}$.

a) Montrer que f admet un prolongement $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$.

b) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : x \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto f\left(\dfrac{n}{x}\right) f(xn)$. Montrer que $\sum f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}^{+*}$.

1492. [IMT] Soit $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{1+n^2}$.

a) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}^+$ et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

b) Montrer que : $\forall x \in [0,1], 1 - \mathrm{e}^{-x} \geqslant \left(1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}}\right) x$.

c) La fonction f est-elle dérivable en 0 ? Quelle est sa limite en $+\infty$?

d) Dresser le tableau de variation de f.

1493. [CCINP] Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite décroissante de réels positifs qui converge vers 0. Pour tout $t \in [0,1]$, on pose $u_n(t) = a_n(1-t)t^n$.

a) Montrer que la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $[0,1]$.

b) Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que cette série converge normalement.

c) Montrer que la série $\sum u_n$ converge uniformément sur $[0,1]$.

1494. [Navale] Étudier la convergence simple et la convergence uniforme des séries de fonctions $\sum u_n$ et $\sum u_n'$ définies sur $\mathbb{R}^+$ par $u_n(x) = \dfrac{x}{(1+n^2x)^2}$.

1495. [St Cyr] Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}^+$, on pose $f_n(x) = \dfrac{x}{n(1+n^2x^2)}$.

a) Étudier la convergence simple de $\sum f_n$.

b) Étudier la continuité de la somme $f = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$.

c) Donner un équivalent de f en 0^+.

1496. [CCINP] Soit $S : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,(x+n)}$.

a) Montrer que S est définie sur $]0,+\infty[$. Calculer $S(1)$ et en déduire $xS(x) = \dfrac{1}{e} + S(x+1)$.

b) Montrer que $S(x) \sim \dfrac{1}{x}$ quand $x \to 0$.

c) Montrer S est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

1497. [IMT] Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n^{(-1)^n} x^n$ et calculer sa somme.

1498. [CCINP] On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(t)\mathrm{d}t$.

a) Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{\pi}{4}$. En déduire que le rayon de convergence de $\sum I_n x^n$ est $\geqslant 1$.

b) Montrer, pour $n \in \mathbb{N}$, que $I_{n+2} + I_n = \dfrac{1}{n+1}$.

c) Donner un équivalent simple de I_n.

d) Déterminer le rayon de convergence R de $\sum I_n x^n$. Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} I_n x^n$ pour $x \in]-R, R[$.

1499. [CCINP] ***a)*** Étudier la convergence simple de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) x^n$. On note D l'ensemble de convergence et $S(x)$ la somme sur D. L'application S est-elle continue sur D ?

b) Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \left(\sin\frac{1}{\sqrt{n}} - \sin\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right) x^n$ converge normalement sur $[-1, 1]$.

c) En déduire la valeur de $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} (1-x)S(x)$.

1500. [CCINP] Soit $f : z \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon $+\infty$.

a) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $r \in \mathbb{R}^+$. Montrer que $a_n r^n = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f\left(re^{it}\right) e^{-int}\mathrm{d}t$.

b) Montrer que si f est bornée alors f est constante.

1501. [IMT] On pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(nt)}{1+n^4t^3}\mathrm{d}t$ pour $n \geqslant 1$.

a) Montrer que I_n est bien définie.

b) Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$.

c) Nature de la série $\sum I_n$?

1502. [CCINP] Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^3)^n}$.

a) Justifier que I_n est bien définie pour tout $n \geqslant 1$.

b) Montrer que $I_{n+1} = \left(1 - \dfrac{1}{3n}\right) I_n$.

c) On pose $u_n = n^{1/3} I_n$. Étudier la convergence de la suite (u_n). *Ind.* Poser $v_n = \ln(u_n)$.

d) Étudier la convergence de la série $\sum I_n$.

1503. [IMT] On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n}(x)\mathrm{d}x$

a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} + I_n = \dfrac{1}{2n+1}$.
b) Donner un équivalent simple de I_n.
c) Nature et somme éventuelle de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$?

