0 Savoir-faire et thèmes classiques – Mathématiques – MP2I et MPI

I Analyse

1 Suites

Savoir-faire

- ☐ Écrire la limite d'une suite avec des quantificateurs
- ☐ Montrer une convergence vers une limite en majorant la norme de la différence par une suite tendant vers 0
- ☐ Reconnaître et utiliser des suites adjacentes
- ☐ Traduire et utiliser les différentes caractérisations séquentielles (bornes inf et sup, densité, point adhérent, fermé, limite, continuité, uniforme continuité)
- ☐ Étudier la convergence d'une suite géométrique complexe
- ☐ Étudier une suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$, directement ou en utilisant une fonction contractante et/ou l'inégalité des accroissements finis
- ☐ Définir et manipuler les relation de comparaison o, $\mathcal{O}$ et $\sim$
- ☐ Comparer les suites usuelles
- ☐ Connaître les équivalents et DL usuels en 0
- ☐ Calcul un développement limité, en déduire une limite, un équivalent, un signe, une équation de tangente, une équation d'asymptote, la position de la courbe par rapport à ces dernières
- ☐ Composer des extractions
- ☐ Déterminer le terme général d'une suite arithmético-géométrique, d'une suite vérifiant une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 homogène à cœfficients constants

Thèmes Classiques

- ☐ Limite de $\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n$
- ☐ Suite d'entiers convergente
- ☐ Irrationnalité de e par suites adjacentes
- ☐ Théorème de Cesáro (voir aussi la sommation des relations de comparaison) ; utilisation pour obtenir un équivalent de suite, de suite récurrente
- ☐ Suites de Schwob

2 Séries numériques et vectorielles

Savoir-faire

- ☐ Étudier la convergence ou la divergence d'une série par comparaison
- ☐ Appliquer le TSSA et le critère de d'Alembert
- ☐ Passer de l'étude d'une suite à l'étude d'une série télescopique
- ☐ Comparer série et intégrale, en déduire des informations asymptotique sur restes et sommes partielles
- ☐ Utiliser les séries de Riemann (règle du $n^\alpha u_n$...)
- ☐ Utiliser la sommation des relations de comparaison dans les cas de convergence et de divergence, en déduire le théorème de Cesáro
- ☐ Utiliser l'absolue convergence pour prouver une convergence
- ☐ Étudier la nature d'une série non absolument convergente par développement asymptotique de son terme général
- ☐ Calculer des sommes de séries en utilisant des séries télescopiques, géométriques, exponentielles (voir aussi les séries entières)
- ☐ Manipuler des séries de termes réels positifs dans $[0,+\infty]$ pour en déduire la convergence et/ou la somme

Thèmes Classiques

- ☐ Séries de Bertrand
- ☐ Développement asymptotique

$$H_n = \ln n + \gamma + \mathrm{o}(1)$$

- ☐ Règle de Raabe-Duhamel
- ☐ Transformation d'Abel
- ☐ Calcul de la somme de la série harmonique alternée par séparation des termes d'indices pairs et impairs

3 Continuité, dérivabilité

Savoir-faire

- ☐ Traduire une limite avec des quantificateur
- ☐ Montrer une convergence vers une limite en majorant la norme de la différence par une suite tendant vers 0
- ☐ Écrire et manipuler des relations de comparaison o, $\mathcal{O}$ ou $\sim$ entre fonctions numériques ou vectorielles
- ☐ Traduire la continuité et l'uniforme continuité et leurs caractérisations séquentielles
- ☐ Utiliser le théorème des valeurs intermédiaires et ses extensions (avec des limites ou en travaillant sur une partie connexe par arcs d'un EVN) Exemple : problèmes de point fixe
- ☐ Utiliser le théorème des bornes atteinte (étendu aux compacts)
- ☐ Utiliser le théorème de la bijection
- ☐ Utiliser le théorème de Heine (étendu aux compacts)
- ☐ Traduire une lipschitzianité (exemple : distance à une partie d'une EVN)
- ☐ Traduire la continuité d'une fonction vectorielle coordonnée à coordonnée dans une base
- ☐ Étudier la continuité d'une fonction de plusieurs variables
- ☐ Montrer qu'en ensemble est un ouvert ou un fermé de l'ensemble de départ en tant qu'image réciproque d'un ouvert ou d'un fermé par une application continue
- ☐ Montrer que deux applications sont égales car elles coïncident sur une partie dense
- ☐ Traduire la continuité d'une application linéaire ou multilinéaire ; utiliser le fait qu'elle soit automatique si l'ensemble de départ est de dimension finie
- ☐ Traduire une dérivabilité à l'aide d'un taux d'accroissement ou d'un DL_1
- ☐ Dériver les fonctions usuelles (une ou plusieurs fois)
- ☐ Effectuer une étude de fonction pour montrer une inégalité, déterminer des extremums, calculer une norme infini, montrer une bijectivité, etc.
- ☐ Étudier la dérivabilité de la réciproque d'une bijection
- ☐ Calculer des dérivées successives, utiliser la formule de Leibniz
- ☐ Utiliser la condition nécessaire d'extremum local, le théorème de Rolle, le théorème des accroissements finis, l'inégalité des accroissements finis, le théorème de la limite de la dérivée
- ☐ Utiliser le principe de la démonstration du théorème des accroissements finis

Thèmes Classiques

- ☐ Un polynôme réel de degré impair admet une racine réelle
- ☐ Résoudre l'équation fonctionnelle

$$f(x+y)=f(x)+f(y)$$

avec f continue en 0
- ☐ Théorème du point fixe d'une fonction continue sur un intervalle stable
- ☐ Continuité de l'application distance à une partie et applications
- ☐ Utilisation du théorème de Rolle pour l'étude des dérivées de polynômes réels simplement scindés ou scindés
- ☐ Utilisation du théorème de Rolle pour montrer que les polynômes de Legendre sont simplement scindés
- ☐ Généralisations du théorème de Rolle
- ☐ Majoration de l'erreur dans l'interpolation de Lagrange
- ☐ Égalité de Taylor-Lagrange
- ☐ Théorème de Darboux

