exo 57 :

1) a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ symétrique réelle donc diag.$^{\underline{able}}$ par thm Spectral

b) $\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 \\ -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2 - 1$

$= \lambda^2 - 2\lambda = \lambda(\lambda-2)$ Donc $Sp(A) = \{0, 2\}$

- $E_0(A) = \mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ Pourquoi ?

et $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ non colinéaires

- $E_2(A) = \mathrm{Ker}(A - 2I_2) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

donc forment une base de sep de A

$A - 2I_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Vous ne résolvez pas l'équation ! Donner deux solutions ne suffit pas. La méthode est la suivante : vous diagonalisez A = P D P^(-1) puis vous posez Y = P^(-1) X P. L'équation se réécrit alors Y^2 - Y = D. En remarquant que Y commute avec D (car D est un polynôme en Y), vous trouvez la forme de Y puis vous le réinjectez dans l'équation pour terminer la résolution.

2) $X^2 - X = A$ ie $X(X - I_2) = A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

solution évidente : $X = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

2^e solution : A car $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^2 - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = A$

3) Thm de Cayley - Hamilton : $\chi_A(A) = 0_2$

donc $\chi_A(A) = A^2 - 2A = 0$ donc on obtient que A est

ie $A^2 - A = A$ racine de cette équation