1504. [St Cyr] Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^3)^n}$.
a) Justifier l'existence de I_n pour $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $I_{n+1} = \left(1 - \dfrac{1}{3n}\right) I_n$.
b) Programmer sur Python la méthode des trapèzes pour calculer une valeur approchée de I_1.
c) Programmer une fonction Python qui calcule les 20 premières sommes partielles des séries $\sum I_n^\alpha$ pour $\alpha = 1, 2, 3, 4$.
d) Soit $\sum x_n$ une série à termes strictement positifs et $\sum y_n$ une série absolument convergente. On suppose qu'il existe λ tel que $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} = 1 - \dfrac{\lambda}{n} + y_n$.
i) Montrer que $\ln\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right) = -\dfrac{\lambda}{n} + z_n$, où z_n est le terme général d'une série absolument convergente.
ii) Montrer l'existence d'une constante C telle que $\ln(x_n) = -\lambda \ln n + C + o(1)$ quand $n \to +\infty$ et en déduire un équivalent de x_n.
iii) Étudier la nature de la série $\sum I_n^\alpha$ en fonction de α.

1505. [IMT] Calculer, pour $x \in \mathbb{R}$, $\phi(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \cos(tx)\,\mathrm{d}t$ par deux méthodes :
i) à l'aide d'un développement en série entière de la fonction cosinus ;
i) i à l'aide d'une équation différentielle d'ordre 1.

1506. [IMT] Soit $F : t \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{x(1+x^2)}\,\mathrm{d}x$. Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}$, puis de classe $\mathcal{C}^1$. En déduire F.

1507. [CCINP] Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt) - \arctan(t)}{t}\mathrm{d}t$.
a) Montrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}^{+*}$.
b) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$, puis que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$. En déduire l'expression de f' puis de f.
c) Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(at) - \arctan(bt)}{t}\mathrm{d}t$ pour $(a, b) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$.

1508. [CCINP] On pose $G : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t(x+t)}\,\mathrm{d}t$.
a) Montrer que G est bien définie pour $x > 0$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\displaystyle\int_0^y \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t(n+t)}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n}\left(\int_0^n \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t}\,\mathrm{d}t - \int_y^{y+n} \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t}\,\mathrm{d}t\right)$.

c) On pose $H(n) = nG(n)$. Montrer que la série de terme général $H(n+1) - H(n) - \dfrac{1}{2n}$ converge. En déduire un équivalent de $G(n)$.

1509. [Navale] Soit la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\mathrm{d}t$

a) Exprimer $G(x)$ en fonction en fonction de $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u$.

b) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u$.

1510. [IMT] Soit $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^t - e^{-2t}}{t}\cos(xt)\mathrm{d}t$.

a) Donner le domaine de définition de F.
b) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$.
c) Exprimer F à l'aide de fonctions usuelles.

1511. [CCINP] ***a)*** Soient $a, b > 0$. Donner les primitives sur $\mathbb{R}$ de $u \mapsto \dfrac{1}{au^2 + b}$.

b) Exprimer $\cos(t)$ en fonction de $u = \tan\left(\dfrac{t}{2}\right)$ lorsque $\cos\left(\dfrac{t}{2}\right) \neq 0$.

b) Soit $x : x \in\ ]1, +\infty[\ \mapsto \displaystyle\int_0^{\pi} \ln(\cos(t) + x)\mathrm{d}t$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$, puis exprimer f' sans intégrale.
c) En déduire une expression de f.

1512. [IMT] On considère $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(tx)}{t^2}e^{-t}\mathrm{d}t$.

a) Donner le domaine de définition de f.
b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.
c) Exprimer f''.
d) En déduire des expressions de f' et f avec des fonctions usuelles.

1513. [IMT] Soit $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)^x\mathrm{d}t$.

a) Montrer que F est de classe C^∞ sur $]-1, +\infty[$.
b) Montrer que $F(n+2) = \dfrac{n+1}{n+2}F(n)$. Calculer $(n+1)F(n)F(n+1)$.
c) Donner un équivalent de $F(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

1514. [IMT] On pose $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt}\sqrt{t}\mathrm{d}t$.

a) Trouver une équation différentielle du premier ordre vérifiée par f.
b) Expliciter f.