4 Convexité

Savoir-faire

- ☐ Définir et donner toutes les caractérisations (cordes, épigraphe, inégalité des trois cordes, taux d'accroissement, dérivée première, dérivée seconde) de la convexité
- ☐ Utiliser l'inégalité de Jensen
- ☐ Reconnaître une inégalité de convexité sous forme de somme ou de produit

Thèmes Classiques

- ☐ Inégalité arithmético-géométrique
- ☐ Théorème de Gauß-Lucas
- ☐ Inégalité de Jensen continue
- ☐ Point de continuité, de dérivabilité à gauche ou à droite d'une fonction convexe

5 Intégration sur un segment

Savoir-faire

- ☐ Majorer la norme d'une intégrale sur un segment
- ☐ Utiliser la positivité améliorée
- ☐ Utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour les intégrales et son cas d'égalité
- ☐ Reconnaître des sommes de Riemann et traduire leur convergence
- ☐ Utiliser le théorème fondamental de l'analyse
- ☐ Étudier une fonction intégrale dépendant de ses bornes en introduisant une primitive
- ☐ Effectuer une intégration par parties et un changement de variables
- ☐ Calculer une primitive directement, par IPP, par CV, par DES d'une fraction rationnelle, en utilisant les règles de Bioche, en les appliquant aux fonctions hyperboliques, en trouvant un bon CV lorsqu'il y a des racines
- ☐ Énoncer précisément les trois formules de Taylor avec leurs hypothèses

Thèmes Classiques

- ☐ Étude complète des intégrales de Wallis
- ☐ Lemme de Riemann-Lebesgue

6 Intégrales généralisées et intégrales à paramètres

Savoir-faire

- ☐ Étudier l'intégrabilité d'une fonction en commençant par la continuité (par morceaux) et en découpant l'intervalle d'intégration si nécessaire
- ☐ Comparer aux intégrales de Riemann avec le critère de convergence en $\pm\infty$, en 0, en $a \in \mathbb{R}$
- ☐ Comparer aux intégrales exponentielles
- ☐ Manipuler une intégrale généralisée de fonction positive dans $[0,+\infty]$
- ☐ Distinguer l'intégrabilité de la convergence d'intégrale
- ☐ Dériver une fonction intégrale généralisée dont la variable est l'une des borne en faisant intervenir une primitive
- ☐ Majorer le module d'une intégrale généralisée
- ☐ Effectuer (et justifier) un changement de variable
- ☐ Effectuer une intégration par partie en se ramenant sur un segment
- ☐ Intégrer les relations de comparaisons dans les cas de convergence ou de divergence
- ☐ Effectuer une intégration terme à terme (interversion série-intégrale) dans le cas réel positif par convergence simple en travaillant sur $[0,+\infty]$, dans le cas général avec le théorème de convergence N_1 ou appliquant le TCVD aux restes/sommes partielles
- ☐ Montrer une limite d'intégrales en majorant la norme de la différence
- ☐ Utiliser du théorème de convergence dominée en version discrète (suite de fonctions) ou continue (intégrale à paramètre), en particulier savoir rédiger précisément la domination
- ☐ Établir la continuité, la classe $\mathscr{C}^k$ d'une intégrale à paramètre en maîtrisant la domination éventuellement locale

Thèmes Classiques

- ☐ Intégrales de Bertrand
- ☐ Étude de l'intégrale semi-convergente de Dirichlet $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$
- ☐ Étude complète de la fonction Γ d'Euler (et maîtriser notamment la domination par morceaux)
- ☐ Transformées de Fourier et de Laplace
- ☐ Calculs des intégrales de Gauß et de Dirichlet
- ☐ Liens entre ζ et Γ

7 Suites et séries de fonctions

Savoir-faire

- ☐ Définir et étudier les différents modes de convergence et les comparer : simple et uniforme pour les suites de fonctions, simple, uniforme, normale pour les séries de fonctions
- ☐ Traduire l'absence de convergence uniforme ou normale
- ☐ Utiliser le TSSA pour traduire une convergence uniforme
- ☐ Montrer une convergence normale par majoration ou par étude de fonction
- ☐ Étudier la continuité, les limites, la classe $\mathscr{C}^k$ d'une suite ou d'une série de fonctions
- ☐ Obtenir un équivalent de série de fonction par comparaison série-intégrale ou en sortant quelques termes de la somme de la série
- ☐ Intervertir limite et intégrale ou effectuer une intégration terme à terme (interversion série-intégrale) sur un segment en cas de convergence uniforme
- ☐ Utiliser des approximations uniformes (théorème de Weierstraß, fonctions en escalier), les traduire séquentiellement ou avec des ε

Thèmes Classiques

- ☐ Étude complète des fonctions ζ de Riemann et η de Dirichlet
- ☐ Théorème de Weierstrß par les polynômes de Bernstein (voir aussi probabilités)
- ☐ L'orthogonal de l'ensemble des fonctions polynomiales sur un segment $[a,b]$ pour le produit scalaire canonique sur $\mathscr{C}([a,b])$ est réduit à la fonction nulle

8 Dénombrabilité, sommabilité

Savoir-faire

- ☐ Manipuler les cardinaux des ensembles finis
- ☐ Effectuer des dénombrements de base en étudiant les situations : ordre important ou non, avec ou sans répétitions, disjonction de cas, etc.
- ☐ Connaître les formules concernant les cœfficients binomiaux
- ☐ Calculer des sommes finies en utilisant des télescopages, des sommes géométriques (dont l'indexation peut commencer à autre chose que 0), la somme des k^j pour $j \in \{1,2,3\}$, le binôme de Newton, des sommes de terme général $\cos(ak+b)$ ou $\binom{n}{k}\cos(ak+b)$ ou en remplaçant $\cos$ par $\sin$, ch ou sh.
- ☐ Montrer une (au plus) dénombrabilité directement, par inclusion, par produit cartésien, avec une surjection depuis $\mathbb{N}$, avec une réunion au plus dénombrable
- ☐ Montrer une non dénombrabilité par argument diagonal (exemple : $]0,1[$)
- ☐ Montrer une sommabilité dans le cas réel positif par calcul dans $[0,+\infty]$, en utilisant une sommation par paquet, Fubini, somme double produit
- ☐ Ramener l'étude d'une famille sommable à celle d'une série
- ☐ Obtenir une sommabilité par comparaison
- ☐ Obtenir une sommabilité en rajoutant des modules et en travaillant dans $[0,+\infty]$
- ☐ Reconnaître et calculer un produit de Cauchy

Thèmes Classiques

- ☐ Théorème de Cantor ; $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable
- ☐ Manipulation des sommes indexées par $\mathbb{Z}$
- ☐ Familles sommables faisant intervenir ζ
- ☐ $(*)$ Nombre de dérangements, nombre de surjections (voir formule d'inversion de Pascal)

9 Séries entières

Savoir-faire

- ☐ Déterminer un rayon de convergence en utilisant la définition du programme, en utilisant de la convergence absolue, de la divergence grossière, de la semi-convergence, le caractère borné ou non, le fait que le terme général tende vers 0 ou non, la somme, le produit de Cauchy, le critère de d'Alembert, une multiplication par n^α, une dérivation, une primitivation
- ☐ Étudier une série entière lacunaire
- ☐ Traduire la continuité, dériver et primitiver des séries entières, calculer des limite (par exemple via le théorème d'Abel radial ou ses extensions)
- ☐ Calculer des sommes de séries entières par combinaison linéaire, produit de Cauchy, dérivées et primitives de séries entières connues
- ☐ Exprimer les cœfficients en fonction des dérivées successives de la somme en 0
- ☐ Utiliser l'unicité des cœfficients d'un DSE
- ☐ Chercher les solutions DSE d'une équation différentielle
- ☐ Étudier une suite récurrente en utilisant une série génératrice vue comme une série entière
- ☐ Calculs d'intégrales en développant en séries entières l'intégrande et en intégrant terme à terme

Thèmes Classiques

- ☐ Calcul de la somme de la série harmonique alternée

10 Topologie

Savoir-faire

- ☐ Montrer qu'une application est une norme
- ☐ Montrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz et son cas d'égalité pour une norme euclidienne
- ☐ Montrer que les normes au programme sont des normes et les comparer
- ☐ Montrer la domination ou la non domination d'une norme par rapport à une autre, l'équivalence de deux normes
- ☐ Utiliser l'équivalence des normes en dimension finie
- ☐ Déterminer la norme subordonnée d'un endomorphisme ou d'une matrice
- ☐ Définir les voisinage, ouvert, fermé, adhérence, intérieur, frontière, partie dense
- ☐ Décrire les ouverts, fermés, voisinages relatifs à une partie
- ☐ Montrer qu'une partie est un ouvert ou un fermé relatif à l'ensemble de départ comme image réciproque d'un ouvert ou d'un fermé par une application continue
- ☐ Utiliser le caractère fermé d'un sous-espace vectoriel de dimension finie
- ☐ Définition de Bolzano-Weierstrß des compacts, caractérisation en dimension finie
- ☐ Montrer qu'une partie est compacte comme partie fermée d'un compact, comme produit de compact, comme image (directe) continue d'un compact
- ☐ Caractériser les suites convergentes dans un compact par l'unicité de la valeur d'adhérence
- ☐ Définir les composantes connexes par arcs
- ☐ Utiliser le fait qu'une partie convexe ou étoilée est connexe par arcs
- ☐ Caractériser les intervalles de $\mathbb{R}$ comme parties convexes ou comme parties connexes par arcs de $\mathbb{R}$
- ☐ Reconnaître un connexe par arcs comme image (directe) continue d'un connexe par arcs

Thèmes Classiques

- ☐ Inégalité de Hölder, puis Minkowski pour $\|\cdot\|_p$
- ☐ Normes matricielles subordonnées aux normes usuelles sur $\mathbb{R}^n$
- ☐ Topologie matricielle : continuité de $\det$, Com ; $\mathscr{GL}_n(\mathbb{K})$ est un ouvert dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathscr{O}(n)$ est compact, les matrices diagonalisables dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ sont denses dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ (non valable dans $\mathbb{R}$), connexité par arc ou non de $\mathscr{GL}_n(\mathbb{K})$ et $\mathscr{O}(n)$, de l'ensemble des matrices diagonalisables, $\chi_{AB} = \chi_{BA}$, si des matrices réelles sont semblables dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, elles le sont dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$
- ☐ $(*)$ Propriété de Borel-Lebesgue
- ☐ Diamètre d'une partie bornée, d'un compact
- ☐ Théorème du point fixe pour une fonction contractante ou lorsque, sur un compact,
$$x \neq y \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|$$
- ☐ Distance à un compact, à un fermé
- ☐ Un sous-espace strict est d'intérieur vide

11 Exponentielles de matrices et équations différentielles

Savoir-faire

- ☐ Définir et montrer la convergence absolue d'une série exponentielle ou géométrique d'endomorphisme ou de matrice
- ☐ Utiliser la régularité (continuité, dérivation) des fonctions exponentielles d'endomorphisme ou de matrice
- ☐ Calculer avec les exponentielles : image d'une somme, inverse, exponentielle et similitude, spectre complexe
- ☐ Calculer l'exponentielle d'une matrice diagonalisable, trigonalisable, nilpotente ou somme d'une matrice diagonalisable et d'une matrice nilpotente qui commutent
- ☐ Résoudre une EDL$_1$ scalaire, appliquer la méthode de variation de la constante, résoudre directement en reconnaissant la dérivée d'un produit ou d'un quotient
- ☐ Résoudre une EDL$_2$ scalaire avec des cœfficients constants, trouver une solution particulière avec un second même polynôme-exponentielle ou polynôme-(cosinus ou sinus)
- ☐ Trouver des solutions polynomiales ou DSE lorsque les cœfficients sont polynomiaux
- ☐ Résoudre un système différentiel linéaire homogène par changement de fonction inconnue ou, si les cœfficients sont constants, en utilisant l'exponentielle
- ☐ Transformer une équation scalaire d'ordre n en un système de dimension n et d'ordre 1
- ☐ Utiliser le théorème de Cauchy-linéaire pour trouver des propriétés des solutions d'EDL
- ☐ Décrire la structure de l'espace des solution de l'équation homogène ou non avec les hypothèse appropriées
- ☐ Utiliser le wronskien pour vérifier que deux solution d'une équation homogène d'ordre 2 sont indépendantes
- ☐ Trouver une équation différentielle vérifiée par un wronskien
- ☐ Utiliser une méthode type variation de la constante pour trouver une deuxième solution d'une EDL$_2$ homogène
- ☐ Utiliser la méthode de variation des constantes pour trouver une solution particulière à partir d'une base de solutions de l'équation homogène
- ☐ Faire un raccord de solutions
- ☐ Résoudre une équation scalaire d'ordre n en utilisant le lemme de décomposition des noyaux
- ☐ Résoudre une EDL en faisant un changement de variables (qui implique un changement de fonction inconnue)