1515. [IMT] Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{1+u^4} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{1+4k}$.

1516. [IMT] Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-1)^n \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)^n \mathrm{d}x$. Étudier la convergence de $\sum u_n$. Calculer sa somme.

1517. [IMT] Soit $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\arctan(t^2)}{t} \mathrm{d}t$

a) Montrer que I est bien définie.

b) Montrer que $I = -2\displaystyle\int_0^1 \frac{t\ln(t)}{1+t^4} \mathrm{d}t$

c) Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

1518. [CCINP] ***a)*** Justifier l'existence de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t}}{e^t - 1} \,\mathrm{d}t$.

b) Montrer que $I = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2} \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$. On admet que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

1519. [CCINP] Pour $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, on pose $I_{p,q} = \displaystyle\int_0^1 x^p \ln(x)^q \mathrm{d}x$.

a) Montrer la convergence des intégrales $I_{p,q}$ et les calculer.

b) Montrer que $\displaystyle\int_0^1 e^{x\ln(x)} \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^n}$.

1520. [IMT] Montrer l'existence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2t^2} \,\mathrm{d}t$ et en donner la valeur.

1521. [CCINP] Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n : x \in]0,+\infty[\mapsto \dfrac{2\,\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{e}^{nx} - 1}$ et sous réserve d'existence, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x) \,\mathrm{d}x$.

a) Montrer que I_n existe.

b) Montrer que $I_n = 2\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \mathrm{sh}(x) \,\mathrm{e}^{-knx} \,\mathrm{d}x$.

c) En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{4k^2 - 1}$.

1522. [IMT] ***a)*** Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) + f'(x) = e^{-x}$. Montrer que $f \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.
b) Plus généralement, montrer que si $f(x) + f'(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, alors $f \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

1523. [IMT] On recherche les fonctions continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant (1) :
$\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) + \displaystyle\int_0^x (x-t) f(t)\,\mathrm{d}t = 1 + x$.
a) Trouver toutes les solutions de (1) développables en série entière au voisinage de 0.
b) Montrer que, si f vérifie (1), alors elle est de classe $\mathcal{C}^2$ et vérifie $(E) : y'' + y = 0$.
c) Résoudre (E).
d) À l'aide du théorème de Cauchy, trouver toutes les solutions de (1).

1524. [St Cyr] On note (E) l'équation différentielle $t^2 y'' - 2y = 3t^2$.
a) Déterminer les solutions de l'équation homogène associée à (E) de la forme $t \mapsto t^\alpha$ (avec $\alpha \in \mathbb{R}$) sur $\mathbb{R}^{+*}$. En déduire une base de l'espace des solutions de l'équation homogène sur $\mathbb{R}^{+*}$.
b) Résoudre (E) sur $\mathbb{R}^{+*}$.

1525. [IMT] Soit (1) l'équation différentielle $xy' + y = \mathrm{e}^x$.
a) Trouver les solutions de (1) développables en série entière au voisinage de 0.
b) Les solutions de (1) sur $]0, +\infty[$ sont-elles toutes développables en série entière au voisinage de 0 ?
c) Résoudre (1) sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Discuter suivant I.
d) On ajoute à l'équation (1) la condition $y(x_0) = y_0$ (avec $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$) pour obtenir un problème numéroté (2). Que dit le théorème de Cauchy à propos du problème (2) si on travaille sur $]0, +\infty[$? Résoudre (2).
e) Représenter graphiquement la ou les solutions développables en série entière.

1526. [CCINP] On recherche les fonctions $x, y, z, u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant le système $\left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & x + 2y - 2z \\ y' & = & x - y + u \\ z' & = & x - z + u \\ u' & = & 2y - 2z + u \end{array} \right.$. On note $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ canoniquement associé à A.
a) Déterminer le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de f.
b) Justifier avec un minimum de calcul que f n'est pas diagonalisable.
c) Déterminer une base de $\mathbb{R}^4$ dans laquelle la matrice de f vaut $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
d) Résoudre le système différentiel.