Thèmes Classiques

- ☐ Lien entre le déterminant de $\exp A$ et le spectre de A
- ☐ L'exponentielle d'une matrice est un polynôme en la matrice
- ☐ EDL$_2$ d'Euler
- ☐ EDL inhabituelles (par exemple faisant intervenir $f(-x)$ ou $f(1/x)$) en se ramenant à une EDL classique d'ordre supérieur, ou en utilisant la décomposition en parties paire et impaire

12 Calcul différentiel

Savoir-faire

- ☐ Étudier les limites et la continuité de fonctions de plusieurs variables, via des majorations de valeurs absolue de différences et/ou d'éventuels changement de variables (par exemple en polaire)
- ☐ Calculer de dérivées partielles à tous ordres, utiliser la règle de la chaîne ou les produits de matrices jacobiennes pour les composées
- ☐ Utiliser le théorème de Schwarz
- ☐ Calculer la matrice hessienne en un point (critique, en général)
- ☐ Écrire des développements limités aux ordre 1 et 2 avec les hypothèses appropriées
- ☐ Résoudre les EDP fondamentales
- ☐ Effectuer un changement de variables dans une EDP pour se ramener à une EDP fondamentale
- ☐ Effectuer une recherche d'extremums libres avec les conditions nécessaires et/ou suffisantes sur l'intérieur du domaine, traiter le·s bord·s à part, utiliser le théorème des bornes atteintes si le domaine est compact
- ☐ En particulier, pour une hessienne 2×2, discuter en fonction du signe du déterminant et de la trace du type de point critique
- ☐ Utiliser le théorème d'optimisation sous contraintes (extremums liés)
- ☐ Calculer la différentielle en un point à l'aide d'un DL_1 ou de dérivées partielles
- ☐ Calculer la dérivée selon un vecteur directement, à l'aide de la différentielle ou des dérivées partielles
- ☐ Définir et utiliser le gradient en un point en lieu et place de la différentielle lorsque l'espace de départ est euclidien
- ☐ Exprimer la différentielle d'une composée de deux applications différentiables, d'une composée d'une application multilinéaire avec des applications différentiables
- ☐ Exprimer l'intégrale d'une fonction le long d'un arc
- ☐ Utiliser la caractérisation des fonctions constantes sur un ouvert connexe par arcs
- ☐ Définir un vecteur tangent à une partie d'un evn, connaître les cas d'un sous-espace affine, d'une sphère, d'une surface décrite explicitement
- ☐ Exprimer plus généralement l'hyperplan tangent en un point n'annulant pas la différentielle d'un ensemble décrit implicitement

Thèmes Classiques

- ☐ Équation des cordes vibrantes
- ☐ Inégalité arithmético-géométrique
- ☐ Changement de variables en coordonnées polaires (expressions du gradient, du laplacien)
- ☐ Fonctions harmoniques
- ☐ Principe du maximum
- ☐ Optimisation de fonctions convexes
- ☐ Différentielle de l'inversion matricielle, du déterminant

II Algèbre

1 Structures algébriques

Savoir-faire

- ☐ Utiliser la définition d'un groupe, d'un groupe abélien
- ☐ Connaître les groupes classiques
- ☐ Utiliser la caractérisation d'un sous-groupe, reconnaître un groupe en tant que produit cartésien, qu'intersection, que groupe engendré par une partie, image directe ou réciproque d'un sous-groupe par un morphisme de groupe (par exemple son noyau ou son image), ensemble des inversibles d'un anneau
- ☐ Connaître les sous-groupes de $(\mathbb{Z},+)$
- ☐ Montrer qu'on a un morphisme de groupe, calculer son noyau
- ☐ Traduire l'injectivité et la surjectivité d'un morphisme de groupe avec son noyau ou son image
- ☐ Définir le sous-groupe engendré par une partie, décrire ses éléments
- ☐ Définir un groupe monogène ou cyclique
- ☐ Définir l'ordre d'un élément dans un groupe, faire le lien avec le groupe engendré par cet élément, savoir qu'il divise le cardinal du groupe lorsque celui-ci est fini
- ☐ Définir le groupe symétrique d'ordre n et son cardinal
- ☐ Décomposer une permutation en produit de cycles à supports disjoints, en produit de transposition
- ☐ Déterminer l'ordre et la signature d'un p-cycle, d'une permutation, calculer leurs itérées
- ☐ Utiliser la définition d'un anneau, d'un anneau commutatif
- ☐ Connaître les anneaux classiques
- ☐ Faire des calculs dans un anneau avec hypothèses adaptées (binôme, $a^n - b^n$, somme géométrique...)
- ☐ Utiliser la définition d'un corps
- ☐ Connaître les corps classiques
- ☐ Utiliser la définition d'un anneau intègre, la régularité de ses éléments, le fait qu'un corps le soit
- ☐ Reconnaître un sous-anneau, un anneau comme anneau produit, un sous-corps
- ☐ Montrer qu'on a un morphisme d'anneaux, calculer son noyau
- ☐ Définir un idéal d'un anneau commutatif
- ☐ Voir le noyau d'un morphisme d'anneau comme un idéal, l'image comme un sous-anneau
- ☐ Définir un idéal et un anneau principal
- ☐ Caractériser la divisibilité avec les idéaux, définir les PGCD et PPCM en termes d'idéaux
- ☐ Utiliser la définition d'une algèbre
- ☐ Connaître les algèbres classiques
- ☐ Définir un polynôme en un élément d'une algèbre
- ☐ Définir un morphisme d'algèbres