1527. [CCINP] ***a)*** Déterminer les extrema de $f : (u, v) \in [0, 1]^2 \mapsto uv(1 - u - v)$.
b) Soit (A, B, C) un triangle d'aire égale à 1. Soit M un point dans le triangle. Maximiser le produit des distances de M aux côtés du triangle.

1528. [CCINP] Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto A^T A$.
a) Justifier que F est de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que, pour $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{d}f_{I_n}(H) = H^T + H$.
b) Déterminer $\mathrm{Ker}(\mathrm{d}f_{I_n})$.
c) En déduire que l'espace tangent à $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ en I_n est $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Probabilités

1529. [St Cyr] On considère une urne contenant N_1 boules blanches et N_2 boules rouges. On tire simultanément dans l'urne n boules, avec $1 \leqslant n \leqslant N_1 + N_2$. On note X le nombre de boules blanches tirées.
a) Déterminer la loi de X.
b) Retrouver l'identité de Vandermonde : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{N_1}{k}\binom{N_2}{n-k} = \binom{N_1+N_2}{n}$.
c) (Python) Définir une fonction `Hypergeom`(N_1, N_2, n) qui reproduit l'expérience et renvoie une valeur de X.
d) Exprimer l'espérance de X en fonction de N_1, N_2 et n.
e) (Python) Définir une fonction `Moyenne`(N_1, N_2, n, k) qui reproduit k expériences et renvoie la moyenne des valeurs de X obtenues.
f) On choisit $N_1 = 10$, $N_2 = 13$, $n = 5$, et $k = 100$. Comparer la moyenne empirique et l'espérance théorique.

1530. [IMT] Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n et p. Calculer l'espérance de X de trois manières différentes :
a) directement à partir de la loi de X ;
b) en utilisant la fonction génératrice de X ;
c) sans calcul, en interprétant la loi de X.

1531. [CCINP] Une personne sur une échelle est en train de peindre un bâtiment. La probabilité qu'un passant reçoive une goutte de peinture est $p \in]0, 1[$. On note X (resp. Y) le nombre de passants ayant reçu une goutte de peinture (resp. n'ayant pas reçu de goutte.)
a) On suppose que n personnes sont passées. Donner les lois de X et de Y. Sont-elles indépendantes ?
b) On note à présent N le nombre de passants dans la journée. On suppose que N suit une loi de Poisson de paramètre λ. Donner la loi de X et de Y. Donner l'espérance et la variance de X.
c) Montrer que X et Y sont indépendantes. Calculer $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

1532. [IMT] Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et convexe. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans I admettant une espérance. On suppose que $f(X)$ admet une espérance. Montrer que l'on a $f(\mathbf{E}(X)) \leqslant \mathbf{E}(f(X))$.

1533. [IMT] Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes. On pose $S = X + Y$.
a) Donner G_S en fonction de G_X et de G_Y.
b) On suppose que $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ et $Y \sim \mathcal{B}(m, p)$. Loi de S ?
c) On suppose que $X \sim \mathcal{P}(\lambda_1)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\lambda_2)$. Loi de S ?

1534. [IMT] Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que $X \sim \mathcal{G}\left(\dfrac{1}{3}\right)$ et $Y \sim \mathcal{G}\left(\dfrac{2}{3}\right)$. Loi de $Z = X + Y$?

1535. [CCINP] Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires suivant la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$. En posant $\min\emptyset = +\infty$, on définit $T_1 = \min\{n \in \mathbb{N}^*, X_n = 1\}$ et $T_2 = \min\{n > T_1, X_n = 1\}$.
a) Que représente T_1 ? Préciser sa loi, son espérance et sa variance.
b) Que représente T_2 ? Calculer $\mathbf{P}(T_2 - T_1 = k, T_1 = n)$.
c) Vérifier que $T_2 - T_1$ et T_1 sont indépendantes. En déduire la loi de T_2.

1536. [IMT] On considère n tulipes qui ont chaque année chacune une probabilité $p \in]0,1[$ de fleurir, sachant que si une tulipe fleurit une année, elle fleurira toutes les années suivantes. La variable X_i désigne l'année de la première floraison de la tulipe numéro i, X l'année à partir de laquelle toutes les tulipes fleurissent.
a) Exprimer X en fonction des $(X_i)_{i\leqslant n}$.
b) Exprimer la loi des $(X_i)_{i\leqslant n}$.
c) Calculer, pour $k \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(X > k)$. Montrer que X est d'espérance finie et calculer cette espérance.

1537. [St Cyr] On considère une répétition d'expériences de Bernoulli indépendantes et de même probabilité de succès $p \in]0,1[$. Soient $r \in \mathbb{N}^*$ et X la variable aléatoire comptant le nombre de répétitions avant d'obtenir le r^{e} succès.
a) Écrire une fonction `pascal`(p, r) qui simule X et renvoie le nombre d'épreuves avant le r^{e} succès.
b) Écrire une fonction `moyenne`(p, r, k) qui renvoie une valeur moyenne pour k répétitions de la fonction précédente.
c) Calculer la loi de X.
d) Calculer l'espérance de X.

1538. [CCINP] Soient $p \in]0,1[$, X_1, …, X_n des variables aléatoires i.i.d. suivant la loi géométrique de paramètre p.
a) Calculer, pour tout $m \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(X_1 \geqslant m)$ et $\mathbf{P}(X_1 \leqslant m)$.
b) Posons $Y = \min(X_1, \ldots, X_n)$. Calculer, pour tout $m \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(Y \geqslant m)$ et $\mathbf{P}(Y \leqslant m)$. Reconnaître la loi de Y et déterminer $\mathbf{E}(Y)$.

1539. [IMT] Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois géométriques de paramètres respectifs p et q. On note $Z = \dfrac{X}{Y}$.
a) Montrer que $Z \leqslant X$. Montrer que Z admet une espérance et une variance. Calculer $\mathbf{E}(Z)$
b) Donner la loi de Z.

1540. [CCINP] Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^2$ tel qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ vérifiant, $\forall (k, \ell) \in \mathbb{N}^2$, $\mathbf{P}(X = k, Y = \ell) = \dfrac{\alpha}{2^{k+\ell}}$.
a) Trouver α. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

b) Calculer $G_X(t)$, $\mathbf{E}(X)$, $\mathrm{V}(X)$ et $\mathrm{cov}(X, Y)$.
c) Calculer $\mathbf{P}(X \geqslant k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et retrouver $\mathbf{E}(X)$.
d) On pose $Z = \min(X, Y)$. Déterminer la loi de Z.
e) Calculer $\mathbf{P}(X \geqslant Y)$.

1541. [Navale] On considère une suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ i.i.d. suivant la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$. On note $q = 1-p$. On note $L_1 = \sup\{n \in \mathbb{N}^*,\ X_1 = X_2 = \cdots = X_n\}$ la longueur de la première séquence et $L_2 = \sup\{n \in \mathbb{N}^*,\ X_{L_1+1} = \cdots = X_{L_1+n}\}$ la longueur de la seconde séquence. Montrer que $\mathrm{Cov}(L_1, L_2) = -\dfrac{(p-q)^2}{pq}$.

1542. [Navale] Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires i.i.d. ayant une variance. On pose, pour $i \in [\![1, n]\!]$, $Y_i = X_1 + \cdots + X_i$. On note $M = (\mathrm{Cov}(Y_i, Y_j))_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

a) Relier M à la matrice $A^T A$, où $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
b) Encadrer les valeurs propres de M.

1543. [St Cyr] Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. à valeurs dans $\mathbb{N}$. On note $C_n = \mathrm{card}\{X_1, \ldots, X_n\}$.
a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbf{E}(C_n) \leqslant k + n\mathbf{P}(X_1 \geqslant k)$.
b) En déduire que $\mathbf{E}(C_n) = o(n)$ quand $n \to +\infty$.
Dans la suite, on suppose que les X_k sont d'espérance finie.
c) Montrer que $\mathbf{P}(X_1 \geqslant k) = o\left(\dfrac{1}{k}\right)$ quand $k \to +\infty$.
d) En déduire que $\mathbf{E}(C_n) = o\left(\sqrt{n}\right)$ quand $n \to +\infty$.