Thèmes Classiques

- ☐ CNS pour qu'une réunion de sous-groupes (ou sev) le soit encore
- ☐ $(*)$ Sous-groupes de $(\mathbb{R},+)$
- ☐ Théorème de Lagrange
- ☐ Groupe $\mathfrak{A}_n$ alterné d'ordre n
- ☐ Conjugaison de cycle : $\sigma \circ c \circ \sigma^{-1}$
- ☐ Théorème de Cayley
- ☐ Centre d'un groupe
- ☐ $(*)$ Sous-groupes distingués
- ☐ Idéaux annulateurs, premiers
- ☐ Nilpotents d'un anneau
- ☐ Entiers de Gauß
- ☐ Anneau de Boole $(\mathscr{P}(E),\Delta,\cap)$
- ☐ $(*)$ Radical d'un idéal

2 Polynômes et fractions rationnelles

Savoir-faire

- ☐ Énoncer la formule des cœfficients d'un produit de polynômes (voir produit de Cauchy)
- ☐ Manipuler les dérivées de polynômes, exprimer leur degré
- ☐ Utiliser la formule de Taylor pour les polynômes
- ☐ Définir l'ordre de multiplicité d'une racine, la caractériser avec la dérivation
- ☐ Traduire par la divisibilité ou la dérivation qu'une racine est d'ordre au moins m
- ☐ Définir ce qu'est un polynôme scindé, le caractériser avec la multiplicité des racines
- ☐ Énoncé le théorème fondamental de l'algèbre
- ☐ Définir les fonctions symétriques élémentaires en les racines d'un polynômes, énoncer les relations cœfficients-racines
- ☐ Définir un polynôme d'interpolation de Lagrange, traduire le problème avec des outils d'algèbre linéaire, le calculer effectivement
- ☐ Poser une division euclidienne polynomiale
- ☐ Utiliser le fait que l'anneau $(\mathbb{K}[X],+,\times)$ est principal
- ☐ Définir l'irréductibilité d'un polynôme, connaître les irréductibles sur $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$
- ☐ Factoriser en produit d'irréductible dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$
- ☐ Déterminer le PGCD de deux polynômes avec l'algorithme d'Euclide ou la décomposition en irréductible
- ☐ Utiliser le lemme de Gauß pour les polynômes, par exemple pour résoudre des équations de la forme $AP+BQ=C$
- ☐ Déterminer les racines du PGCD et leur multiplicité, traduire que deux polynômes sont premier entre eux à l'aide de racines
- ☐ Définir le fait qu'une famille de polynômes soient premier entre eux dans leur ensemble
- ☐ Décomposer en éléments simples une fonction rationnelle dans $\mathbb{R}[X]$ ou dans $\mathbb{C}[X]$ (avec pôles simples ou multiples)
- ☐ Utiliser la parité ou le fait que la fraction soit réelle pour obtenir des relations entre cœfficients
- ☐ Décomposer en éléments simple $\frac{P'}{P}$ lorsque P est scindé

Thèmes Classiques

- ☐ Polynômes de Tchebychev
- ☐ Polynômes de Legendre
- ☐ Racines rationnelles d'un polynôme à cœfficients dans $\mathbb{Z}$
- ☐ Étude des dérivées de polynômes réels simplement scindés ou scindés
- ☐ Majoration de l'erreur dans l'interpolation de Lagrange
- ☐ Décomposition en irréductibles de X^n-1
- ☐ Décomposition en éléments simples de $\frac{1}{X^n-1}$
- ☐ Théorème de Gauß-Lucas
- ☐ $(*)$ Polynômes cyclotomiques

3 Algèbre linéaire

Savoir-faire

- ☐ Connaître les espaces vectoriels classiques
- ☐ Montrer qu'une famille finie ou non est libre ou liée, avec de multiples méthodes (définition, résolution de système, raisonnements par l'absurde, par récurrence, arguments de dimension, utilisation de sommes directes, polynômes non nuls à degrés étagés, déterminant, famille orthogonale de vecteurs non nuls, famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes, sous ou sur-famille d'une famille libre ou liée, etc.)
- ☐ Utiliser la caractérisation d'un sous-espace, reconnaître un espace vectoriel en tant que produit cartésien, un sous-espace en tant qu'intersection ou somme de sous-espaces, le sous-espace engendré par une partie (Vect), image directe ou réciproque d'un sous-espace par une application linéaire (par exemple son noyau ou son image)
- ☐ Passer de famille génératrice à système d'équations et réciproquement
- ☐ Connaître les bases canoniques de $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}[X]$, $\mathbb{K}_n[X]$, $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$
- ☐ Définir une somme, une somme directe, des sous-espaces supplémentaire
- ☐ Montrer qu'une somme est directe, que deux ou plus sous-espaces sont supplémentaires par plusieurs méthodes (analyse-synthèse, caractérisation avec l'intersection pour deux sev, avec l'unique écriture de 0_E pour plus, utiliser les dimension, obtenir une base adaptée à la décomposition, utiliser une symétrie ou une projection, reconnaître des sous-espaces propres, reconnaître des sous-espaces orthogonaux, etc.)
- ☐ Utiliser les théorèmes des bases extraites et incomplètes
- ☐ Calculer la dimension d'un produit cartésien, d'une somme (formule de Grassmann), de $\mathscr{L}(E,F)$
- ☐ Calculer le rang d'une famille de vecteur (par exemple avec un pivot de Gauß)
- ☐ Définir et manipuler les applications linéaires, leurs image et noyau
- ☐ Caractériser l'injectivité, la surjectivité, la bijectivité d'une application linéaire en utilisant éventuellement un argument de dimension, ou l'image d'une base
- ☐ Calculer le noyau et l'image d'une restriction d'application linéaire
- ☐ Calculer le rang d'une application linéaire
- ☐ Manipuler des polynômes en un endomorphisme (savoir qu'ils commutent)
- ☐ Montrer une inversibilité à l'aide d'un polynôme annulateur
- ☐ Définir un projecteur et une symétrie, retrouver leurs propriétés sur un dessin, les caractériser, calculer leurs éléments caractéristiques. Savoir en particulier que l'image d'un projecteur est l'ensemble de ses vecteurs invariants, et que sa trace est égale à son rang.
- ☐ Savoir qu'une application linéaire est uniquement déterminée par l'image des vecteurs d'une base de l'espace de départ.
- ☐ Traduire le problème d'interpolation de Lagrange par un isomorphisme
- ☐ Savoir que lorsque la dimension finie est la même ou départ et à l'arrivée, l'inversibilité à gauche équivaut à l'inversibilité à droite
- ☐ Connaître le théorème de rang dans son intégralité (y compris la première partie géométrique)
- ☐ Définir et caractériser les hyperplans (noyau d'une forme linéaire non nulle, supplémentaire d'une ou de toute droite non incluse, dimension)
- ☐ Résoudre un système linéaire avec la méthode du pivot de Gauß
- ☐ Connaître la structure de sous-espace affine de l'ensemble des solution d'un système affine, la définition de son rang, savoir ce qu'est un système de Cramer
- ☐ Énoncer la formule du cœfficient d'un produit de matrices, effectuer un produit par blocs
- ☐ Donner une formule pour les cœfficients d'une matrice élémentaire, pour un produit de deux matrices élémentaires
- ☐ Transposer une matrice, utiliser les propriétés de la transposition
- ☐ Caractériser l'inversibilité d'une matrice carrée
- ☐ Calculer l'inverse d'une matrice (résolution de système, méthode du pivot de Gauß, formule de la comatrice, en reconnaissant une matrice de passage)
- ☐ Définir des matrices triangulaires, diagonales, scalaires, symétriques, antisymétriques, connaître la structure de ces ensembles de matrices, la supplémentarité de $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$
- ☐ Connaître la définition et les propriétés de la trace d'une matrice carrée
- ☐ Calculer les puissances d'une matrice carrée par récurrence, par application du binôme, en utilisant un polynôme annulateur, en diagonalisant ou trigonalisant
- ☐ Passer d'une application linéaire à une de ses représentations matricielles et réciproquement, utiliser l'application linéaire canoniquement associée à une matrice, traduire matriciellement une composée, un évaluation d'application linéaire
- ☐ Calculer le rang, l'image, le noyau d'une matrice (pour ce dernier : avec une résolution de système ou en utilisant le rang est des combinaisons linéaires nulles de colonnes)

- ☐ Savoir que le rang est l'ordre maximal d'une matrice extraite inversible
- ☐ Écrire des matrices de passage, utiliser les formules de changement de bases pour un vecteur, une application linéaire, un endomorphisme
- ☐ Définir l'équivalence de matrices, connaître sa traduction géométrique, savoir que toute matrice de rang r est équivalente à J_r
- ☐ Définir la similituéde de matrices, connaître sa traduction géométrique, connaître des invariants de similitude (trace, déterminant, polynôme caractéristique, spectre...)
- ☐ Connaître les opérations élémentaires, leurs notations, leur représentation matricielle, leur effet à gauche ou à droite sur le rang, l'image, le noyau
- ☐ Connaître le théorème fondamental de construction du déterminant (dimension 1 de l'espace des formes n-linéaires alternée en dimension n)
- ☐ Connaître la formule sommatoire de définition du déterminant
- ☐ Connaître les propriétés calculatoires du déterminant (attention à $\det(\lambda A)\dots$), l'effet des opérations élémentaires
- ☐ Savoir développer un déterminant par rapport à une ligne ou une colonne
- ☐ Calculer un déterminant à l'aide d'une relation de récurrence
- ☐ Utilise la caractère n-linéaire alterné d'un déterminant par rapport à ses colonnes (ou ses lignes)
- ☐ Définir la comatrice, connaître la formule de la comatrice et son application pour exprimer l'inverse
- ☐ Calculer un déterminant triangulaire par blocs
- ☐ Connaître l'expression d'un déterminant de Vandermonde, savoir quand est-ce qu'il est non nul, maîtriser la preuve avec les polynômes
- ☐ Savoir ce que signifie orienter un $\mathbb{R}$-espace vectoriel

Thèmes Classiques

- ☐ Images et noyaux itérés
- ☐ Si pour tout x, $(x, u(x))$ est liée, alors u est une homothétie
- ☐ Inégalité triangulaire sur les rangs
- ☐ Description des formes linéaires sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$
- ☐ Centre de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, commutant d'une matrice diagonale à cœfficients diagonaux distincts deux à deux
- ☐ Théorème d'Hadamard : matrices à diagonales strictement dominantes
- ☐ Description des matrices de rang 1 et de leur trace
- ☐ Formules de Cramer
- ☐ Déterminant de Hürwitz
- ☐ $(*)$ Rang de la comatrice
- ☐ CNS pour qu'une matrice à cœfficients dans $\mathbb{Z}$ soit inversible d'inverse dans à œfficients dans $\mathbb{Z}$
- ☐ Matrices de permutations

4 Réduction

Savoir-faire

- ☐ Définir un sous-espace stable par un endomorphisme, le caractériser par des bases, l'interpréter sur une matrice par blocs dans une base adaptée, savoir que les droites stables sont les droites engendrées par les vecteurs propres
- ☐ Savoir que l'image, le noyau, les sous-espaces propres d'un endomorphisme sont stables par un endomorphisme avec lequel il commute
- ☐ Définir les éléments propres d'un endomorphisme et d'une matrice, savoir que des sous-espaces propres sont toujours en somme directe
- ☐ Calculer un polynôme caractéristique, en connaître quelques cœfficients, interpréter le déterminant et la trace lorsqu'il est scindé
- ☐ Utiliser le théorème de Cayley-Hamilton
- ☐ Connaître parfaitement les (nombreuses) caractérisations et conditions nécessaires de la diagonalisabilité et de la trigonalisabilité
- ☐ Connaître les particularités lorsque la matrice est réelle et qu'on la réduit dans $\mathbb{C}$
- ☐ Connaître les propriétés de réduction et des polynômes caractéristique et minimal d'un endomorphisme induit
- ☐ Diagonaliser effectivement une matrice, déterminer une base de sous-espace propre par lecture matricielle ou par résolution de système linéaire
- ☐ Appliquer une diagonalisation à la recherche du terme général de système de suites récurrentes d'ordre 1 ouà une vectorialisation de suite récurrente d'ordre supérieur, à résoudre un système différentiel, à déterminer le commutant d'une matrice, à extraire les racines carrées d'une matrice et, plus généralement, résoudre des équations matricielles
- ☐ Déterminer les sous-espaces stables par une matrice diagonalisable
- ☐ Trigonaliser effectivement des petites matrices
- ☐ Manipuler des polynômes en un endomorphisme ou une matrice carrée, en particulier pour des matrices diagonales ou triangulaires
- ☐ Connaître le lien entre polynôme annulateur et valeurs propres
- ☐ Utiliser le lemme de décomposition des noyaux, par exemple appliqué à la résolution d'équations différentielles
- ☐ Définir le polynôme minimal, déduire de son degré une base de l'algèbre des polynôme en l'endomorphisme ou en la matrice
- ☐ Calculer effectivement le polynôme minimal, en utilisant par exemple le fait qu'il divise la polynôme caractéristique et a les mêmes racines
- ☐ Définir et caractériser les endomorphismes et matrices nilpotentes
- ☐ Connaître la définition et les propriétés des sous-espaces caractéristiques, les appliquer pour obtenir une réduction par bloc type Dunford

Thèmes Classiques

- ☐ Réduction des matrices compagnes
- ☐ Diagonalisation et trigonalisation simultanées
- ☐ Réduction et déterminant de matrice circulante
- ☐ Densité de $\mathscr{GL}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$
- ☐ Réduction des matrices de rang 1
- ☐ Théorème de Gerschgorin de localisation des valeurs propres
- ☐ Réduction par blocs
- ☐ Représentation matricielle d'un endomorphisme nilpotent dans une base adaptée, détermination de commutant et des sous-espaces stables lorsque l'indice de nilpotence est la dimension de l'espace
- ☐ Existence et unicité de la décomposition de Dunford
- ☐ $(*)$ Endomorphismes semi-simples
- ☐ $(*)$ Endomorphismes cycliques
- ☐ $(*)$ Endomorphismes simples

5 Algèbre bilinéaire

Savoir-faire

- ☐ Définir un produit scalaire, un espace préhilbertien réel, un espace euclidien, la norme euclidienne associée et les produits scalaires et normes euclidiennes particulières du programme
- ☐ Utiliser des identités remarquables et de polarisation
- ☐ Utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz (y compris pour une forme bilinéaire symétrique positive) et son cas d'égalité (dans le cas défini-positif seulement)
- ☐ Manipuler des familles orthogonales ou orthonormales, l'orthogonal d'un sous-espace
- ☐ Utiliser le théorème de Pythagore
- ☐ Appliquer l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt
- ☐ Exprimer les coordonnées, produit scalaire, norme, distance euclidiennes en base orthonormale sous forme de somme ou sous forme matricielle
- ☐ Écrire une formule de changement de base orthonormales
- ☐ Savoir que l'orthogonal d'un sous-espace de dimension finie est aussi un supplémentaire (le seul qui soit aussi orthogonal) et les propriétés qui en découlent
- ☐ Connaître les propriétés des projections et symétries orthogonales, exprimer la projection sur un sous-espace dont on connaît une base orthonormale, exprimer en particulier la projection orthogonale sur une droite et sur un hyperplan et les symétries correspondantes (retournement et réflexion)
- ☐ Déterminer la distance à un sous-espace de dimension finie, l'exprimer de plusieurs manières, connaître le cas particulier de la distance à un hyperplan
- ☐ Énoncer le théorème de représentation (des formes linéaires) de Riesz
- ☐ Définir et utiliser l'adjoint d'un endomorphisme, connaître les éléments communs à un endomorphisme et son adjoint
- ☐ Définir une matrice orthogonale et une isométrie vectorielle, une matrice orthogonale positive et une rotation, les caractériser
- ☐ Connaître la structure de $\mathcal{O}(n)$ et $\mathcal{SO}(n)$
- ☐ Savoir que si un sous-espace est stable par un endomorphisme, son orthogonal est stable par l'adjoint et si un sous-espace est stable par une isométrie, son orthogonal l'est aussi
- ☐ Décrire précisément les éléments de $\mathcal{O}(n)$ et $\mathcal{O}(E)$ lorsque $\dim E = 2$, étudier une isométrie donnée par sa matrice en base orthonormale directe
- ☐ Réduire de manière générale les isométries, connaître le cas particulier des rotation en dimension 3
- ☐ Définir un endomorphisme autoadjoint, autoadjoint positif, autoadjoint défini-positif, caractériser les deux derniers à l'aide du spectre, et traduire tout cela matriciellement
- ☐ Énoncer le théorème spectrale sous plusieurs formes

Thèmes Classiques

- ☐ Espace préhilbertien $L^2(I)$ des fonctions réelles de carré intégrable sur I, espace préhilbertien ℓ^2 des suites réelles de carré sommable
- ☐ Familles de polynômes orthogonaux (exemples : polynômes de Tchebychev, polynômes de Legendre, polynômes de Hermite...)
- ☐ Méthode de Gauß de calcul approché d'intégrales
- ☐ Décomposition QR, application à l'inégalité de Hadamard
- ☐ CNS pour qu'un projecteur soit un projecteur orthogonal : sa symétrie (résultat du programme) ou le fait que sa norme subordonnée soit $\leqslant 1$
- ☐ CNS pour qu'une symétrie soit une symétrie orthogonale
- ☐ Projection sur un convexe fermé
- ☐ Déterminant de Gram
- ☐ Racine carrées de matrices symétriques positives
- ☐ Décomposition polaire de matrices carrées
- ☐ Formules variationnelles, norme subordonnée de l'adjoint, rayon spectral
- ☐ Réduction des endomorphismes antisymétriques

6 Arithmétique entière et algèbre modulaire

Savoir-faire

- ☐ Définir PGCD et PPCM à l'aide d'idéaux, les caractériser à l'aide de l'ordre partiel de division, les calculer à partir de décompositions primaires
- ☐ Utiliser la propriété d'Euclide, l'algorithme d'Euclide, l'algorithme d'Euclide étendu
- ☐ Résoudre une équation diophantienne $ax+by=c$ dans $\mathbb{Z}$
- ☐ Définir des nombres premiers entre eux, s'y ramener par factorisation du PGCD, utiliser le théorème de Bézout, le lemme de Gauß, et les autres propriétés du programme les concernant
- ☐ Définir les nombres premiers, utiliser leurs propriétés, montrer qu'ils sont en nombre infini, écrire une décomposition primaire
- ☐ Définir une valuation p-adique et connaître ses propriétés
- ☐ Définir la relation de congruence modulo n, traduire que deux nombres sont congrus modulo n par un argument de divisibilité
- ☐ Connaître les critères de divisibilité par $2, 3, 4, 5, 8, 9, 10, 11$
- ☐ Obtenir une divisibilité par calcul modulaire
- ☐ Définir l'anneau $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$ des entiers modulo n, déterminer ses éléments inversibles, les générateur du groupe cyclique additif correspondant, connaître une CNS pour que ce soit un corps (noté alors $\mathbb{F}_p$)
- ☐ Calculer effectivement l'inversible d'un élément inversible de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$
- ☐ Résoudre un système linéaire, une équation du second degré dans $\mathbb{F}_p$
- ☐ Connaître les deux versions (pratique et théorique) du théorème chinois
- ☐ Résoudre un système de congruence par théorème chinois ou par résolution d'équations diophantienne, être capable en particulier de trouver une solution particulière rapidement
- ☐ Définir l'indicatrice d'Euler, connaître les images des puissances des nombres premiers, son caractère multiplicatif, en déduire l'expression de $\varphi(n)$ à l'aide des diviseurs premiers de n
- ☐ Connaître le théorème d'Euler et son corollaire, le petit théorème de Fermat
- ☐ Calculer les puissances d'un entier modulo n : soit en trouver une cyclicité à la main, soit en utilisant le théorème d'Euler ou le petit théorème de Fermat

Thèmes Classiques

- ☐ Nombres de Mersenne et de Fermat
- ☐ Formule de Legendre
- ☐ Triplets pythagoriciens
- ☐ Fonction et inversion de Möbius
- ☐ Carrés dans $\mathbb{F}_p$
- ☐ Théorème de Wilson
- ☐ Chiffrement RSA
- ☐ Expression de $\varphi(n)$ obtenue avec des arguments probabilistes
- ☐ Identité $n = \sum_{k|n} \varphi(k)$

III PROBABILITÉS

Savoir-faire

- ☐ Connaître la définition et les propriétés d'une tribu
- ☐ Connaître la définition et les probabilités d'une probabilité
- ☐ Connaître la définition d'une distribution de probabilité et l'unique probabilité qui lui est associée
- ☐ Énoncer et utiliser les propriétés de continuité croissante et décroissante (y compris sous la forme limite de probabilité de réunion ou intersections d'événements)
- ☐ Définir un événement négligeable, un événement presque sûr, un système complet d'événements
- ☐ Définir une probabilité conditionnelle, savoir qu'on définit ainsi une nouvelle probabilité
- ☐ Appliquer les formules des probabilités composées, probabilités totales, de Bayes en connaissant leurs hypothèses et les situations dans lesquelles elles interviennent
- ☐ Définir l'indépendance de deux événements, puis d'une famille d'événements, savoir que passer au complémentaire certains événements préserve l'indépendance
- ☐ Définir la notion de variable aléatoire discrète, de fonction d'une VAD, de SCE associé à une VAD, la loi d'une VAD
- ☐ Déterminer la loi d'une fonction de VAD en fonction de la ou de leur·s loi·s
- ☐ Définir les lois conjointe, marginales, conditionnelles d'une famille de VAD, leur indépendance
- ☐ Utiliser le lemme des coalitions
- ☐ Définir ce qu'est une variable aléatoire d'espérance finie (notation L^1), ce que vaut l'espérance et les formules alternatives pour les VAD entières ou finies
- ☐ Utiliser le théorème de transfert et toutes les propriétés de calculs de l'espérance (type propriété de somme/intégrale)
- ☐ Calculer l'espérance d'un produit de variables aléatoires indépendantes
- ☐ Définir l'espace L^2, la variance, l'écart-type et la covariance
- ☐ Utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour les espérance
- ☐ Connaître les propriétés de variance et covariance, notamment formule de Kœnig-Huygens, image par une application affine pour variance et écart-type, la covariance est « presque » un produit scalaire, variance d'une somme
- ☐ Définir la fonction génératrice d'une variable aléatoire entière, son domaine minimal de définition, de continuité, de classe $\mathscr{C}^\infty$
- ☐ Retrouver la loi, l'espérance, la variance à partir de la fonction génératrice
- ☐ Utiliser la caractérisation de la loi par la fonction génératrice pour montrer que des variables aléatoires sont identiquement distribuées (ont même loi)
- ☐ Calculer la fonction génératrice d'une somme de variables aléatoires entières indépendantes
- ☐ Loi usuelles : loi, espérance, variance, fonction génératrice pour des lois de Bernoulli, binomiale, géométrique, de Poisson
- ☐ Représenter un succès par une variable de Bernoulli, un nombre de succès par une somme de telles variables
- ☐ Savoir pourquoi la loi de Poisson est surnommée loi des événements rares
- ☐ Énoncer les inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev, la loi faible des grands nombres

Thèmes Classiques

- ☐ Formule du crible, formule de Poincaré
- ☐ Indicatrice d'Euler
- ☐ Loi ζ
- ☐ Problème des anniversaires
- ☐ Marches aléatoires
- ☐ Problème du collectionneur
- ☐ Chaînes de Markov et matrices stochastiques
- ☐ $(*)$ Urnes de Pólya
- ☐ Loi d'une somme de variables aléatoires de Poisson
- ☐ $(*)$ Formule de Wald (cf deuxième question de l'exercice sur la gestion de stock)
- ☐ $(*)$ Loi de Pascal (loi du n^{e} pile)
- ☐ $(*)$ Espérance conditionnelle, formule de l'espérance totale
- ☐ Démonstration du théorème de Weierstraß par des arguments probabilistes